

9.4.2020 1

TEHNIČKA MEHANIKA I

8. PREDAVANJE

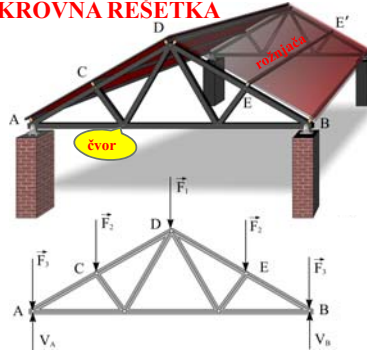
REŠETKASTI NOSAČI

Str 223-242 knjiga Poglavlje 10.3 – Rešetke u ravni

9.4.2020 4

Ravne rešetke se često koriste kod krovova i mostova.

KROVNA REŠETKA



Opterećenje krova se prenosi na rešetku u njenim čvorovima preko rožnjača

Proračun reakcija veza i sila u štapovima rešetke je problem ravnoteže sistema sila u ravni

Opterećenje je u ravni rešetke.

9.4.2020 2

ŠTA ĆEMO NAUČITI U OVOM POGLAVLJU?

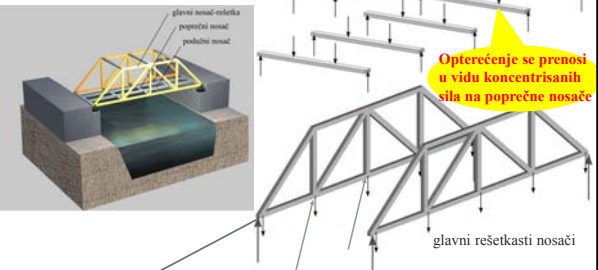
- Pored punih nosača, postoje i **rešetkasti**
- Ako svi štapovi rešetke leže u jednoj ravni, onda je rešetka **ravna**, u protivnom je **prostorna**
- Određivanje sila u štapovima rešetke primenom metode čvorova i metode preseka

Str 223-242 knjiga Poglavlje 10.3 – Rešetke u ravni

9.4.2020 5

MOST – glavni nosač je rešetka

Podužni nosači primaju opterećenje od kolovozne konstrukcije



Opterećenje se prenosi u vidu koncentrisanih sila na poprečne nosače

glavni rešetkasti nosači

Poprečni nosači su povezani sa glavnim rešetkastim nosačima u čvorovima na koje prenose opterećenje.

9.4.2020 3

REŠETKE U RAVNI

Rešetkastim nosačem – **rešetkom** se naziva kruta konstrukcija sastavljena od pravih štapova, koji su krajevima međusobno zglobno spojeni.

Ako svi štapovi rešetke leže u jednoj ravni, onda je rešetka **ravna**, u protivnom slučaju je **prostorna**.

9.4.2020 6

Karakteristike rešetki

Uslovi koji moraju da budu ispunjeni:

- Sva spoljašnja opterećenja deluju samo u čvorovima rešetke.
- Težine štapova rešetke se zanemaruju, jer je opterećenje koje oni nose veliko u poređenju sa njihovom težinom. Ako se težina elemenata rešetke uzima u obzir, uglavnom je zadovoljavajuće da se njihova težina nanese kao vertikalna sila, i to polovina težine u jedan čvor, a polovina u drugi.
- Štapovi su međusobno povezani idealnim zglobovima (zanemaruje se trenje u zglobovima – čvorovima rešetke).
- Oslonci su samo u čvorovima.
- Kod rešetke postoje samo pravi štapovi.

Mesta spajanja štapova se zovu **čvorovi rešetke**.

Sva spoljašnja opterećenja koja deluju na rešetku nanose se samo u čvorovima rešetke.

Rešetkasti nosač može biti vezan za podlogu pokretnim osloncem i nepokretnim osloncem, oslonci su u čvorovima.

Sila u štapu - aksijalna ili normalna sila je istog intenziteta i pravca, suprotnog smera od sile u čvoru

Zategnut štap

pritisnut štap

Za sile u štapovima uzima se znak **plus** ako je štap zategnut, a znak **minus** ako je pritisnut

Elementi rešetke:

Dijagonala

Gornji pojas

Donji pojas

Vertikala

Rešetka je kruta, ako se rastojanja između njenih čvorova ne mogu menjati.

