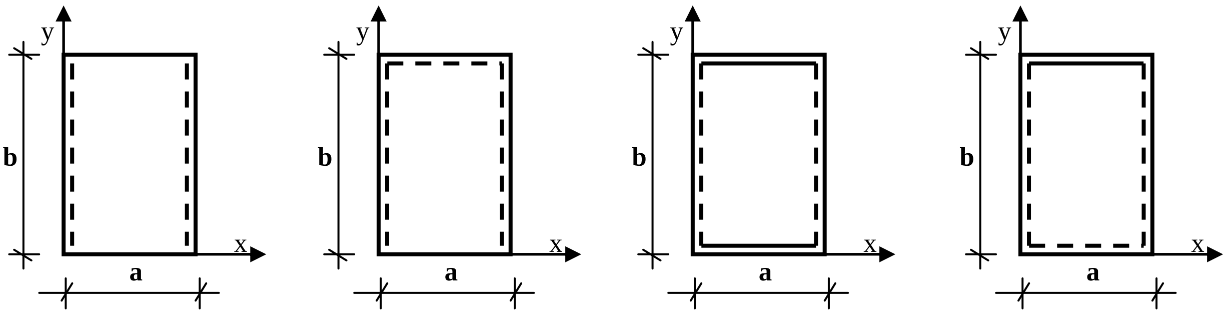
Pravougaone ploče sa parom paralelnih slobodno oslonjenih ivica

Moris – Levy-evo rešenje

Navier-ovo rešenje ima jednostavan oblik, ali redovi koji se pri tome dobijaju nisu uvek dovoljno brzo konvergentni za numeričko rešavanje. Osim toga ovo rešenje može da se koristi samo za slobodno oslonjenu ploču a ne i za drugr granične uslove.

Pravougaone ploče kod kojih su dve naspramne ivice (x=0 i x=a) slobodno oslonjene, mogu da se računaju na bazi tzv Moris – Levy-evog rešenja (1899) nezavisno od toga kakvi su granični uslovi na drugim dvema ivicama.



Ovo je rešenje za razliku od Navierovog dato jednostrukim redovima.razumljivo je da se ovim rešenjem može analizirati i ploča slobodno oslonjena na sve četiri strane.

Rešenje se traži u obliku:

$w=w_p+w_1,$

gde je: w_p partikularni integral diferencijalne jednačine $\Delta\Delta w = z/k$ koji zadovoljava granične uslove samo na stranama x=0 i x=a, a w_1 rešenje homogene diferencijalne jednačine $\Delta\Delta w_1 = 0$ koje u kombinaciji sa w_p zadovoljava sve granične uslove.

Rešenje w_1 traži se u obliku jednostrukog trigonometrijskog reda:

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin\frac{n\pi x}{a}, \qquad (1)$$

gde je Y_n funkcija samo promenljive y. Unošenjem ovog izraza u diferencijalnu jednačinu dobijamo za svaki član reda posle skraćivanja sa $\sin\frac{n\pi x}{a}$, običnu diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = 0 \text{ - homogena diferencijalna jednačina} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 Y_n \, sin\frac{n\pi x}{a}\\ \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} &= -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n'' \, sin\frac{n\pi x}{a}\\ \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} &= \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^{IV} \, sin\frac{n\pi x}{a}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Iz (3)→(2) => $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(Y_n^{IV} - 2\frac{n^2\pi^2}{a^2}Y_n'' + \frac{n^4\pi^4}{a^4}Y_n\right) sin\frac{n\pi x}{a} = 0, \tag{4}$$

$$sin\frac{n\pi x}{a} \neq 0 \Rightarrow Y_n^{IV} - 2\frac{n^2\pi^2}{a^2}Y_n'' + \frac{n^4\pi^4}{a^4}Y_n = 0 \tag{5}$$

Jednačina (5) je homogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima.

Tražimo rešenje u obliku eksponencijalne funkcije:

$$Y_n(y) = e^{ry} \tag{6}$$

Izvodi rešenja (6) su: $Y_n^{IV}(y) = r^4 e^{ry}$, $Y_n^{II}(y) = r^2 e^{ry}$ (7)

Iz (7)→(5) => $$\left[r^4 - 2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 r^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4\right] e^{ry} = 0 \tag{8}$$

Jednačina (8) je razlika kvadrata:

$$\left[r^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]^2 = 0. \tag{9}$$

