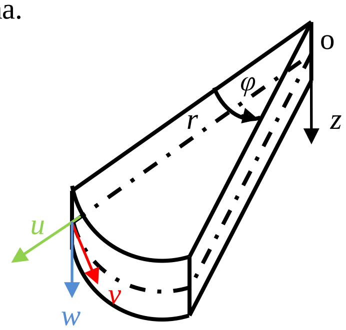
KRUŽNA PLOČA

Jednačina ploče u polarnim koordinatama

Transformacijom koordinata, moguće je iz izvedenih jednačina za pravougaonu ploču dobiti odgovarajuće jednačine za kružnu ploču. Za jednostavniju analizu problema koji se odnose na kružne ploče, posmatraćemo ploču u polarnim koordinatama. Diferencijalnu jednačinu ploče izvešćemo, dakle, u polarnim koordinatama.



Slika 1.

Polarne koordinate su:

r u pravcu radijusa ploče, ***φ*** u pravcu tangente na krug i ***z*** upravno na ravan ploče (Sl.1).

Komponentalna pomeranja (komponente ukupnog vektora pomeranja neke tačke u pravcima koordinatnih osa) su:

u- pomeranje u pravcu radijusa ploče,

v - pomeranje u pravcu tangente na koncentrični krug,

w - pomeranje u pravcu normale na srednju ravan.

Kao i u pravouglim koordinatama, shodno učinjenim hipotezama imamo:

$\varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$, odnosno $w = w(r,\varphi)$.

Takođe su i klizanja između pravaca r i z odnosno φ i z jednaka nuli:

$$\gamma_{zr} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0\,;\ \gamma_{z\varphi} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r\partial \varphi} = 0\,.$$

Integracijom kao i ranije imamo:

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial r}\,,\ v = -z\frac{\partial w}{r\partial \varphi}\,. \qquad (1)$$

Komponentalne deformacije, naponi i sile u preseku

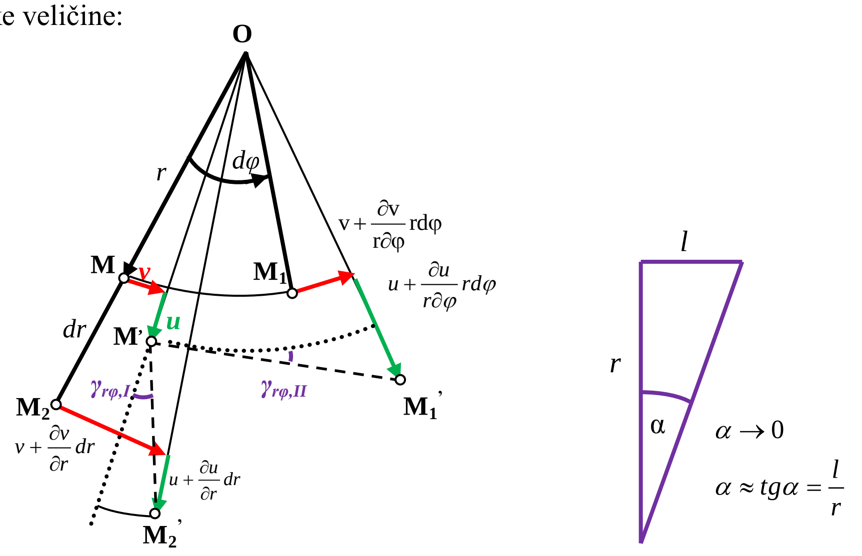
Izrazi za komponentalne deformacije putem pomeranja u izabranom polarnom koordinatnom sistemu biće drugačiji od onih na koje smo navikli u pravolinijskim koordinatama. Ove izraze ćemo izvesti posmatrajući deformaciju elementarnih linijskih elemenata u pravcima $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{\varphi}$, a to su luk MM_1 i duž MM_2 (Sl.2).

U ravni $Or\varphi$, tačaka M ima pomeranje $\boldsymbol{u}$ u pravcu radijusa ploče su i $\boldsymbol{v}$ u pravcu tangente na koncentrični krug, tako da posle deformacije tačka M prelazi u položaj M'.

Pomeranja tačku M_1, koja je na nekom rastojanju $rd\varphi$ od tačke M, će se razlikovati za priraštaje $\dfrac{\partial u}{rd\varphi}rd\varphi$ u pravcu $\boldsymbol{u}$, i za $\dfrac{\partial v}{rd\varphi}rd\varphi$ u pravcu $\boldsymbol{v}$.

Pomeranja tačke M_2, koja je na nekom rastojanju dr u pravcu r od tačke M, će se razlikovati za priraštaje $\dfrac{\partial u}{dr}dr$ u pravcu $\boldsymbol{u}$ i za $\dfrac{\partial v}{dr}dr$ u pravcu $\boldsymbol{v}$.

Razmotrićemo deformacijske veličine:



Slika 2.