Najjednostavniji primer nepromenljive figure je **trougao** (tri štapa međusobno povezana zglobovima)

Četvorougao ima promenljivu formu

Formiranje rešetke dodavanjem po dva štapa koji čine novi trougao

Rastojanja između bilo koja dva čvora rešetke moraju da budu konstantna

Na osnovu ovih pretpostavki, na svaki štap rešetke deluju samo **dve sile na krajevima štapa** i pri ravnoteži, na osnovu A 2, te sile moraju da budu istog intenziteta i pravca (u ovom slučaju pravac ose štapa) i suprotnog smera. Prema tome, štapovi rešetke mogu biti opterećeni silama koje zatežu ili pritiskaju štap.

svaki štap rešetke ponaša kao prost štap

Zategnut štap

pritisnut štap

U štapovima rešetke javljaju se **normalne sile**, ili **aksijalne sile**

Rešetka u ravni je kruta ako je sastavljena iz trouglova.

Kruta rešetka

Labilna rešetka

9.4.2020 13

Zavisnost između broja štapova s i broja čvorova n

Oznake:
 n- broj čvorova rešetke
 s- broj štapova rešetke

Polazi se od jednog trougla, kao osnovnog nosača, koji čine tri štapa i tri čvora. Da bi se formirao svaki sledeći čvor, potrebna su još po dva štapa.

$s = 3 + 2(n - 3) = 2n - 3$

$s < 2n - 3$ → Rešetka nije kruta
 $s > 2n - 3$ → Rešetka sa suvišnim štapovima – statički neodređena

9.4.2020 16

Određivanje reakcija veza kod rešetkastih nosača

Reakcije se određuju kao i kod punih nosača.

9.4.2020 14

$s = 3 + 2(n - 3) = 2n - 3$ Rešetkasti nosač je statički određen

$s > 2n - 3$ Rešetkasti nosač je statički neodređen – ima suvišne štapove

Rešetkasti nosač je statički neodređen – ima suvišne (prekobrajne) veze

9.4.2020 17

ODREĐIVANJE SILA U ŠTAPOVIMA KOD REŠETKASTIH NOSAČA

Postoje dve metode za određivanje sila u štapovima: **metoda čvorova** i **metoda preseka**, pri čemu one mogu biti analitičke i grafičke:

- METODA ČVOROVA:**
 - Analički, odnosno grafički postupak, koji se zasniva na korišćenju uslova ravnoteže sistema sučeljnih sila koje dejstvuju u jednom čvoru;
 - Kremonina grafička metoda.
- METODA PRESEKA:**
 - Riterova analitička metoda;
 - Kulmanova grafička metoda.

9.4.2020 15

Proračun rešetke se svodi na određivanje reakcija oslonaca i sila u štapovima rešetke.

Prvo se odrede reakcije oslonaca, posmatrajući rešetku kao kruto telo, a zatim se određuju sile u štapovima rešetke.

9.4.2020 18

ODREĐIVANJE SILA U ŠTAPOVIMA REŠETKE PRIMENOM METODE ČVOROVA

METODA RAVNOTEŽE ČVOROVA – ANALITIČKI POSTUPAK

Postupak se zasniva na **metodi isecanja čvorova**, postupno odvajajući od rešetke svaki čvor i posmatrajući ravnotežu štapova koji su vezani u tom čvoru. Polazi se od čvora u kome su vezana samo dva štapa, jer se radi o sistemu sučeljnih sila, a uslove ravnoteže čine dve jednačine:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0$$

9.4.2020 19

METODA RAVNOTEŽE ČVOROVA – GRAFIČKI POSTUPAK

Kako na svaki čvor rešetke deluje sistem sučelnih sila, dovoljan uslov da bi pojedinačni čvor rešetke bio u ravnoteži je da **poligon sila bude zatvoren**.

Polazi se od čvora u kome su vezana samo dva štapa.

Crta se onoliko poligona sila koliko ima čvorova i pri tome se sila u svakom štapu pojavljuje po dva puta. To je ujedno i glavni nedostatak ove metode.

9.4.2020 22

Za rešetkasti nosač opterećen silama $F_1=5\text{ kN}$ i $F_2=4\text{ kN}$, odrediti sile u svim štapovima primenom metode ravnoteže čvorova analitičkim i grafičkim putem.

