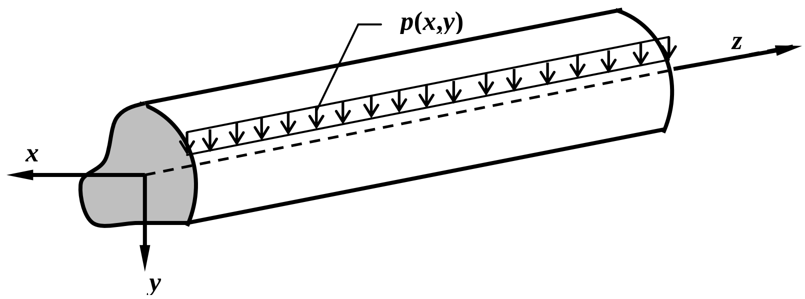
Ravna deformacija

Zamislimo veoma dugačko telo cilindričnog oblika (gravitaciona brana, potporni zid itd.), videti Sl.1. Problem takvog tela, opterećenog poprečnim silama (aktivnim i reaktivnim) jednako raspoređenim po dužini, je u pogledu naprezanja veoma sličan, a u pogledu matematičke formulacije analogan roblem ploče napregnute u svojoj ravni.



Sl.1 Veoma dugačko telo cilindričnog oblika,
opterećeno poprečnim silama

Komponente pomeranja

Za ovakvo telo možemo pod dejstvom napred opisanog opterećenja pretpostaviti da tačke poprečnog preseka, koji je dovoljno udaljen od osnova, ostaju u ravni poprečnog preseka i posle deformacije. Iz toga sledi da će tačke poprečnog preseka imati samo pomeranja u ravni *xy*, i ova pomeranja biće nezavisna od položaja tačke u pogledu na *z*-osu.

$$\begin{aligned} &w = 0 \\ &u = u(x,y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ &v = v(x,y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Dilatacije i klizanja. U skladu sa učinjenim pretpostavkama, imamo:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} &\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ &\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ &\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Na osnovu Hukovog zakona nalazimo:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = 0 \Rightarrow \sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu^2\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_x\left(1-\nu^2\right) - \nu\sigma_y\left(1+\nu\right)\right] \tag{3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu^2\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_y\left(1-\nu^2\right) - \nu\sigma_x\left(1+\nu\right)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\,, \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Za razliku od problema naprezanja u ravni, napon σ_z se ne može zanemariti, ali se, na osnovu pretpostavke da nema dilatacije u z pravcu i Hukovog zakona, može izraziti preko napona σ_x i σ_y.

Kako su sve komponente deformacije nezavisne od z to će i sve ostale veličine biti nezavisne od koordinate z, a njihovi prvi izvodi po z jednaki nuli.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = 0$$

Navier-ovi uslovi ravnoteže se svode na:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \tag{4.2}$$

gde su X i Y zapreminske sile.
Saint-Venant-ov uslov o poklapanju deformacija isti je kao i u slučaju ploče napregnute u svojoj ravni:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad \textbf{uslov kompatibilnosti} \tag{5}$$

U ovu jednačinu se unose izrazi za dilatacije i klizanje u funkciji napona:

$$\left(1-\nu^2\right)\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu(1+\nu)\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \left(1-\nu^2\right)\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu(1+\nu)\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = 2(1+\nu)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad / \div (1+\nu)$$

$$(1-\nu)\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + (1-\nu)\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2}\right) - \nu\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right) = 2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{6}$$

Jednačine (4) i (6) predstavljaju sistem jednačina kojima je definisan problem ravne deformacije.

Ako Navier-ovu jednačinu (4.1) diferenciramo po x, a jednačinu (4.2) po y i saberemo ih, dobijamo:

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0\Rightarrow\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=-2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{7}$$

Sabiranjem jednačina (6) i (7) dobijamo:

$$(1-\nu)\Delta(\sigma_x+\sigma_y)+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0\,. \tag{8}$$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$ - Laplasov operator

Uvodi se naponska funkcija (Airy-jeva funkcija) **F** takva da je

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=-\tau_{xy}\,. \tag{9.1}$$

Za zapreminske sile pretpostavićemo da su konzervativne, odnosno da se mogu izraziti kao izvodi funkcije potencijala

$$X=-\frac{\partial U}{\partial x}\ \text{ i }\ Y=-\frac{\partial U}{\partial y}\,. \tag{9.2}$$

Za izvodjenje diferencijalne jednačine koristimo jednakosti (4), (8) i (9). Iz uslova ravnoteže nalazimo:

$$(4)\Rightarrow\quad \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_x-\frac{\partial^2F}{\partial y^2}-U\right)=0\Rightarrow\sigma_x=\frac{\partial^2F}{\partial y^2}+U\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_y-\frac{\partial^2F}{\partial x^2}-U\right)=0\Rightarrow\sigma_y=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+U\end{aligned} \tag{10}$$

Kada (10) unesemo u (8) dobijamo:

$$(1-\nu)\Delta\left(\frac{\partial^2F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+2U\right)-\frac{\partial^2U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2U}{\partial y^2}=0$$

$$(1-\nu)\Delta\Delta F+2(1-\nu)\Delta U-\Delta U=0\,.$$

Diferencijalna jednačina ravne deformacije biće:

$$\boxed{\Delta\Delta F+\frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta U=0}$$

Ako je X=Y=0 ili X= const i Y=const diferencijalna jednačina se svodi na:

$$\Delta\Delta F = 0,$$

i poklapa se sa odgovarajućom diferencijalnom jednačinom ploče napregnute u svojoj ravni.

Za $\nu = 0$ ravan problem i problem ravne deformacije se ne razlikuju u pogledu naprezanja bez obzira na prirodu zapreminskih sila.

Razlika između ova dva problema je u naponu σ_Z za koji se kod ravnog naprezanja pretpostavlja da je jednak nuli, a u slučaju ravne deformacije postoji i dat je izrazom $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$.