LJUSKE

UVOD

1. Definicije i osnovne pretpostavke

Površinski sistemi nosača čija srednja površina ima jednostruku ili dvostruku krivinu nazivaju se ljuske. Ljuskom nazivamo površinsku konstrukciju ograničenu sa dve krive površi na ostojanju *h* za koje pretpostavljamo da je malo u odnosu na ostale dimenzije. Geometrijsko mesto tačaka, između tih površi, jednako udaljenih od ovih površi, nazivamo srednjom površi date ljuske. Kod ovih nosača ne može se razdvojiti problem savijanja od problema pločastog nosača, pa je zato proračun ljuski složeniji od proračuna ravnih površinskih nosača - ploča.

U izučavanju ljuski smatra se da je materijal izotropan i da se pokorava generalisanom Hook-ovom zakonu, tj. da važe sledeće pretpostavke:

1) debljina ljuske je mala u odnosu na druge dimenzije ljuske;
2) ugibi su mali u odnosu na debljinu ljuske;
3) linijski element koji je bio pre deformacije upravan na srednju površ ljuske ostaje i posle deformacije upravan na deformisanu srednju površ;
4) naponi upravni na srednju površ tako su mali da se mogu zanemariti.

Na osnovu ovih pretpostavki izvodi se teorija ljuski. Koliko će uvedene pretpostavke važiti zavisi od toga kakva je debljina ljuske u odnosu na ostale dimenzije.

Prema debljini ljuske se dele na:

- tanke,
- srednje debele,
- debele.

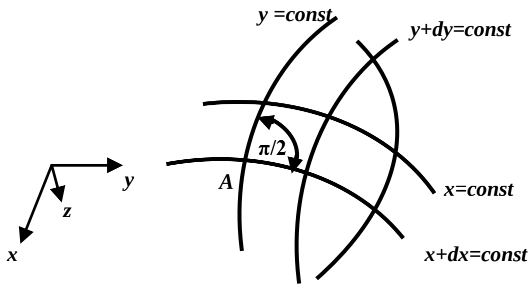
Sve pretpostavke dosta dobro važe za tanke ljuske, za srednje debele i debele ljuske nisu dovoljno tačne, mada jasna granica u pogledu debljine ljuske ne postoji. U građevisnkoj praksi se najviše primenjuju tanke ljuske i njih analiziramo i proučavamo. Sračunavanje uticaja u presecima ljuske je složenije u odnosu na ploču.

Primeni ljuski u građevinarstvu doprinela su izvanredna svojstva armiranog betona koji je otvorio široko polje za primenu racionalnih konstruktivnih sistema. Ljuske se kao konstrukcije ili kao elementi konstrukcije izrađuju od različitih materijala i primenjuju u mnogim oblastima tehnike. U građevinarstvu je i čelik kao materijal za ljuske relativno široko zastupljen u konstrukcijama kao: rezervoari, cevovodi i sl. Građevinske konstrukcije u obliku ljuski–ljuskaste konstrukcije su ekonomične ako su tanke i ako rade u membranskom naponskom stanju.

2. Sile u presecima ljuske

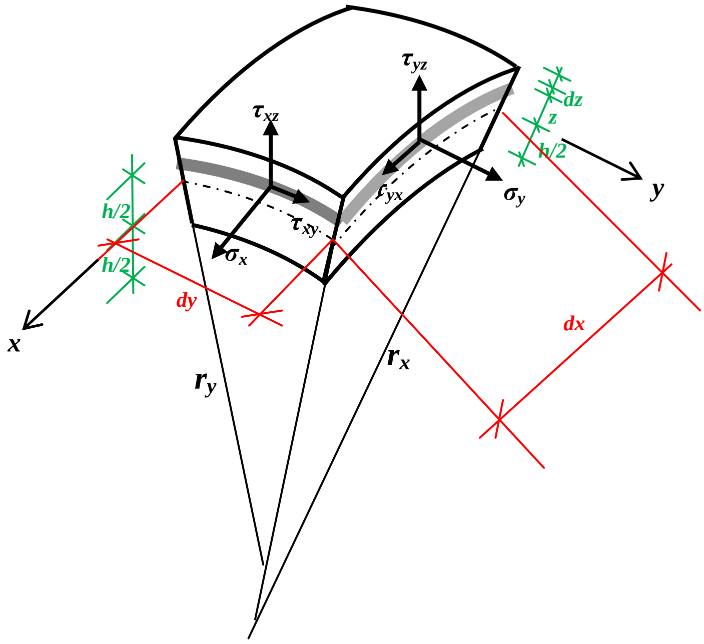
Da bismo govorili o silama koje se javljaju u ljusci, posmatramo jedan element ljuske, u okolini tačke A ograničen sledećim presecima:

x = const. i $x+dx$ = const.
y = const. i $y+dy$ = const.