$s=7$
 $n=5$
 $s = 2n-3$
 $7=2\cdot 5-3$
 Rešetka je statički određena

Jednačine ravnoteže glase:

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\rightarrow F_2 - H_B = 0, \\ \sum Y = 0 &\rightarrow V_A + V_B - F_1 = 0, \\ \sum M_B = 0 &\rightarrow -6V_A + 3F_1 - 3F_2 = 0, \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{aligned}} \right\} H_B = F_2 = 4\text{ kN}, \quad V_A = 0,5\text{ kN}, \quad V_B = 4,5\text{ kN}$$

Polazi se od čvora u kome su vezana samo dva štapa, štapovi se preseku blizu čvora i postave se unutrašnje sile u štapovima. Aksijalne sile su u pravcu štapa, a njihov smer je proizvoljan. **Najbolje je uvek pretpostaviti da je štap zategnut.**

9.4.2020 23

METODA RAVNOTEŽE ČVOROVA – ANALITIČKI POSTUPAK

$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$

Dirketno postavljanje uslova ravnoteže čvorova – analitički način (isecanje čvorova):

Čvor A:

$$\begin{aligned} (1) \sum X = 0 &\rightarrow -H_A + S_1 + 0.707S_3 = 0 \\ (2) \sum Y = 0 &\rightarrow V_A + 0.707S_3 = 0 \end{aligned}$$

Polazi se od čvora C (ili čvora E) na koji deluje sila $F_2=5\text{ kN}$ i sile u štapovima 1 i 2, odnosno S_1 i S_2

Jednačine ravnoteže za čvor C glase:

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\rightarrow S_2 + F_2 = 0, \\ \sum Y = 0 &\rightarrow -S_1 = 0, \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \end{aligned}} \right\} S_2 = -F_2 = -4\text{ kN}, \quad S_1 = 0$$

Štap 2 je **pritisnut**, dok je štap 1 nenapregnut – multi štap.

Čvor I:

$$\begin{aligned} (3) \sum X = 0 &\rightarrow -S_1 + S_2 + 0.707(S_5 - S_4) = 0 \\ (4) \sum Y = 0 &\rightarrow 0.707S_4 + 0.707S_5 = 0 \end{aligned}$$

Čvor B:

$$\begin{aligned} (5) \sum X = 0 &\rightarrow -0.707S_6 - S_2 = 0 \\ (6) \sum Y = 0 &\rightarrow 0.707S_6 + V_B = 0 \end{aligned}$$

Čvor II:

$$\begin{aligned} (7) \sum X = 0 &\rightarrow 0.707(S_7 - S_3) + S_4 = 0 \\ (8) \sum Y = 0 &\rightarrow -0.707(S_3 + S_4) = 0 \end{aligned}$$

Čvor III:

$$\begin{aligned} (9) \sum X = 0 &\rightarrow 0.707(S_6 - S_5) - S_7 - 4F = 0 \\ (10) \sum Y = 0 &\rightarrow -0.707(S_5 + S_6) = 0 \end{aligned}$$

10 jed; 10 nepoznatih: $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, H_A, V_A, V_B$

Sada se analizira sledeći čvor u kome su nepoznate sile u dva štapa. Kako je sila u štapu 1 određena iz ravnoteže čvora C, sledeći čvor je A (u čvoru D pored štapa 1 vezana su još tri štapa 3, 5 i 6). Presecaju se štapovi 1, 3 i 4 i postavljaju se sile S_3 i S_4 u tim štapovima, pri čemu treba voditi računa da je sila u štapu 1 sada suprotnog smera.

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\rightarrow S_4 + S_3 \cos 45^\circ = 0, \\ \sum Y = 0 &\rightarrow S_1 + S_3 \sin 45^\circ + V_A = 0, \end{aligned}$$

$$S_3 = -0,5\sqrt{2}\text{ kN}, \quad S_4 = 0,5\text{ kN}$$

Štap 3 je **pritisnut**, a štap 4 **zategnut**.

9.4.2020 25

Sledeći čvor je D, na koji deluje vertikalna sila F_1 . Sile u štapovima 2 i 3 su određene iz ravnoteže čvorova C i A, pa treba odrediti samo dve nepoznate sile u štapovima 5 i 6.

$\sum X = 0 \rightarrow S_5 + S_6 \cos 45^\circ - S_2 - S_3 \cos 45^\circ = 0,$
 $\sum Y = 0 \rightarrow -S_3 \sin 45^\circ - S_6 \sin 45^\circ - F_1 = 0.$

$S_6 = -4,5\sqrt{2} \text{ kN}, S_5 = 0.$

Štap 6 je **pritisnut**, a sila u štapu 5 je jednaka nuli.

