1 Диференцијабилност функција

На прошлом часу увели смо појам извода функције, и објаснили га на примеру тренутне брзине. Да се подсетимо, граничну вредност (уколико постоји) функције $y = f(x)$ у тачки x_0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

називамо **изводом** функције $f(x)$ у тачки x_0 и означавамо са $f'(x_0)$. Операција налажења извода назива се **диференцирањем**. Ако је ова гранична вредност **одређено бесконачна** ($+\infty$ или $-\infty$), извод у тачки x_0 је **бесконачан**.

Користећи пририштаје аргумента $\Delta x = x - x_0$ и функције $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, претходну граничну вредност можемо записати у облику

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Уколико постоје граничне вредности $\lim\limits_{x \to x_0 -} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ и $\lim\limits_{x \to x_0 +} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, коначне или одређено бесконачне, називамо их **левим**, односно **десним** изводом функције $f(x)$ у тачки x_0, и означавамо их редом са $f'_-(x_0)$, односно $f'_+(x_0)$. Ако је $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, тада постоји извод функције $f'(x_0)$, коначан или одређено бесконачан, при чему је $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Пример 1.1 Функција $f(x) = |x|$ има у тачки $x_0 = 0$ леви и десни извод

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = -1, \; f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1,$$

али је $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, па не постоји извод у тачки 0.

Пример 1.2 Функција $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ у тачки $x_0 = 0$ нема коначан ни леви ни десни извод

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0-} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty,$$
$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty,$$

па извод не постоји у тачки 0.

Дефиниција 1.1 *За функцију $y = f(x)$ кажемо да је **диференцијабилна**, ако постоји број A, такав да се њен прираштај $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ може представити у облику*

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x).$$

Теорема 1.1 *Функција $y = f(x)$ је диференцијабилна, ако и само ако постоји извод $f'(x)$.*

► Ако је функција $f(x)$ диференцијабилна тада је $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$. За $\Delta x \neq 0$ претходна једнакост еквивалентна је са $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$. Пуштајући да $\Delta x \to 0$, десна једнакост тежи A, па постоји гранична вредност $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, што значи да постоји извод функције $f(x)$ и једнак је $f'(x_0) = A$.

Обратно, уколико функција $f(x)$ има извод у тачки x_0, то је

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Big(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)\Big) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = 0$$

па израз $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x$ представља бесконачно малу величину вишег реда у односу на Δx, када $x \to x_0$, то јест

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x = o(\Delta x),$$

тако да је

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Овде је $A = f'(x_0)$, па је функција $f(x)$ диференцијабилна. ◄

Дакле, диференцијабилност и постојање извода функције једне променљиве еквивалентни су појмови. Функцију која има извод у тачки x_0 називамо *диференцијабилном* у тачки x_0, а функцију која има извод у свакој тачки x скупа E, називамо *диференцијабилном* на скупу E.

Израз $f'(x)\Delta x$ називамо **диференцијалом функције** и означавчмо са dy или df. Значи, $dy = f'(x)\Delta x$. Када је $f(x) = x$, односно $y = x$, тада је $dy = dx = \Delta x$, тако да је $f'(x)dx$ уобичајен облик диференцијала функције.

На основу претходне дефиниције и теореме, прираштај Δy функције $f(x)$ може се приближно изразити преко диференцијала dy, то јест $\Delta y \approx dy$, односно

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \quad \Leftrightarrow \quad f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Последња формула се често користи за приближно израчунавање.

Пример 1.3 Да бисмо израчунали $\sqrt[3]{25}$, посматрамо функцију $f(x) = \sqrt[3]{x}$ и примењујемо последњу формулу

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{x+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Даље је

$$\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{27-2} = 3\sqrt[3]{1-\frac{2}{27}} \approx 3 - \frac{2}{27} = \frac{79}{27} \approx 2,92593,$$

при чему смо узели $x = 1$ и $\Delta x = -\frac{2}{27}$. Наводимо да вредност $\sqrt[3]{25}$ с првих 5 тачних децимала износи $2,92401$.