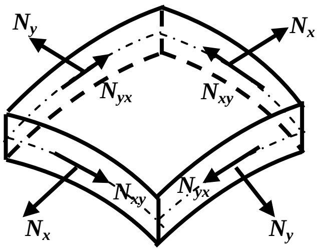
Slika 1.

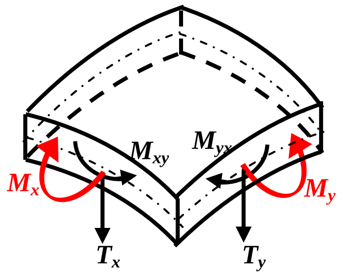
Element je tako isečen da su ravni upravne na srednju površinu ljuske, a x i y linije su međusobno ortogonalne. Posmatramo element isečen u okolini tačke A presecima upravnim na srednju površinu. Sa r_x i r_y su obeleženi poluprečnici glavnih krivina. Redukcioni moment i rezultantu svih sila koje deluju u poprečnim presecima u odnosu na srednju površinu ljuske, mereno na jedinicu dužine odgovarajuće koordinatne linije (x ili y) razložićemo na komponente u pravcima tangenti na koordinatne linije x, y i u pravcu normale z.
Ako je dužina srednje površi jedinica, onda toj jedinici dužine srednje površi elementa dela ljuske odgovara jedna nova dužina koja iznosi: $1+\frac{z}{r_x}$ duž strane y=const. Jedinična dužina srednje površi ljuske na strani x=const. je $1+\frac{z}{r_y}$.



Slika 2.

Elementarna površina je jednaka $(1+\frac{z}{r_x})dz$.Ukupna sila (preko šrafirane površine na Sl.2) iznosi $\sigma_y(1+\frac{z}{r_x})dz$, gde su $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ naponi na jediničnoj površini. Ovde se podrazumeva da je dx=1, tj.dužina elementa srednje površine ljuske. Ako dužina elementa srednje površine ljuske nije jedinica, nego dx onda je ukupna sila jednaka $\sigma_y(1+\frac{z}{r_x})dzdx$.
Kada se izvrši redukcija svih ovih sila na srednju površinu ljuske dobijaju se sledeće sile: normalne sile, sile smicanja, transverzale sile, momenti savijanja i torzioni momenti.
M_x odnosno M_y je pozitivan ako zateže donju stranu ljuske i leži u ravni z, a deluje u ravni za koju je y=const, odnosno x=const.





Slika 3. Slika 4.

Sile u presecima na jedinicu dužine srednje površine ljuske date su izrazima:

Za presek x=const.

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x (1+\frac{z}{r_y})dz$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} (1+\frac{z}{r_y})dz$$

$$M_x = -\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z(1+\frac{z}{r_y})dz$$

(1)

$$M_{xy} = -\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z(1+\frac{z}{r_y})dz$$

$$T_x = -\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} (1+\frac{z}{r_y})dz$$

Za presek y=const.

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y (1+\frac{z}{r_x})dz$$

$$N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} (1+\frac{z}{r_x})dz$$

$$M_y = -\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z(1+\frac{z}{r_x})dz \qquad (1)$$

$$M_{yx} = -\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z(1+\frac{z}{r_x})dz$$

$$T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} (1+\frac{z}{r_x})dz$$

I ovde je, obzirom da ose x i y čine pravougli sistem koordinata

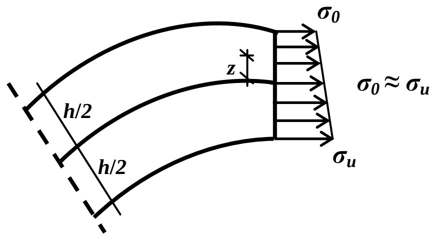
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} , \qquad (2)$$

ali sile N_{xy} i N_{yx}, odnosno torzioni momenti M_{xy} i M_{yx} su jednaki samo u slučaju kada je ispunjen uslov:

$$r_x = r_y. \qquad (3)$$

Kako širine bočnih strana elementa ljuske zavise od z ne mogu komponenete napona koje deluju paralelno srednjoj površini i ako se računaju na osnovu pretpostavke (3) biti linearno raspoređene po debljini ljuske.