9.4.2020 28

Maksvel Kremonin plan sila

Prikazana metoda ravnoteže čvorova za određivanje sila u štapovima rešetke, bilo analitičkim, bilo grafičkim putem, je jednostavna, ali ona postaje veoma složena ako rešetka ima veliki broj štapova, jer se svaka od sila u štapovima pojavljuje dva puta u jednačinama ravnoteže, tj. u poligonima sila. Sem toga, poligona sila ima onoliko koliko ima čvorova u rešetki.

Određivanje sila u štapovima rešetke grafičkim putem može se sprovesti daleko preglednije i brže konstrukcijom *Kremoninog plana sila*.

9.4.2020 26

Ostalo je da se odredi samo sila u štapu 7, što je moguće iz ravnoteže čvora B ili čvora E. Ovde je odabran čvor E, jer su u njemu vezana samo dva štapa. Kako se radi o jednoj nepoznatoj, dovoljna je jedna jednačina ravnoteže:

$\sum Y = 0 \rightarrow -S_7 = 0$

Štap 7 je **nenapregnut - nulti štap**.

Ako su u čvoru vezana dva štapa, a ne deluje nikakva spoljašnja sila, kao što je to, na primer, čvor E, oba štapa su nulta.

9.4.2020 29

Postupak pri crtanju Kremoninog plana sila:

- 1) odrediti reakcije oslonaca rešetke;
- 2) konstruisati u izabranoj razmeri od svih spoljašnjih sila koje deluju na rešetku (aktivnih sila i reakcija veza) zatvoreni poligon sila. Pri tome sile se moraju nanositi onim redom u kome se one nalaze na rešetki obilazeći oko rešetke u smeru obrtanja kazaljke na časovniku;
- 3) na poligonu spoljašnjih sila nacrtati poligone sila za sve čvorove rešetke, počinjući od čvora u kome su vezana samo dva štapa. Konstrukciju poligona svakog čvora treba započeti poznatim silama i zatim nanositi sve ostale onim redom kojim se na njih nailazi kada se oko čvora obilazi u smeru obrtanja kazaljke na časovniku;
- 4) dobijene smerove sila u štapovima ucrtati u planu rešetke, a ne u Kremoninom dijagramu;
- 5) formirati tablicu u kojoj se unose očitane vrednosti sila u štapovima sa odgovarajućim znakom (zategnuti +, pritisnuti -).

9.4.2020 27

Grafičkim putem metodom čvorova zadatak se rešava tako što se u usvojenoj razmeri za sile, polazeći od čvorova sa najviše dve nepoznate, formiraju zatvoreni poligoni sila, što je uslov da čvor bude u ravnoteži.

Usvoji se razmera za u_1 za dužine i nacrtaj rešetku, a zatim se u usvojenoj razmeri za sile u_2 formira trougao sila za prvi analizirani čvor, u ovom slučaju čvor C, na koji deluje sila F_2 i sile S_1 i S_2 .

$S_1 = u_1 \overline{ac} = 0, S_2 = u_1 \overline{bc} = -4 \text{ kN}$
 $S_3 = u_1 \overline{bc} = -0,7, S_4 = u_1 \overline{ca} = 0,5 \text{ kN}$
 $S_5 = u_1 \overline{cd} = 0, S_6 = u_1 \overline{de} = -6,4 \text{ kN}$

zategnut štاپ +
pritisnut štاپ -
 smer nanošenja sila u planu sila

štاپ	1	2	3	4	5	6	7
sila u kN +	0			0,5	0		0
sila u kN -	0	4	0,7		0	6,4	0

9.4.2020 31

ODREĐIVANJE SILA U ŠTAPOVIMA REŠETKE PRIMENOM METODE PRESEKA

Sile u štapovima rešetke se mogu odrediti presekom rešetke na određenom mestu, čime se ona podeli na dva zasebna dela, tako da se preseku najviše tri štapa.

Uticaj uklonjenog dela rešetke treba nadoknaditi silama u štapovima.

Odsečeni deo rešetke treba da bude u ravnoteži usled dejstva spoljašnjih sila koje deluju na taj deo rešetke – reakcija oslonaca i sila u presečenim štapovima.

9.4.2020 34

METODA KULMANA

Metoda Kulmana je grafička metoda.

Metoda Kulmana za određivanje sila u štapovima rešetke zasniva se na principu preseka rešetke i primeni geometrijskih uslova ravnoteže sistema sila u ravni, pri čemu se problem svodi na razlaganje sile u tri nekolinarna pravca. Presek rešetke se i u ovom slučaju vrši tako da se preseku najviše tri štapa.