Теорема 1.2 *Ако функција $f(x)$ има извод у тачки x_0, тада је она непрекидна у тој тачки.*

► Нека постоји $f'(x_0)$. На основу претходне теореме, функцију $f(x)$ можемо представити на следећи начин $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$. Одавде је

$$\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=\lim_{\Delta x\to 0}(f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x))=0,$$

што значи да је функција $f(x)$ непрекидна функција у тачки x_0. ◄

Непрекидност је неопходан, али не и довољан услов дифренцијаилности функција једне променљиве, што показује

Пример 1.4 За функцију $f(x)=|x|$ је, на основу особине 6° апсолутне вредности, важи $||x|-|x_0||\leqslant|x-x_0|$, па је она непрекидана у произвољној тачки x_0, али, на основу Примера 1.2, у тачки $x_0=0$ није диференцијабилна.

1.1 Геометријски смисао извода и диференцијала функције

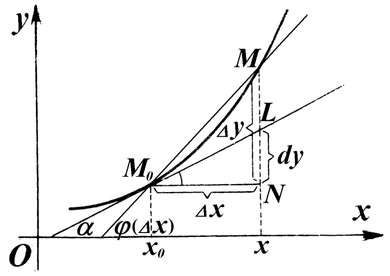
Нека је функција $f(x)$ диференцијабилна у тачки x_0, то јест постоји извод $f'(x_0)$. Једначина сечице која пролази кроз тачке $M_0(x_0,f(x_0))$ и $M(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$ графика функције $f(x)$ и закалапа угао $\varphi(\Delta x)$ с позитивним смером осе x, гласи

$$y-f(x_0)=\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)\,(x-x_0), \tag{1}$$

где је (x,y) њена произвољна тачка, а $\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ коефицијент правца сечице. Како $\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)$ тежи $f'(x_0)$, када $\Delta x\to 0$, гранични положај сечице је права, чија једначина је

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\,(x-x_0).$$

Значи, када се x приближава тачки x_0, тачка M на графику приближава се тачки M_0, а сечица тежи да заузме положај наведене праве, која предстаља **тангенту** на график функције $f(x)$ у тачки x_0, и заклапа угао $\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)$ с позитивним смером осе x. Услед непрекиднсти функције тангенс, важи $\operatorname{tg}\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)$.



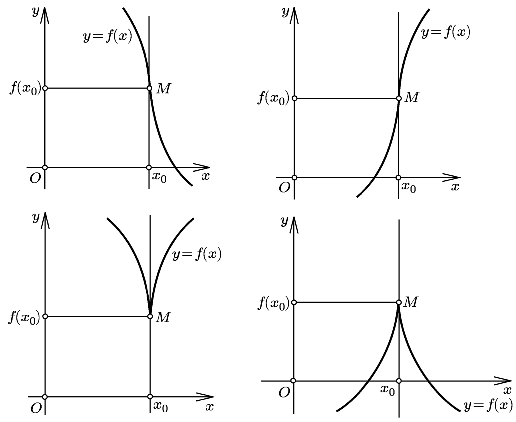
На основу тога, коефицијент правца тангенте $\operatorname{tg}\alpha$ једнак је $f'(x_0)=\dfrac{y-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{NL}{M_0N}$. Како је $dy=f'(x_0)dx=f'(x_0)\Delta x$ и $x-x_0=\Delta x=M_0N$, имамо

$$y-f(x_0)=dy=f'(x_0)\Delta x=\operatorname{tg}\alpha\cdot M_0N=NL.$$

Дакле, **диференцијал функције представља прираштај ординате тангенте**.

Ако је функција $f(x)$ непрекидна у тачки x_0 и $\lim\limits_{\Delta x\to 0\pm} \operatorname{tg}\varphi(\Delta x) = \pm\infty$, једначину сечице (1) записујемо у облику

$$x = x_0 + \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)}\,(y - f(x_0)).$$



Разломак тежи нули, када $\Delta x \to 0\pm$, па је гранични положај сечице права $x = x_0$. Међутим, у првом и другом случају на слици постоји извод у тачки x_0, при чему је он бесконачан (леви и десни изводи су бесконачни, али истог су знака), па је $x = x_0$ једначина тангенте на график у тачки $(x_0, f(x_0))$. У трећем и четвртом случају извод не постоји, јер се леви и десни изводи, који су такође бесконачни, међусобно разликују по знаку, па не постоји тангента у тачки $(x_0, f(x_0))$. Ипак, обе гране функције у овој тачки заклапају прав угао с правом $y = f(x_0)$!