No, kako su članovi koji sadrže odnose $\frac{z}{r_x}$ odnosno $\frac{z}{r_y}$ vrlo mali, jer je h a prema tome i z vrlo malo u poređenju sa poluprečnikom krivine, površine preseka se mogu smatrati pravougaonicima i tada se raspodela napona može smatrati linearnom po debljini ljuske.



Slika 5.

Veličina ovih komponentalnih napona realno je zavisna od ostojanja z posmatrane tačke od srednje površine. Osa z usmerena je u pravcu spoljne normale ljuske.

3. Membransko stanje napona

U mnogim slučajevima pretpostavja se da su naponi koji deluju paralelno srednjoj površini ravnomerno raspodeljeni po debljini ljuske h i da su stoga nezavisni od z. Tada se, pri integraciji izraza za presečne sile, naponi mogu staviti ispred znaka integrala. Rešenja integrala su u tom slučaju:

$$N_x = \sigma_x \int_{-h/2}^{h/2} (1+\frac{z}{r_y})dz = \sigma_x h$$

$$N_y = \sigma_y \int_{-h/2}^{h/2} (1+\frac{z}{r_x})dz = \sigma_y h$$

$$N_{xy} = \tau_{xy} \int_{-h/2}^{h/2} (1+\frac{z}{r_y})dz = \tau_{xy} h$$

$$N_{yx} = \tau_{yx} \int_{-h/2}^{h/2} (1+\frac{z}{r_x})dz = \tau_{yx} h$$

$$M_x = -\sigma_x \int_{-h/2}^{h/2} (1+\frac{z}{r_y})zdz = -\sigma_X \frac{h^3}{12r_y} = -\sigma_x h(\frac{h^2}{12r_y})$$

(4)

$$M_y = -\sigma_y \int_{-h/2}^{h/2} (1+\frac{z}{r_x})zdz = -\sigma_y \frac{h^3}{12r_x} \tag{4}$$

$$M_{xy} = -\tau_{xy} \int_{-h/2}^{h/2} (1+\frac{z}{r_y})zdz = -\tau_{xy} \frac{h^3}{12r_x}$$

$$M_{yx} = -\tau_{yx} \int_{-h/2}^{h/2} (1+\frac{z}{r_x})zdz = -\tau_{yx} \frac{h^3}{12r_y}$$

$$T_x = -\tau_{xy} \int_{-h/2}^{h/2} (1+\frac{z}{r_y})dz = -\tau_{xy} h$$

$$T_y = -\tau_{yx} \int_{-h/2}^{h/2} (1+\frac{z}{r_x})dz = -\tau_{yx} h$$

S obzirom na pretpostavku (1), članovi $\frac{h^3}{12r_y}$, odnosno $\frac{h^3}{12r_x}$ su mali tako da se mogu zanemariti pa ostaju presečne sile:

$$N_x=\sigma_x h, \qquad N_y=\sigma_y h, \qquad N_{xy}=N_{yx}= \tau_{xy} h= \tau_{yx} h$$

$$T_x= \tau_{xy} h, \qquad T_y= \tau_{yx} h \tag{5}$$

Zbog ravnoteže elemenata ljuske moraju i transverzalne sile T_x i T_y biti jednake nuli, pa jedine sile koje napadaju element ljuske u membranskoj teoriji su normalne sile N_x i N_y i sile smicanja $N_{xy}=N_{yx}$. Ove sile deluju paralelno srednjoj ravni i često se zovu membranske sile, a teorija ljuski zasnovana na zanemarivanju napona **membranskom teorijom.** Pri membranskom stanju napona (stanje napona oslobođeno od savijanja) srednja površina ljuske trpi promenu krivine, ali naponi koji se usled toga javljaju su tako mali da se mogu zanemariti.

Sa matematičkog gledišta rešavanja membranska teorija je jednostavnija od teorije savijanja ljuski. Broj presečnih sila smanjuje se na 4, tj.zanemarujući u izrazima za N_{xy} i N_{yx} članove $\frac{z}{r_x}$ i $\frac{z}{r_y}$, u stvari svodi se na svega 3 nepoznate presečne sile: N_x, N_y i $N_{xy}=N_{yx}$, pa se, obzirom da se broj uslova ravnoteže svodi na 3, mogu odrediti sve presečne sile. U slučaju statički odeđenog oslanjanja ljuske sile se mogu proračunati iz samih uslova ravnoteže i na taj način zadatak postaje statički određen.

