PUNE KRUŽNE PLOČE SA ROTACIONO SIMETRIČNIM OPTEREĆENJEM

Diferencijalna jednačina problema rotaciono simetrične kružne ploče sa rotaciono simetričnim opterećenjem je izvedena. To je jednačina u kojoj je nepoznata funkcija ugiba:

$$\frac{d^4W}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3W}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2W}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dW}{dr}=\frac{z(r)}{K}$$

Ta jednačina ima tačno rešenje u zatvorenom obliku, W(r), koje je takođe dato na prethodnim prezentacijama. Zadaci iz ove oblasti se svode na određivanje integracionih konstanti koje figurišu u funkciji ugiba, i to iz odgovarajućih graničnih uslova.

Kod ovih ploča postoje od sila u presecima samo M_r, M_φ, T_r, dok su $M_{r\varphi}=M_{\varphi r}=T_\varphi=0$. Izrazi za sile u presecima su takođe izvedeni, i to u obliku:

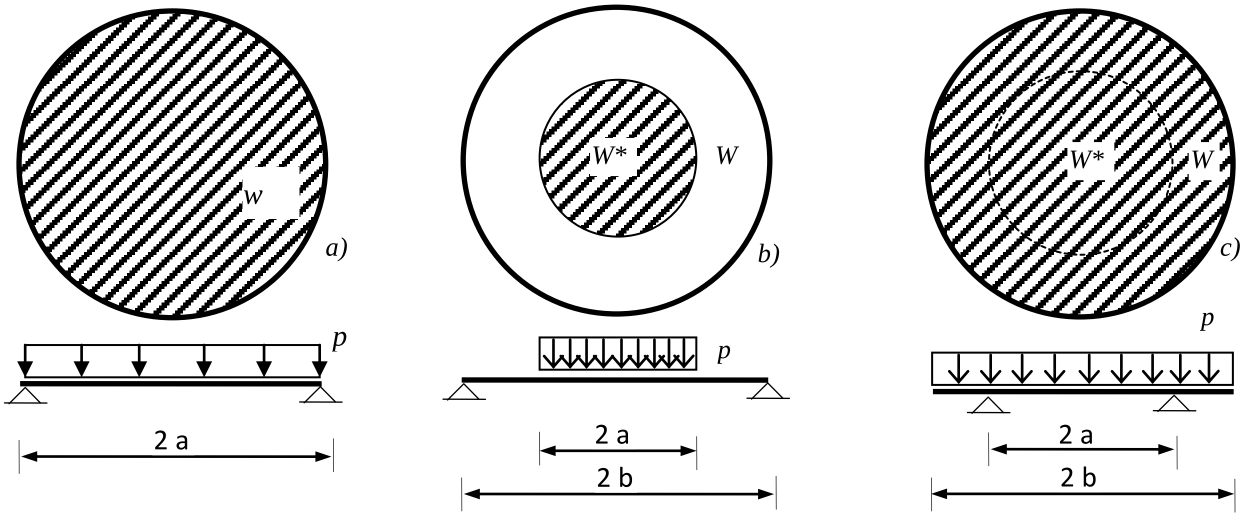
$$M_r=-K\left(\frac{d^2W}{dr^2}+\nu\frac{1}{r}\frac{dW}{dr}\right)$$

$$M_\varphi=-K\left(\frac{1}{r}\frac{dW}{dr}+\nu\frac{d^2W}{dr^2}\right).$$

$$T_r=-K\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2W}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW}{\partial r}\right)$$

U konkretnom zadatku treba u te izraze uneti odgovarajuće izvode funkcije ugiba, a nakon određivanja vrednosti integracionih konstanti, uneti te vrednosti u izraze. Na taj način se dobijaju izrazi za sile u presecima u funkciji od poluprečnika, odnosno od $\rho=\frac{r}{a}$, pomoću kojih mogu da se izračunaju vrednosti presečnih sila u izabranim presecima, i nacrtaju dijagrami.