1.2 Правила диференцирања

Постоје правила по којима се налази извод збира, разлике, производа и количника двеју функција.

Теорема 1.3 *Нека су функције $f(x)$ и $g(x)$ диференцијабилне у тачки x. Тада су диференцијабилне и функције $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $f(x)/g(x)$ (у последњем случају претпоставља се да је $g(x) \neq 0$) и важе формуле*

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x), \quad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$
$$\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

► Нека је $y = f(x) \pm g(x)$. Тада је $\Delta y = \Delta f \pm \Delta g$ и

$$(f(x) \pm g(x))' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f \pm \Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x) \pm g'(x).$$

Нека је $y = f(x)g(x)$. Тада је

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)\\ &= (f(x + \Delta x) - f(x))g(x + \Delta x) + f(x)(g(x + \Delta x) - g(x))\\ &= \Delta f g(x + \Delta x) + f(x)\Delta g.\end{aligned}$$

Будући да је функција $g(x)$ непрекидна, следи $\lim\limits_{\Delta x\to 0} g(x + \Delta x) = g(x)$. Зато је

$$(f(x)g(x))' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = g(x+\Delta x) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + f(x) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Најзад, нека је $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Како је функција $g(x)$ непрекидна, а $g(x) \neq 0$, тада је она различита од нуле у довољно малој околини тачке x, то јест за довољно мало Δx, тако да је и $g(x+\Delta x) \neq 0$, па разломак чији је именилац $g(x+\Delta x)$ има смисла. Тада је

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\Big(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\Big) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x) - f(x))g(x) - f(x)(g(x+\Delta x) - g(x))}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f(x)\dfrac{\Delta g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned}$$

Приметимо да ако је $g(x) = c$, где је c константа, на основу другог правила добијамо $(cf(x))' = cf'(x)$, јер из $g(x+\Delta x) - g(x) = 0$ следи $g'(x) = 0$. ◄

Пример 1.5 Нађимо извод функције $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

1.3 Извод сложене функције

Теорема 1.4 *Нека је функција $f(x)$, дефинисана на интервалу $I = (a,b)$, диференцијабилна у тачки x_0, а функција $g(t)$, дефинисана на интервалу $K = (c,d)$, диференцијабилна у тачки $t_0 = f(x_0)$, при чему је $f(I) \subset K$. Тада је сложена функција $y = g(f(x))$ диференцијабилна у тачки x_0, и важи*

$$y'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

► С обзиром да је функција $f(x)$ диференцијабилна у тачки x_0, она је и непрекидна у x_0, па $f(x) \to f(x_0)$, када $x \to x_0$, а како је $g(f(x))$ диференцијабилна у $f(x_0)$, то је и непрекидна у $f(x_0)$, тако да $g(f(x)) \to g(f(x_0))$, када $f(x) \to f(x_0)$. Сада имамо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0),$$

што представља тврђење теореме. ◄

Пример 1.6 Нека је $y = (ax+b)^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Означимо $g(t) = t^n$, $f(x) = ax + b$. Тада је $(ax+b)^n = g(f(x))$, а на основу претходне теореме добијамо $y' = g'(f(x))f'(x) = n(ax+b)^{n-1}a$.

1.4 Извод инверзне функције

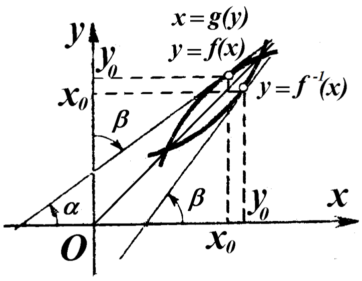
Теорема 1.5 *Нека је функција $y = f(x)$ строго монотона и непрекидна на интервалу (a, b) и диференцијабилна у тачки $x_0 \in (a, b)$. Тада је инверзна функција $x = g(y)$ диференцијабилна у тачки $y_0 = f(x_0)$ и*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

► На основу Теореме **??**, функција $g(y)$ је непрекидна на интервалу (c, d), на који се функцијом $f(x)$ пресликава интервал (a, b). Тада $x = g(y) \to x_0 = g(y_0)$, када $y \to y_0$. Како је $y = f(x)$ и $y_0 = f(x_0)$, то је