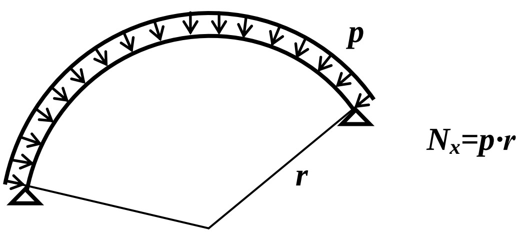
Naponsko stanje ljuske sme se smatrati približno slobodnim od savijanja (to je specijalan slučaj naprezanja) samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

- ljuska treba da ima glatko promenljivu, neprekinutu srednju površinu, odnosno srednja površina ljuske treba da bude neprekidna funkcija koordinata;
- debljina ljuske treba da bude konstantna ili kontinualno promenljiva;
- opterećenje ljuske mora da bude blago promenljivo i bez skokova;
- oslanjanje ljuske treba da bude takvo da je omogućeno slobodno pomeranje krajeva ljuske u pravcu normale na srednju površinu;
- sile koje deluju na krajevima ljuske treba da leže u tangencijalnoj ravni srednje površine.

Kod građevinskih konstrukcija često nije moguće ostvariti ove uslove, posebno u pogledu oslanjanja i opterećenja.

Membransko naprezanje ljuske najbolje ćemo razjasniti analizom lučnog linijskog nosača. Za luk čija je osovina deo kruga za radijalno opterećenje javljaju se samo normalne sile, tj. $N_x=p{\cdot}r$. Naprezanje luka je membransko jer se ne javljaju momenti ni transverzalne sile.

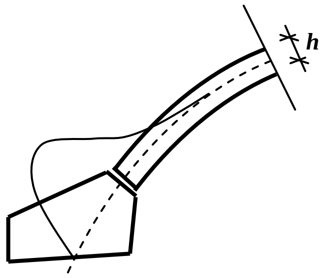
Za razliku od linijskih sistema kod kojih samo jedno opterećenje izaziva membransko naprezanje, kod ljuski je to obično moguće za više vrsta (konstelacija) opterećenja.



Slika 6.

Membranska teorija,u izvesnom broju slučajeva daje zadovoljavajuće tačna, tj. prihvatljiva rešenja za praksu. Međutim, u slučajevima kada se rešenja po membranskoj teoriji ne mogu prihvatiti, ona mogu biti prvi korak za opšte rešenje po teoriji savijanja –momentnoj teoriji.

Bilo kako da konstruišemo ljusku u blizini oslanjanja mora se dobro obezbediti u delu naleganja gde se naglo menja visina ljuske i naprezanje nije više membransko jer postoje i momenti i transverzalne sile ali se javljaju samo u uskoj lokalnoj zoni i brzo isčezavaju. Znači, samo u lokalnoj zoni oslanjanja postoji remećenje membranskog stanja naprezanja.



Slika 7.

MEMBRANSKA TEORIJA ROTACIONIH LJUSKI

Rotaciona ljuska je takva konstrukcija čija srednja površina nastaje obrtanjem neke ravne krive (meridijana) oko prave koja leži u njenoj ravni (osa kupole ili rezervoara). Tačke srednje površine određene su odgovarajućom meridijanskom ravni koja je utvrđena uglom v i uglom φ koji normala na površinu gradi sa osom rotacije meridijana. Poluprečnike glavnih krivina (meridijanske i poprečne krivine) označavamo sa r_1 i r_2 a poluprečnik paralelnog kruga sa r_o.