POSTUPAK REŠAVANJA ZADATAKA



Sl.1 Pune kružne ploče različito oslonjene i/ili opterećene

- **Funkcija/e ugiba**

- Potrebno je odabrati uporedni poluprečnik. Ako je to poluprečnik ***a***, biće $\rho = \frac{r}{a}$.

- Bira se od već izvedenih, ili se izvodi funkcija ugiba, koja predstavlja rešenje diferencijalne jednačine, **u zavisnosti od površinskog opterećenja** na ploči. Kod ploče na Sl.1.b) treba pretpostaviti dve različite funkcije ugiba zbog različitog opterećenja na dva dela ploče, a kod ploče na Sl.1.c), zbog oslonca. Funkcije ugiba mogu da se obeleže na različite načine (W_1, W_2 ili W, W*), samo je bitno da različite funkcije imaju različite oznake i različite konstante.

1) Ako na ploči **nema površinskog opterećenja** onda je funkcija ugiba oblika:

$W = C_1 + C_2\rho^2 + C_3 \ln\rho + C_4\rho^2 \ln\rho$. (Konstante takođe mogu da budu drugačije obeležene.)

Izvodi ove funkcije po ***r*,** a u funkciji od $\rho = \frac{r}{a}$ (jer je pogodnije za izračunavanje), koji će nam biti potrebni, su:

$$\frac{dW}{dr} = \frac{1}{a}\left(2C_2\rho + C_3\frac{1}{\rho} + 2C_4\rho\ln\rho + C_4\rho^2\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{a}\left(2C_2\rho + \frac{C_3}{\rho} + 2C_4\rho\ln\rho + C_4\rho\right)$$

$$\frac{d^2W}{dr^2} = \frac{1}{a^2}\left(2C_2 - C_3\rho^{-2} + 2C_4\ln\rho + 2C_4\rho\frac{1}{\rho} + C_4\right) = \frac{1}{a^2}\left(2C_2 - \frac{C_3}{\rho^2} + 2C_4\ln\rho + 3C_4\right)$$

$$\frac{d^3W}{dr^3} = \frac{1}{a^3}\left(-(-2)C_3\rho^{-3} + 2C_4\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{a^3}\left(\frac{2C_3}{\rho^3} + \frac{2C_4}{\rho}\right).$$

2) Ako na ploči **ima ravnomernog površinskog opterećenja *p*=const**, funkcija ugiba će biti oblika:

$$W = \frac{pa^4}{64K}\left(\rho^4 + C_1 + C_2\rho^2 + C_3\ln\rho + C_4\rho^2\ln\rho\right),$$

a njeni izvodi po r su:

$$\frac{dW}{dr} = \frac{pa^4}{64K}\frac{1}{a}\left(4\rho^3 + 2C_2\rho + C_3\frac{1}{\rho} + 2C_4\rho\ln\rho + C_4\rho^2\frac{1}{\rho}\right) = \frac{pa^3}{64K}\left(4\rho^3 + 2C_2\rho + \frac{C_3}{\rho} + 2C_4\rho\ln\rho + C_4\rho\right)$$

$$\frac{d^2W}{dr^2} = \frac{pa^4}{64K}\frac{1}{a^2}\left(12\rho^2 + 2C_2 - C_3\rho^{-2} + 2C_4\ln\rho + 2C_4\rho\frac{1}{\rho} + C_4\right) = \frac{pa^2}{64K}\left(12\rho^2 + 2C_2 - \frac{C_3}{\rho^2} + 2C_4\ln\rho + 3C_4\right)$$

$$\frac{d^3W}{dr^3} = \frac{pa^4}{64K}\frac{1}{a^3}\left(24\rho - (-2)C_3\rho^{-3} + 2C_4\frac{1}{\rho}\right) = \frac{pa}{64K}\left(24\rho + \frac{2C_3}{\rho^3} + \frac{2C_4}{\rho}\right).$$

3) Ako na ploči **deluje promenljivo rotaciono simetrično površinsko opterećenje**, potrebno je izvesti izraz za funkciju ugiba, kako je objašnjeno u prezentaciji za predavanje ove nedelje.