Dilatacija u pravcu radijusa *r*:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta dr}{dr} = \frac{u + \dfrac{\partial u}{\partial r}dr - u}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r}\,. \tag{2}$$

Dilatacija u pravcu φ sastoji se iz dva dela. Prvi deo potiče od promene dužine luka $rd\varphi$ izazvane razlikom pomeranja v između tačaka M i M_1

$$\varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{v + \dfrac{\partial v}{r\partial\varphi}rd\varphi - v}{rd\varphi} = \frac{\partial v}{r\partial\varphi}\,. \tag{3}$$

Drugi deo dilatacije u pravcu φ nastaje usled pomeranja u. Tačke elementa $rd\varphi$, zanemarujući male veličine višeg reda, prelaze na krug poluprečnika $r+u$. Sada dužina $rd\varphi$ postaje $(r+u)d\varphi$. Razlika između nove i prvobitne dužine podeljena sa prvobitnom dužinom predstavlja dilataciju

$$\varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{(r+u)d\varphi - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{u}{r}\,. \tag{4}$$

Ukupna dilatacija u pravcu φ biće:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\partial v}{r\partial\varphi} + \frac{u}{r}. \tag{5}$$

Klizanje, odnosno promena prvobitno pravog ugla između pravaca *r* i *φ*.

$$\gamma_{r\varphi} = \gamma_{r\varphi}^{I} + \gamma_{r\varphi}^{II} = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial r}dr - \frac{v}{r}(r+dr)}{dr} + \frac{u + \frac{\partial u}{rd\varphi}rd\varphi - u}{rd\varphi} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{r\partial\varphi} \tag{6}$$

Pomeranja smo već razmotrili $u = -z\frac{\partial w}{\partial r}$, $v = -z\frac{\partial w}{r\partial\varphi}$.

Komponentalne deformacije. Unoseći u jednačine (2), (5) i (6) izraze za pomeranja (1), dobijamo:

$$\varepsilon_r = -z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \tag{7}$$

$$\varepsilon_\varphi = -z\left[\frac{\partial}{r\partial\varphi}\left(\frac{\partial w}{r\partial\varphi}\right) + \frac{\partial w}{r\partial r}\right] = -z\left(\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) \tag{8}$$

$$\gamma_{r\varphi} = -z\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{r\partial\varphi}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right] = -2z\left(\frac{\partial^2 w}{r\partial r\partial\varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right). \tag{9}$$

Komponentalni naponi i sile u preseku

Prema Hook-ovom zakonu veze između napona i deformacija su:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\varphi\right) \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\varphi + \nu\varepsilon_r\right) \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{E}{2\left(1-\nu^2\right)}(1-\nu)\gamma_{r\varphi} \end{aligned} \tag{10}$$

Momente savijanja M_r, M_φ i momet torzije $M_{r\varphi}$, dobijamo preko poznatih izraza za sile u presecima:

$$M_r = \int \sigma_r z dz\,,\ M_\varphi = \int \sigma_\varphi z dz \ \text{ i } \ M_{r\varphi} = \int \tau_{r\varphi} z d\varphi\,. \tag{11}$$

Ako izraze 7,8,9 unesemo u 10, a tako dobijene izraze za napone u izraze 11, i izvršimo integraciju, dobijamo izraze za sile u presecima:

$$\begin{aligned} M_r &= -k\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right] \\ M_\varphi &= -k\left[\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right] \\ M_{r\varphi} &= -k(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{r\partial r\partial\varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r}\right] \end{aligned} \tag{11*}$$

Uslovi ravnoteže i jednačina ploče

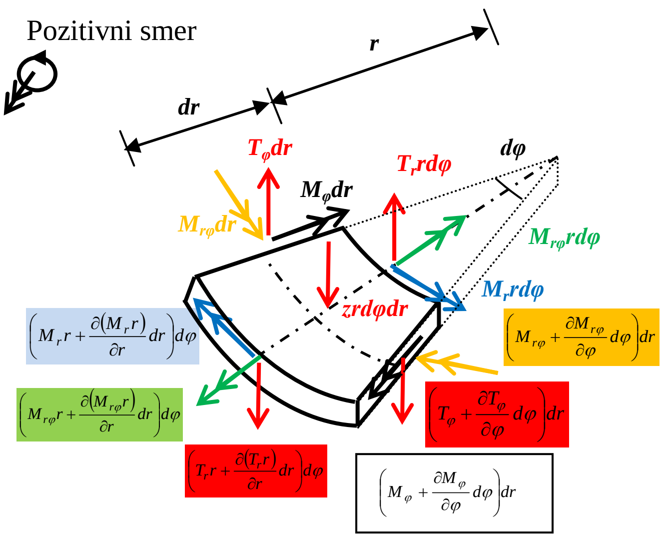
Da bismo dobili vezu između sila u preseku i opterećenja, posmatraćemo element kružne ploče na Sl.3, opterećen proizvoljnim opterećenjem $z(r,\varphi)$ koji je isečen sa dve ravni kroz centar ploče upravne na srednju površinu, koje zaklapaju ugao $d\varphi$ i dve cilindrične površine na odstojanju dr.