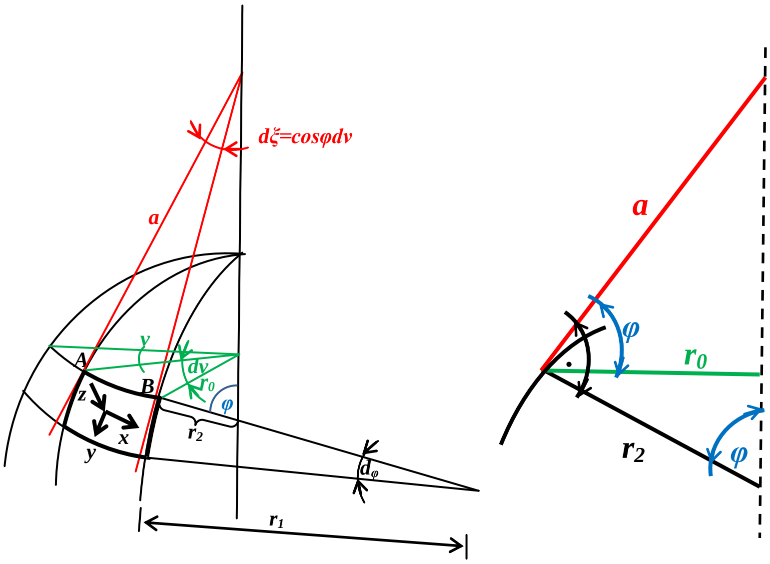
Posmatraćemo element rotacione ljuske određen uglovima v i $v+dv$ (meridijanima) i paralelnim krugovima određenim uglovima φ i $\varphi+d\varphi$. Bočne površine ovog elementarnog dela stoje upravno na srednju površinu ljuske.

$$\overline{AB} = a d\xi$$

$$\overline{AB} = r_0 dv$$

$$a d\xi = r_0 dv$$

$$d\xi = \frac{r_0}{a} dv = \cos\varphi dv$$



Slika 8.

Sa slike se ispisuju sledeće geometrijske veze:

$$r_o dv = r_2 \sin\varphi \, dv, \quad r_o dv = a d\xi, \quad d\xi = \cos\varphi \, dv. \qquad (6)$$

1. Uslovi ravnoteže

Da bismo ispisali uslove ravnoteže potrebno je da na izdvojenom elementu ljuske (Sl.9) nanesemo sve sile. Sile na jedinicu dužine srednje površine ljuske označavamo sa: N_φ, N_v, $N_{\varphi v}=N_{v\varphi}$. Kontunualno raspoređeno opterećenje p po jedinici srednje površine razložimo u komponente X, u pravcu tangente na paralelni krug, Y u pravcu tangente na meridijan i Z pravcu normale na srednju površinu. X i Y su pozitivne u smeru porasta uglova v i φ , Z pozitivna kada je usmerena prema unutrašnjosti luka.

Naponsko stanje ljuske promenljivo je od tačke do tačke, pa se stoga i sile na stranama elementa razlikuju za diferencijalne priraste. U pravcu v (tangente na paralelni krug) sila N_v prirasta $\frac{\partial N_v}{\partial v}dv$ u preseku $v+dv$ u odnosu na silu N_v u preseku v=const. U preseku φ=const. dakle u pravcu tangente na meridijansku krivu deluje sila $N_{\varphi v}dv$. U preseku $\varphi+d\varphi$=const ne prirasta samo sila N_φ već i poluprečnik r_0 tako da prirast iznosi $\frac{\partial (N\varphi r_0)}{\partial \varphi}d\varphi$. Ovo isto važi i za sile smicanja $N_{v\varphi}$ odnosno $N_{\varphi v}$.

U membranskoj teoriji rotacionih ljuski broj nepoznatih sila je tri i to: N_φ , N_v i $N_{\varphi v} = N_{v\varphi}$.