4) U slučaju da je puna ploča data kao na Sl.1.a), rešenje diferencijalne jednačine za jednako raspodeljeno opterećenje biće u obliku:

$$w=\frac{pa^4}{64k}\left(\rho^4+C_1+C_2\rho^2+C_3\ln\rho+C_4\rho^2\ln\rho\right).$$

Ugib ploče u tački gde je r = 0, odnosno ρ = 0, svakako ima neku konačnu vrednost. Kako ln 0 → -∞, zaključujemo da funkcija ugiba može da ima konačnu vrednost u centru jedino ako su koeficijenti uz $ln\rho$ jednaki nuli, odnosno funkcija ugiba je u tom slučaju:

$$w=\frac{pa^4}{64k}\left(\rho^4+C_1+C_2\rho^2\right).$$

Iz **USLOVA KONAČNOSTI UGIBA U CENTRU PLOČE** sledi da su konstante uz $ln\rho$ jednake nuli kod svih punih ploča u funkciji koja važi na delu ploče gde je centar. **Dakle, kod svake pune ploče, funkcija ugiba koja važi na delu gde je centar ploče ima samo 2 nepoznate konstante.**

Konstante koje figurišu u funkcijama ugiba se određuju iz graničnih uslova. Koliko ima nepoznatih konstanti, toliko graničnih uslova treba postaviti. Tako se dobija onoliko linearnih algebarskih jednačina koliko ima nepoznatih konstanti, tako da postoji jednoznačno rešenje zadatka.

- ## Granični uslovi

Granični uslovi kod kružne ploče mogu biti konturni i prelazni uslovi. Svi graniči uslovi postavljaju se u odgovarajućem preseku, koji je određen veličinom ρ, koja pak zavisi od poluprečnika r , i važe samo na tom mestu.

a) Konturni uslovi

Konturni uslovi definišu se na konturi, za određenu vrednost promenljive veličine ρ. Kako je ploča rotaciono simetrična uvek posmatramo desni deo ploče, jer su tako izvedeni izrazi za sile u presecima. Razmotrićemo različite slučajeve konture.

Slobodna kontura (slobodan kraj)

U tom slučaju moment savijanja Mr i transverzalna sila Tr jednaki su nuli. U slučaju da na tom mestu deluju moment M ili sila F onda je $Mr=M$ i $Tr=F$, pri čemu vodimo računa o njihovom znaku. Moment je pozitivan ako zateže donju stranu. Transverzalna sila je pozitivna ako teži da okrene odsečeni deo ploče u smeru kazaljke na satu, gledajući deo desno od centra u preseku.

$$\begin{matrix}1) & M_r=0\\ 2) & T_r=0\end{matrix}\quad \text{ili} \quad \begin{matrix}1) & M_r=M\\ 2) & T_r=T\end{matrix}\ .$$

Slobodno oslonjena kontura

Konturni uslovi biće:

$$\begin{matrix}1) & w=0\\ 2) & M_r=0\end{matrix}\quad \text{ili} \quad \begin{matrix}1) & w=0\\ 2) & M_r=M\end{matrix}\ ,$$

ako je kontura opterećena raspodeljenim momentom M koji zateže donju stranu, ili Mr= -M ako zateže gornju stranu.