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

Преласком на гранични процес, уочавамо да израз на десној страни има смисла, јер је $f'(x_0) > 0$ или $f'(x_0) < 0$, због строге монотоности функције $f(x)$, и тако долазимо до формуле за налажење извода инверзне функције. ◄



Формула из претходне теореме има свој геометријски смисао. Коефицијент нагиба тангенте на график функције $f(x)$ у тачки (x_0, y_0) је $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, а коефицијент нагиба тангенте на график функције $x = g(y)$ у тачки (y_0, x_0) је $g'(y_0) = \operatorname{tg}\beta$. Очигледно је $\alpha + \beta = \pi/2$. Зато је $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1$, односно $f'(x_0)g'(y_0) = 1$.

Нека функција $y = f(x)$ има инверзну функцију. Тада је $f^{-1}(y) = x$, односно $f^{-1}(f(x)) = x$. Ако означимо $g = f^{-1}$ и диференцирамо леву и десну страну једнакости $g(f(x)) = x$, добијамо

$$g'(f(x))f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, \quad g'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{2}$$

Пример 1.7 Функција $x = g(y) = \sqrt[n]{y} = y^{1/n}$ $(y > 0, n = 2, 3, \dots)$ инверзна је функција функције $y = f(x) = x^n$ $(x > 0)$. Стога, на основу (2), следи

$$g'(y) = (\sqrt[n]{y})' = \frac{1}{(x^n)'} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{y^{n-1}}} \quad \Rightarrow \quad (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

1.5 Извод функције задате параметарски

Нека су на интервалу (α, β) задате функције $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, при чему је $\varphi(t)$ строго монотона. Тада постоји инверзна функција $t = \chi(x)$ дефинисана на интервалу (a, b), на који се интервал (α, β) преслика функцијом φ. Размотримо сложену функцију $f(x) = \psi(\chi(x))$ дефинсану на интервалу (a, b). Тада кажемо да је функција $f(x) = \psi(\chi(x))$ задата параметраски једначинама $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$.

Теорема 1.6 *Нека су функције* $x = \varphi(t)$ *и* $y = \psi(t)$ *диференцијабилне на интервалу* (α, β), *а функција* $\varphi(t)$ *строго монотона. Тада је сложена функција* $f(x) = \psi(\chi(x))$ *диференцијабилна на интервалу* (a, b) *и важи*

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

► Како је функција $x = \varphi(t)$ строго монотона, то је $\varphi'(t) \neq 0$ на интервалу (α, β), а како је још и непрекидна (зато што је диференцијабилна!), постоји њена инверзна функција $t = \chi(x)$, која је, на основу теореме о инверзној функцији, диференцијабилна и важи

$$\chi'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)},$$

а на основу теореме о сложеној функцији, функција $f(x) = \psi(\chi(x))$ диференцијабилна је на интервалу (α, β), при чему је

$$f'(x) = \psi'(\chi(x))\chi'(x) = \psi'(t)\chi'(x) = \psi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

што је и тврђење теореме. ◄

1.6 Диференцијабилност елементарних функција

Елементарне функције, са изузетком $\arcsin x$ и $\arccos x$, диференцијабилне су у својим областима дефинисаности. Наћи ћемо изводе неких елементарних функција.

Експоненцијална и логаритамска функција. Према дефиницији извода, налазимо извод фукције $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Функција $x = \log_a y$ је инверзна функција експоненцијалне функције $y = e^x$. На основу формуле (2), налазимо

$$(\log_a y)' = \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a} \quad \Rightarrow \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Степена функција. Извод функције $y = x^\alpha$ $(x > 0, \alpha \in \mathbb{R})$ можемо наћи помоћу теореме о изводу сложене функције

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Тригонометријске функције. Извод функције $y = \sin x$ налазимо по дефиницији

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) \sin \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

Искористили смо граничну вредност $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$, као и непрекидност функције $\cos x$.

Извод функције $y = \cos x$ можемо наћи помоћу теореме о изводу сложене функције

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\sin x.$$

Да бисмо нашли извод функције $y = \operatorname{tg} x$, користићемо правило о изводу количника функција

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos}\right)' = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Слично,

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Инверзне тригонометријске функције. Функција $x = \arcsin y$ $(-1 \le y \le 1)$ инверзна је функција функције $y = \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$. Користећи чињеницу да је $\cos x > 0$ за $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, применом формуле (2), налазимо

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad \Rightarrow \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

На сличан начин налази се и извод функције $y = \arccos x$. Израз за $(\arccos x)'$ разликује се само у знаку у односу на извод $(\arcsin x)'$.