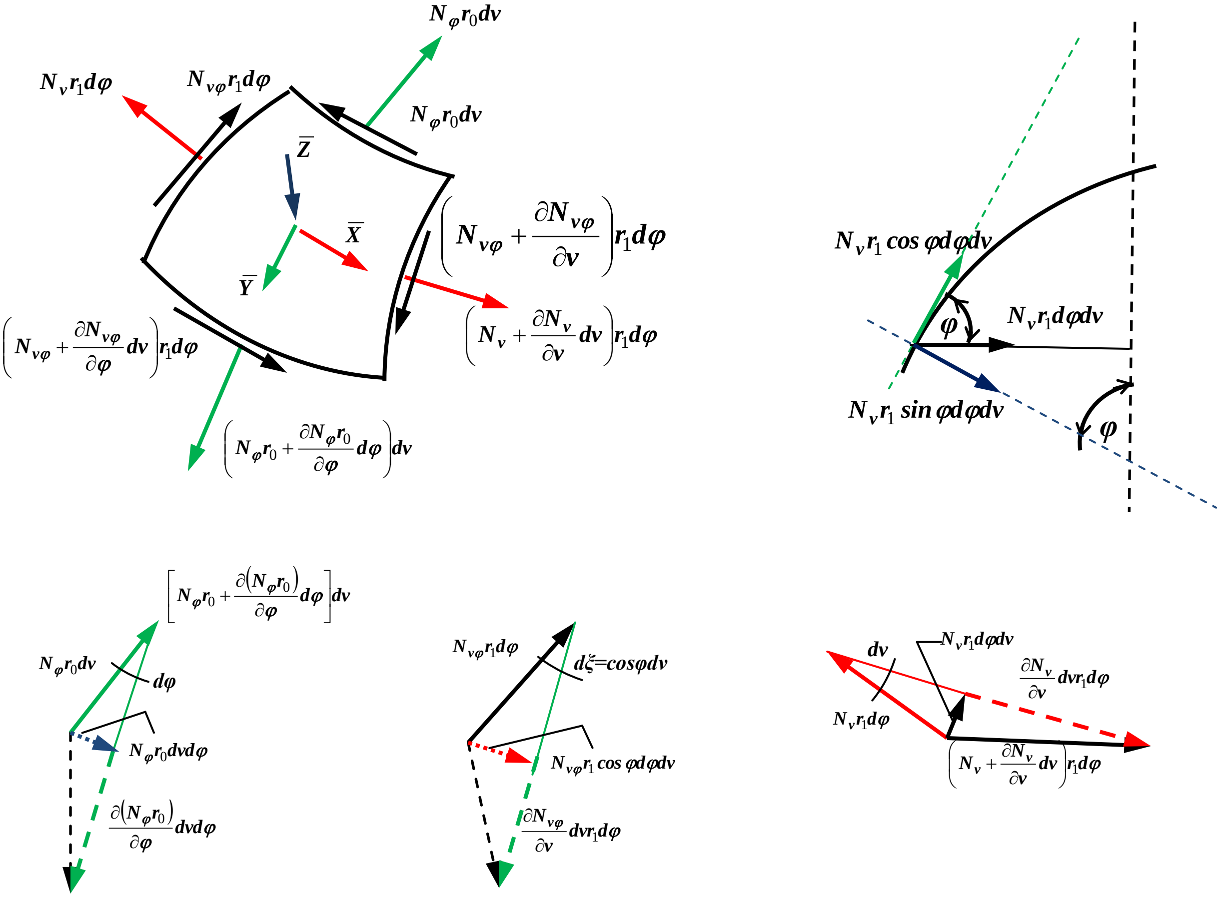
Za njihovo određivanje stoje nam na raspolaanju tri uslova ravnoteže elementarnog dela ljuske i to:

1) Zbir komponenti svih sila u pravcu tangente na paralelni krug mora biti jednak nuli;

2) Zbir komponenti svih sila u pravcu tangente na meridijan mora biti nula;

3) Zbir komponenti svih sila u pravcu normale na površ mora biti nula.

$$\overline{X} = X r_0 r_1 dv d\varphi$$
$$\overline{Y} = Y r_0 r_1 dv d\varphi$$
$$\overline{Z} = Z r_0 r_1 dv d\varphi$$



Slika 9.

$$\sum X = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(N_{\varphi v} r_0)}{\partial \varphi} d\varphi dv + \frac{\partial N}{\partial v} r_1 d\varphi dv + N_{v\varphi} r_1 \cos\varphi d v d\varphi + X r_0 r_1 d\varphi dv = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial(N_\varphi r_0)}{\partial \varphi} d\varphi dv + \frac{\partial N_{v\varphi}}{\partial v} r_1 d\varphi dv + N_v r_1 \cos\varphi d\varphi dv + Y r_0 r_1 d\varphi dv = 0 \qquad (7)$$

$$\sum Z = 0 \quad \Rightarrow N_\varphi r_0 d\varphi dv + N_v r_1 \sin\varphi d\varphi dv + Z r_0 r_1 d\varphi dv = 0$$

Ako jednačine (7) podelimo sa $d\varphi dv$ dobijamo:

$$\frac{\partial(N_{\varphi v} r_0)}{\partial \varphi} + \frac{\partial N}{\partial v} r_1 + N_{v\varphi} r_1 \cos\varphi + X r_0 r_1 = 0$$

$$\frac{\partial(N_\varphi r_0)}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{v\varphi}}{\partial v} r_1 + N_v r_1 \cos\varphi + Y r_0 r_1 = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_v}{r_2} = -Z$$

Treća jednačina iz sistema jednačina (8) dobijena je u ovom obliku unošenjem izraza $r_0 = r_2 sin\varphi$ u treću jednačinu sistema jednačina (7) i deljenjem cele jedačine sa $r_1 r_2 sin\varphi d\varphi dv$.