Posmatra se levi deo rešetke dobijen zamišljenim presekom a-a štapova 1, 2 i 3. Sve sile koje deluju na posmatrani deo rešetke moraju biti u ravnoteži:

- spoljašnje sile \vec{F}_1, \vec{F}_2 i \vec{R}_A
- unutrašnje sile – sile u presečenim štapovima \vec{S}_1, \vec{S}_2 i \vec{S}_3

Odsečeni deo rešetke treba nacrtati u odabranoj razmeri u_1 za dužine i nacrtati sve sile koje deluju na taj deo rešetke, kao i reakcije oslonaca.

Sada treba u odabranoj razmeri u_2 za sile konstruisati poligon spoljašnjih sila i reakcija veza koje deluju na levi deo i odrediti njihovu rezultantu \vec{R}_1 , kao i položaj te rezultante konstrukcijom verižnog poligona.

9.4.2020 32

METODA RITERA

Metoda Ritera je analitička metoda.

Na odsečeni deo rešetke (presek kroz tri štapa) treba primeniti **treći oblik uslova ravnoteže** – da je zbir momenata svih spoljašnjih sila koje deluju na odsečeni deo rešetke, reakcija oslonaca i sila u presečenim štapovima u odnosu na tri tačke, koje ne leže na istoj, pravoj jednak nuli.

Za momentne tačke biraju se tačke u kojima se seku pravci presečenih štapova. Na ovaj način se eliminišu po dve nepoznate sile u štapovima i dobijaju tri jednačine, od kojih je svaka samo sa po jednom nepoznatom. U slučaju da su dva štapa paralelna (seku se u beskonačnosti), primenjuje se drugi oblik uslova ravnoteže.

9.4.2020 35

rezultanta sila koje deluju na odsečeni deo rešetke – završna strana poligona sila;

zatvoreni poligon sila u štapovima i rezultante spoljašnjeg opterećenja;

Deo rešetke sa rezultantom svih spoljašnjih sila koje deluju na ovaj deo rešetke i Kulmanovom pravom;

Rezultanta \vec{K} sila \vec{S}_1 i \vec{S}_2

9.4.2020 33

Metoda Ritera

$\sum M_{O_1} = 0, \sum M_{O_2} = 0, \sum M_{O_3} = 0,$

$\sum M_{O_1} = 0, \sum M_{O_2} = 0, \sum Y = 0.$

9.4.2020 36

NEKI SPECIJALNI SLUČAJEVI RAVNOTEŽE ČVORA

Ako čvor rešetke čine samo dva štapa a na čvor ne deluje spoljašnja sila ili reakcija veze štapani su nulti.

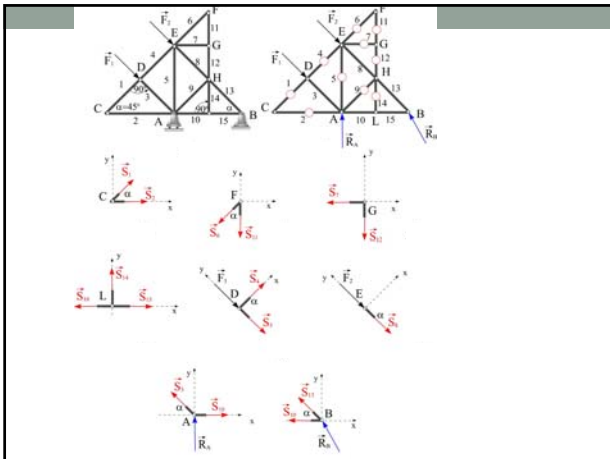
$$\left. \begin{matrix} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0. \end{matrix} \right\} \Rightarrow S_1 = 0, S_2 = 0.$$

Ako čvor rešetke, koji nije opterećen spoljašnjom silom ili reakcijom veze, čine tri štapa, od kojih su dva istog pravca, onda je treći štap nulti.

$$\left. \begin{matrix} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0. \end{matrix} \right\} \Rightarrow S_1 = S_3, S_2 = 0.$$

Ako čvor rešetke čine dva štapa i na njega deluje spoljašnja sila ili reakcija veze koja je u pravcu jednog od njih, tada je štap koji nije u pravcu sile nulti.

$$\left. \begin{matrix} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0. \end{matrix} \right\} \Rightarrow S_1 = P, S_2 = 0.$$



9.4.2020 40

Najvažnije u ovom poglavlju

- Kako se određuju sile u štapovima rešetke primenom metode čvorova
- Kako se određuju sile u štapovima rešetke primenom metode preseka
- Nulti štapovi