Rešenja jednačine (9) su:

$$r_{1,2} = \pm\frac{n\pi}{a}, \; r_{3,4} = \pm\frac{n\pi}{a}.$$

Rešenje jednačine (5) biće:

$$Y_n(y) = A_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + B_n\frac{n\pi}{a} y e^{\frac{n\pi}{a}y} + C_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} + D_n\frac{n\pi}{a} y e^{-\frac{n\pi}{a}y} \tag{10}$$

$$Y_n(y) = \left[A_n + B_n\frac{n\pi}{a}y\right] e^{\frac{n\pi}{a}y} + \left[C_n + D_n\frac{n\pi}{a}y\right] e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

$$Y_n(y) = A_n \, cosh\frac{n\pi y}{a} + B_n\frac{n\pi y}{a} cosh\frac{n\pi y}{a} + C_n \, sinh\frac{n\pi y}{a} + D_n\frac{n\pi y}{a} sinh\frac{n\pi y}{a} \tag{11}$$

Iz (11)→(1) => rešenje homogenog dela

$$w_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n + B_n\frac{n\pi y}{a}\right) cosh\frac{n\pi y}{a} + \left(C_n + D_n\frac{n\pi y}{a}\right) sinh\frac{n\pi y}{a}\right] sin\frac{n\pi x}{a} \tag{12}$$

Partikularno rešenje se traži u obliku:

$$w_p(x,y)=\sum w_n \sin\frac{n\pi}{a}x \qquad (13)$$

W_n=const

$$\Delta\Delta w_p=\frac{z}{k} \qquad (14)$$

Izvodi (13) su:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^4 w_p}{\partial x^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 w_n \sin\frac{n\pi x}{a}\\
&\frac{\partial^4 w_p}{\partial x^2\partial y^2}=0\\
&\frac{\partial^4 w_p}{\partial y^4}=0
\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Kako ovo rešenje zadovoljava diferencijalnu jednačinu ploče to je:

$$(15)\rightarrow(14) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 w_n \sin\frac{n\pi x}{a}=\frac{z(x,y)}{k} \qquad (16)$$

$$z(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} z_n \sin\frac{n\pi x}{a} \Big/ \sin\frac{m\pi x}{a} \qquad (17)$$

$$\int_0^a z(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^a z_n \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}dx \qquad (18)$$

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}dx=\begin{cases}\frac{a}{2}, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$$

Za n=m biće

$$\int_0^a z(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}dx=\int_0^a z(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}dx=z_n\frac{a}{2}$$

$$z_n=\frac{2}{a}\int_0^a z(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}dx \qquad (19)$$

$$\text{Iz (16) i (17)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 w_n \sin\frac{n\pi x}{a}=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty} z_n \sin\frac{n\pi x}{a} \qquad (20)$$

$$w_n=\frac{z_n}{k\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4}=\frac{\frac{2}{a}\int_0^a z(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}dx}{k\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4}=\frac{2a^3}{k\pi^4 n^4}\int_0^a z(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}dx \qquad (21)$$

$$w_p=\frac{2a^3}{k\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\int_0^a z(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}dx \qquad (22)$$

Ravnomerno podeljeno opterećenje

$$z(x,y) = \text{const} = z_0$$

$$I = \int_0^a z(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}dx = z_0\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}dx = -z_0\frac{a}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{a}\Big|_0^a = -z_0\frac{a}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$n = 2,4,6\ldots \Rightarrow -z_0\frac{a}{n\pi}(\cos n\pi - 1) = 0$$

$$n = 1,3,5\ldots \Rightarrow -z_0\frac{a}{n\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{2a}{n\pi}z_0$$

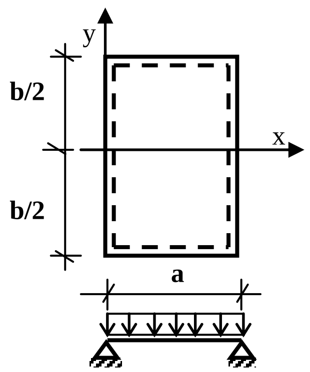
$$w_p = \frac{2a^3}{k\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\int_0^a \frac{2az_0}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{a}dx$$

$$w_p = \frac{4a^4 z_0}{k\pi^5}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^5}\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}dx$$

$$w_{x,y} = \frac{4a^4 z_0}{k\pi^5}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\left[\frac{1}{n^5}\left(\overline{A}_n + \overline{B}_n\frac{n\pi y}{a}\right)\cosh\frac{n\pi y}{a} + \left(\overline{C}_n + \overline{D}_n\frac{n\pi y}{a}\right)\sinh\frac{n\pi y}{a}\right]\sin\frac{n\pi x}{a}$$

Konstante $\overline{A}_n, \overline{B}_n, \overline{C}_n$ i $\overline{D}_n$ određuju se tako da budu zadovoljeni konturni uslovi duž strana $y = \pm\frac{b}{2}$.