Функција $y = \operatorname{arctg} x$ $(-\infty < x < +\infty)$ инверзна је за функцију $x = \operatorname{tg} y$ $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$. Применом формуле (2), налазимо

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Слично налазимо и извод функције $y = \operatorname{arcctg} x$, с тим што се израз за $(\operatorname{arcctg} x)'$ разликује само у знаку.

Што се тиче диференцирања функције облика $(u(x))^{v(x)}$, при чему су $u(x) > 0$ и $v(x)$ диференцијабилне функције на неком интервалу, применом теореме о изводу сложене функције, налазимо

$$\left((u(x))^{v(x)}\right)' = \left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)' = e^{v(x)\ln u(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{(u(x))}\right).$$

У специјалном случају, за $u(x) = a > 0$, где је a константа, и $v(x) = x$, имамо

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

1.7 Диференцијабилност функције дефинисане степеним редом

Видели смо да сваки степени ред у интервалу конвергенције дефинише непрекидну функцију. Међутим, степени ред поседује још једно својство.

Теорема 1.7 *Ако функција $f(x)$ представља суму степеног реда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, она је диференцијабилна и важи*

$$f'(x) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\Big)' = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k x^k)' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1},$$

при чему оба реда имају исти полупречник конвергенције. Другим речима, степени ред се може диференцирати члан по члан у интервалу конвергенције.

► Нека је $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Налазимо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{R}$, тако да је $(-R, R)$ његов интервал конвергенције. Затим, на основу Примера **??** и **??**, имамо

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n n x^{n-1}|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{|x|}} = \frac{|x|}{R} < 1,$$

што значи да ред $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ за $|x| < R$ конвергира, а дивергира уколико је $|x| > R$. С обзиром да сваки степени ред апсолутно конвергира на интервалу конвергенције, при чему апсолутна конвергенција степеног реда не зависи од избора x из интервала конвергенције $(-R, R)$, то исто важи и за ред $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$.

Нека је r произвољан број такав да је $0 < r < R$, а x_0 било који фиксиран број из $[-r, r]$ и $x \neq x_0$, $x \in [-r, r]$. Означимо $A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x_0^{k-1}$. Имамо

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k - x_0^k}{x - x_0} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x_0^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(P_{k-1}(x) - k x_0^{k-1}\right),$$

где је $P_{k-1}(x) = x^{k-1} + x^{k-2} x_0 + \cdots + x x_0^{k-2} + x_0^{k-1}$. Како је

$$P_{k-1}(x) - k x_0^{k-1} = (x - x_0)\big(x^{k-2} + 2x^{k-3} x_0 + 3x^{k-4} x_0^2 + \cdots + (k-2) x x_0^{k-3} + (k-1) x_0^{k-2}\big),$$

за x, $x_0 \in [-r, r]$, налазимо

$$|P_{k-1}(x) - k x_0^{k-1}| \leqslant \frac{|x - x_0|}{2} k(k-1) r^{k-2},$$

односно

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A\right| \leqslant \frac{|x - x_0|}{2} \sum_{k=2}^{\infty} |a_k|\, k(k-1) r^{k-2}.$$

Због $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k(k-1)} = 1$ и $0 < r < R$, ред на десној страни конвергира. Нека је његова сума једнака S. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta = 2\varepsilon/S$, на основу чега, за $|x - x_0| < \delta$, следи

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A\right| \leqslant \frac{|x - x_0|}{2} \sum_{k=2}^{\infty} |a_k|\, k(k-1) r^{k-2} < \frac{\varepsilon}{S} \cdot S = \varepsilon,$$

што значи да је $f'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x_0^{k-1}$. С обзиром да је x_0 тачка из $[-r, r]$, функција $f(x)$ је диференцијабилна на $[-r, r]$, а самим тим и на интервалу $(-R, R)$. ◄

Напомена 1.1 *За вежбу, радити задатке из збирке од 5. до 35. странице! Може се користити свака збирка која садржи задатке који се односе на градиво које је до сада предавано.*