Na strani elementa $r=const$ deluje moment savijanja $M_r r d\varphi$, torzioni moment $M_{r\varphi} r d\varphi$ i transverzalna sila $T_r r d\varphi$ koja je na slici prikazana da deluje u pozitivnom smeru.

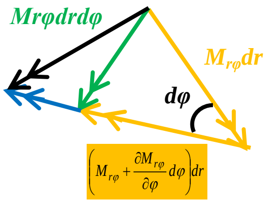
Na strani elementa $\varphi=const$ deluje moment savijanja $M_\varphi dr$, torzioni moment $M_{r\varphi} dr$ i transverzalna sila $T_r dr$ koja je na slici prikazana da deluje u pozitivnom smeru.

Pri prelasku na stranu $\varphi+d\varphi=const$ sile dobijaju priraštaj samo usled promene koordinate φ.

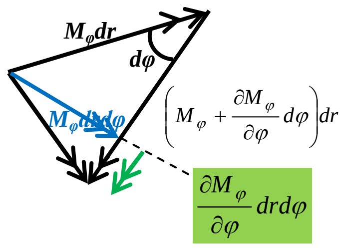
Za određivanje veze između sila u preseku i opterećenja možemo postaviti tri uslova ravnoteže.



Slika 3.a



Slika 3.c



Slika 3.b

Kao prvo posmatraćemo statički momenat svih sila oko tangente na krug $r+\frac{dr}{2}$ u težištu elementa.

Radijalni momenti daju rezultujući momenat:

$$\frac{\partial(M_r r)}{\partial \varphi} dr d\varphi \qquad \text{(I)}$$

Torzioni momenti daju:

$$\frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} dr d\varphi \cos\frac{d\varphi}{2} \qquad \text{(II)}$$

Tangencijalni momenti na stranama φ=const i φ+dφ=const daju, zanemarujući vrednost priraštaja $\frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi$, prema Sl. 3b rezultujući vektor u pravcu tangente:

$$-M_\varphi dr d\varphi \qquad \text{(III)}$$

Transverzalne sile T_r daju momenat:

$$-T_r r d\varphi dr \qquad \text{(IV)}$$

I ovde je vrednost priraštaja $\frac{\partial(T_r r)}{\partial r}dr$, kao mala veličina višeg reda, zanemarena u odnosu na $T_r r$.

Ako saberemo izraze (I), (II), (III) i (IV), vodeći računa da je za diferencijalno mali ugao $d\varphi$, $\cos d\varphi \approx 1$ i skratimo sa $drd\varphi$ dobićemo jednačinu:

$$\sum \mathrm{M_r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\mathrm{M_r r})}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathrm{M_{r\varphi}}}{\partial \varphi} - \mathrm{M_\varphi} - \mathrm{T_r r} = 0 \tag{12}$$

Na sličan način možemo postaviti uslov i da je statički moment oko radijusa koji prolazi kroz težište elementa jednak nuli. Treba voditi računa da i torzioni momenti na stranama φ=const i φ+dφ=const, prema Sl.3.c daju rezultujući moment $M_{r\varphi}drd\varphi$ oko pomenutog radijusa. Tako nam drugi uslov ravnoteže daje jednačinu:

$$\sum \mathrm{M_\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\mathrm{M_{r\varphi} r})}{\partial \mathrm{r}} + \frac{\partial \mathrm{M_\varphi}}{\partial \varphi} + \mathrm{M_{r\varphi}} - \mathrm{T_\varphi r} = 0 \tag{13}$$

Iz uslova da je zbir svih sila u pravcu z-ose jednak nuli sledi:

$$\sum \mathrm{z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\mathrm{T_r r})}{\partial \mathrm{r}} + \frac{\partial \mathrm{T_\varphi}}{\partial \varphi} + \mathrm{z_r} = 0 \tag{14}$$

Transverzalne sile

Ako iz jednačine (12) izrazimo T_r, a iz jednačine (13) T_φ, unoseći izraze za momente u funkciji pomeranja prema jednačinama (11), dobićemo:

$$\begin{aligned} T_r &= -k\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) \\ T_\varphi &= -k\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) \end{aligned} \tag{15}$$

Uvodeći oznaku:

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}$$

Izraze (15) možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned} T_r &= -k\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w) \\ T_\varphi &= -k\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\Delta w) \end{aligned} \tag{16}$$

Diferencijalna jednačina

Ako izraze (16) unesemo u treći uslov ravnoteže odnosno jednačinu (14), dobijamo:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w)\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\Delta w)\right] = \frac{z}{k}.$$

Odnosno:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) = \frac{z}{k} \tag{17}$$

Jednačina (17) predstavlja diferencijalnu jednačinu ploče u polarnom koordinatnom sistemu.