Ploča slobodno oslonjena po konturi



Za ploču simetrično oslonjenu u odnosu na x osu možemo proizvoljno opterećenje rastaviti na njegov simetričan i antimetričan deo i za svaki deo opterećenja posebno tražiti rešenje. U tom slučaju za simetričan deo opterećenja biće **u izrazu za w_1 konstante uz neparne funkcije jednake nuli.**

Parne funkcije: $\cosh\frac{n\pi y}{a}, \frac{n\pi y}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}$

Neparne funkcije: $\sinh\frac{n\pi y}{a}, \frac{n\pi y}{a}\cosh\frac{n\pi y}{a}$

$$\cosh x = \text{chx} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \sinh x = \text{shx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Tako da je za datu ploču

$$W = \sum_n\left(\frac{4a^4 z_0}{k\pi^5}\cdot\frac{1}{n^5} + A_n\cosh\frac{n\pi y}{a} + D_n\frac{n\pi y}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}. \qquad (1)$$

Granični uslovi na ivicama $y = \pm \frac{b}{2}$ su:

$$\left.\begin{aligned} & w = 0 \\ & M_y = 0 \Rightarrow -k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Za n-ti član reda:

$$w = \left(\frac{4a^4 z_0}{k\pi^5} \cdot \frac{1}{n^5} + A_n \cosh\frac{n\pi y}{a} + D_n \frac{n\pi y}{a} \sinh\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\frac{n\pi x}{a}\ , \tag{3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \left(A_n \frac{n\pi}{a} \sinh\frac{n\pi y}{a} + D_n \frac{n\pi}{a} \sinh\frac{n\pi y}{a} + D_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 y \cosh\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\frac{n\pi x}{a} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \left(A_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \cosh\frac{n\pi y}{a} + D_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \cosh\frac{n\pi y}{a} + D_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \cosh\frac{n\pi y}{a} + D_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^3 y \sinh\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\frac{n\pi x}{a} \tag{5}$$

Granični uslovi daju dve jednačine za određivanje konstanti. Uvodimo oznake:

$$\alpha_n = \frac{n\pi b}{2a} \ \text{ i } \ S = \frac{4z_0}{k} \frac{a^4}{\pi^5}$$

Jednačina (3) za w=o i jednačina (5) za M_y=0 biće:

$$\left.\begin{aligned} & A_n \cosh\alpha_n + D_n \alpha_n \sinh\alpha_n + \frac{S}{n^5} = 0 \\ & A_n \cosh\alpha_n + D_n (2\cosh\alpha_n + \alpha_n \sinh\alpha_n) = 0 \end{aligned}\right\} n = 1,3,5,.. \tag{6}$$

Rešenjem jednačina (6) dobijamo:

$$\left.\begin{aligned} & A_n = -\frac{1}{n^5} \frac{\alpha_n \tanh\alpha_n + 2}{2\cosh\alpha_n} \cdot S \\ & D_n = \frac{1}{n^5} \frac{1}{2\cosh\alpha_n} \cdot S \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Tako da jednačina elastične površine glasi:

$$w = \frac{4a^4 z_0}{k\pi^5} \sum_n \frac{1}{n^5} \left(1 - \frac{\alpha_n \tanh\alpha_n + 2}{2\cosh\alpha_n} \cosh\frac{n\pi y}{a} + \frac{1}{2\cosh\alpha_n} \frac{n\pi y}{a} \sinh\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\frac{n\pi x}{a}\ .$$

Ploča uklještena na krajevima

Konturni uslovi su:

$$\left.\begin{aligned} & w = 0 \\ & \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Uslovne jednačine:

$$\left.\begin{aligned} & A_n \cosh\alpha_n + D_n \alpha_n \sinh\alpha_n + \frac{S}{n^5} = 0 \\ & A_n \sinh + D_n (\alpha_n \cosh\alpha_n + \sinh\alpha_n) = 0 \end{aligned}\right\} n = 1,3,5,..$$

Odakle je:

$$\left.\begin{aligned} A_n &= -\frac{1}{n^5}\frac{\alpha_n \cosh\alpha_n + \sinh\alpha_n}{\alpha_n + \sinh\alpha_n \cosh\alpha_n}\cdot S \\ D_n &= \frac{1}{n^5}\frac{\sinh\alpha_n}{\alpha_n + \sinh\alpha_n \cosh\alpha_n}\cdot S \end{aligned}\right\}$$

Pa je rešenje diferencijalne jednačine:

$$w = \frac{4a^4 z_0}{k\pi^5}\sum_n \frac{1}{n^5}\left\{1 - \frac{\sinh\alpha_n}{\alpha_n + \sinh\alpha_n \cosh\alpha_n}\left[\left(\alpha_n \mathrm{ctgh}\,\alpha_n + 1\right)\cosh\frac{n\pi y}{a} - \frac{n\pi y}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}\right]\right\}\sin\frac{n\pi x}{a}\,.$$