Uklještena kontura

Konturni uslovi biće:

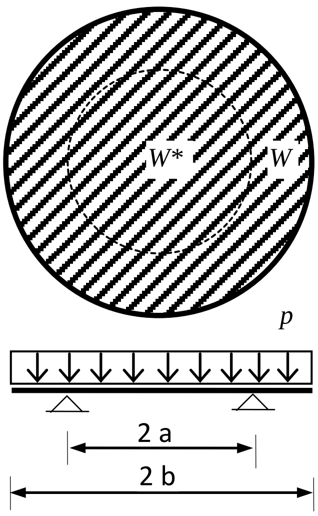
$$1)\quad w = 0$$

$$2)\quad \frac{dw}{dr} = 0 \, .$$

Konturne uslove treba postaviti na konturama ploča sa Sl.1.a) i Sl.1.b).

b) Prelazni uslovi

Prelazni uslove treba zadovoljiti kod kružnih ploča koje imaju prepust (Sl.1.c), kao i kod punih kružnih ploča koje na koncenričnim delovima kruga imaju različito opterećenje (Sl.3.b).



Sl.2 Puna kružna ploča sa prepustom

Kod ploča sa prepustom (Sl.2) prelazne uslove postavljamo na mestu oslonca.

Razlikuju se dve funkcije ugiba i to:

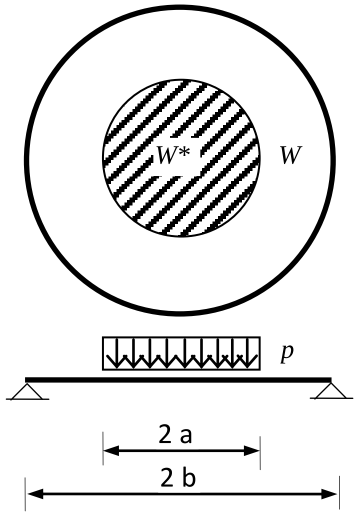
- jedna funkcija ugiba, ovde označena sa W^*, koja važi na delu ploče $0 < r < a$ i
- druga funkcija ugiba, ovde označena sa W, koja važi na delu ploče $a < r < b$.

Prelazni uslovi se postavljaju za preseke gde je $r=a$, tj. $\rho = \frac{r}{a} = \frac{a}{a} = 1$ i sledećeg su oblika:

$$1)\quad W = 0 \qquad\qquad 3)\quad \frac{dW}{dr} = \frac{dW^*}{dr} \, .$$

$$2)\quad W^* = 0 \qquad\qquad 4)\quad M_r = M_r^*$$

Uslovi (1) i (2) se postavljaju jer su to preseci nad osloncem, pa obe funkcije ugiba treba da imaju vrednost nula, a uslovi (3) i (4) jer su preseci beskonačno blizu levo i desno od oslonca kruto vezani, pa ugao obrtanja tih preseka (nagib) treba da je jednak, dok su momenti savijanja jednaki iz uslova ravnoteže momenata tog diferencijalno malog elementa.



Sl.3 Puna kružna ploče delimično opterećena

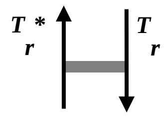
Kod punih poča, kao na Sl.3, na kojima na jednom delu ploče deluje površinsko opterećenje, gde je rešenje jednačine označeno sa W^*, a na drugom delu ploče nema opterećenja, gde je rešenje jednačine označeno je sa W, prelazni uslovi biće:

1) $w = w^*$

2) $\dfrac{dw}{dr} = \dfrac{dw^*}{dr}$

3) $M_r = M_r^*$

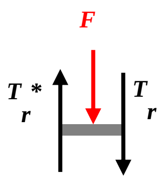
4) $T_r = T_r^*$.



Sl. 4.

Četvrti uslov dobijamo kada postavimo uslov ravnoteže diferencijalno malog prstena na mestu gde postavljamo granični uslov (prelazni uslov u ovom slučaju). Transverzalne sile pretpostavimo da su pozitivne (videti Sl.4). Ako bi na tom mestu delovalo linijsko opterećenje, potrebno je i njega uzeti u obzir (videti Sl.5), pa je u tom slučaju četvrti uslov:

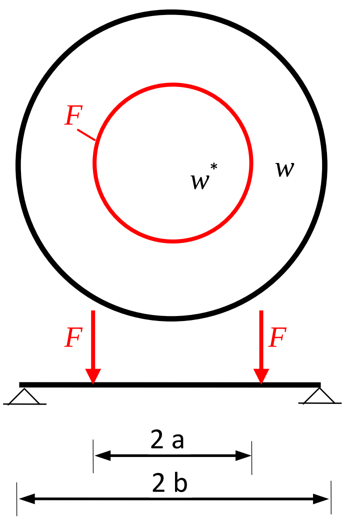
4) $T_r^* - T_r - F = 0$



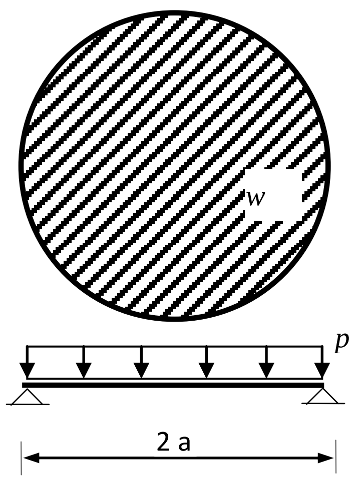
Sl. 5.

Slično ploči sa Sl.3 treba rešavati i ploču sa Sl.6., gde je takođe potrebno predvideti dve različite funkcije ugiba, i to jednu na krugu unutar linijskog opterećenja i drugu na prstenu između opterećenja i oslonca, jer jedino na taj način može da se uzme u obzir linijsko opterećenje, i to preko prelaznog uslova. Obratiti pažnju da u funkciji ugiba figuriše samo površinsko opterećenje, a u ovom zadatku nema površinskog opterećenja.

Sl.6



Sl.7



c) U slučaju da je puna ploča data kao na Sl.7, rešenje diferencijalne jednačine za jednako raspodeljeno opterećenje bi bilo u obliku:

$$w = \frac{pa^4}{64k}\left(\rho^4 + C_1 + C_2\rho^2 + C_3 \ln\rho + C_4\rho^2 \ln\rho\right).$$

Granični uslovi postavljaju se na mestu $r=a$, pa ako je za uporedni poluprečnik izabrano a , biće na tom mestu $\rho=1$, jer je $\rho = \frac{r}{a} = \frac{a}{a} = 1$. Granični uslovi su:

1) $w = 0$
2) $M_r = 0$

Ugib ploče u tački gde je $r = 0$, odnosno $\rho = 0$, svakako ima neku konačnu vrednost. Kako $\ln 0 \to -\infty$, zaključujemo da funkcija ugiba može da ima konačnu vrednost u centru jedino ako su koeficijenti uz $\ln\rho$ jednaki nuli, odnosno funkcija ugiba je u tom slučaju:

$$w = \frac{pa^4}{64k}\left(\rho^4 + C_1 + C_2\rho^2\right).$$

Konstante C_1 i C_2 se izračunavaju iz dva konturna uslova koja smo prethodno postavili.

- ## Jednačine za određivanje konstanti

Jednačine se formiraju tako što se u granične uslove unesu odgovarajući izrazi za ugib ili neku od sila u presecima, i to za vrednost ρ za koju važi granični uslov. Ove jednačine će biti u funkciji od nepoznatih integracionih konstanti, i dobiće se sistem od onoliko algebarskih linearnih jednačina koliko ima nepoznatih konstanti. Rešavanjem ovog sistema jednačina dobijaju se vrednosti konstanti za konkretni zadatak.

- ## Dijagrami ugiba i sila u presecima

Kod svih ploča koje smo razmatrali, posle određivanja konstanti sledi unošenje tih vrednosti u izraze za ugibe i sile u presecima, koji će na kraju biti samo u funkciji od ρ. Pomoću tih izraza će moći da se izračunaju vrednosti svake od funkcija u izabranim presecima i nacrtaju odgovarajući dijagrami.