1 Векторска функција једне промењиве

Компоненте тачке (x, y, z) праве, задате у параметарском облику, изражавају се као линеарне функције $x(u) = x_0 + lu$, $y(u) = y_0 + mu$, $z(u) = z_0 + nu$ промењиве $u \in \mathbb{R}$, што је пресликавање облика $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$. Дакле, сваком реалном броју u одговара вектор $\boldsymbol{r}(u) = (x_0 + lu, y_0 + mu, z_0 + nu)$, чиме је одређена **векторска функција** једне промењиве. Уколико бар једна од компонената тачке (x, y, z) није линеарна функција промењиве u, векторска функција $\boldsymbol{r}(u) = (x(u), y(u), z(u))$ описује криву у простору, односно њен лук $\overset{\frown}{AB}$, при чему је $u \in [\alpha, \beta]$, док је $A = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$, $B = (x(\beta), y(\beta), z(\beta)))$.

Када се одреде ове функције, извршена је **параметризација** криве. Једна крива може да има више параметризација. Крива може бити раванска, дакле у целини припада једној равни. У општем случају крива није раванска.

1.1 Гранична вредност векторске функције једне промењиве

Све оно што важи у вези с граничном вредношћу и непрекидношћу овог пресликавања, важи и у случају векторске функције.

Дефиниција 1.1 *Векторска функција $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$ конвергира граничном вектору $\boldsymbol{r}_0$ када $u \to u_0$, ако за сваки $\varepsilon > 0$ постоји $\delta(\varepsilon) > 0$, тако да је $\|\boldsymbol{r}(u) - \boldsymbol{r}_0\| < \varepsilon$ за свако $u \neq u_0$ за које је апсолутна вредност $|u - u_0| < \delta(\varepsilon)$, где је са $\|\boldsymbol{r}\|$ означен интезитет вектора $\boldsymbol{r}$.*

Из аналитичке геометрије знамо да је $\|\boldsymbol{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Нека је дата векторска функција $\boldsymbol{r}(u) = (x(u), y(u), z(u))$ и вектор $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Тада је

$$\|\boldsymbol{r}(u) - \boldsymbol{r}_0\| = \sqrt{(x(u) - x_0)^2 + (y(u) - y_0)^2 + (z(u) - z_0)^2}.$$

Из следећих неједнакости

$$|x(u) - x_0| \leqslant \|\boldsymbol{r}(u) - \boldsymbol{r}_0\|,\ |y(u) - y_0| \leqslant \|\boldsymbol{r}(u) - \boldsymbol{r}_0\|,\ |z(u) - z_0| \leqslant \|\boldsymbol{r}(u) - \boldsymbol{r}_0\|,$$

на основу дефиниције, следи да $\lim\limits_{u \to u_0} \boldsymbol{r}(u) = \boldsymbol{r}_0$ постоји, ако и само ако постоји свака од граничних вредности $\lim\limits_{u \to u_0} x(u) = x_0$, $\lim\limits_{u \to u_0} y(u) = y_0$, $\lim\limits_{u \to u_0} z(u) = z_0$. Такође, из неједнакости

$$|\, \|\boldsymbol{r}(u)\| - \|\boldsymbol{r}_0\| \,| \leqslant \|\boldsymbol{r}(u) - \boldsymbol{r}_0\|,$$

произилази да, уколико постоји гранична вредност $\lim\limits_{u \to u_0} \boldsymbol{r}(u) = \boldsymbol{r}_0$, тада постоји гранична вредност

$$\lim_{u \to u_0} \|\boldsymbol{r}(u)\| = \|\boldsymbol{r}_0\|. \tag{1}$$

За овако дефинисану граничну вредност векторске функције важе следећа правила.

Теорема 1.1 *Ако постоје граничне вредности* $\lim\limits_{u\to u_0} \boldsymbol{r}_1(u)$, $\lim\limits_{u\to u_0} \boldsymbol{r}_2(u)$ *векторских функција* $\boldsymbol{r}_1$ *и* $\boldsymbol{r}_2$, *као и гранична вредност* $\lim\limits_{u\to u_0} k(u)$ *скаларне функције* $k(u)$, *тада важи*

1. $\lim\limits_{u\to u_0}(\boldsymbol{r}_1(u) \pm \boldsymbol{r}_2(u)) = \lim\limits_{u\to u_0} \boldsymbol{r}_1(u) \pm \lim\limits_{u\to u_0} \boldsymbol{r}_2(u)$,
2. $\lim\limits_{u\to u_0}(k(u)\boldsymbol{r}(u)) = \lim\limits_{u\to u_0} k(u) \lim\limits_{u\to u_0} \boldsymbol{r}(u)$,
3. $\lim\limits_{u\to u_0}(\boldsymbol{r}_1(u) \cdot \boldsymbol{r}_2(u)) = \lim\limits_{u\to u_0} \boldsymbol{r}_1(u) \cdot \lim\limits_{u\to u_0} \boldsymbol{r}_2(u)$,
4. $\lim\limits_{u\to u_0}(\boldsymbol{r}_1(u) \times \boldsymbol{r}_2(u)) = \lim\limits_{u\to u_0} \boldsymbol{r}_1(u) \times \lim\limits_{u\to u_0} \boldsymbol{r}_2(u)$.

1.2 Непрекидност и извод векторске функције

На сличан начин као у случају функције једне променљиве, дефинише се непрекидност и извод векторске функције једне промељиве $\boldsymbol{r}(u)$.

Дефиниција 1.2 *Векторска функција* $\boldsymbol{r}(u)$ *непрекидна је у тачки* u_0 *ако сваком произвољно малом* $\varepsilon > 0$ *одговара* $\delta(\varepsilon) > 0$ *тако да је* $\|\boldsymbol{r}(u) - \boldsymbol{r}(u_0)\| < \varepsilon$ *када је* $|u - u_0| < \delta(\varepsilon)$.

Прираштај векторске функције $\boldsymbol{r}(u)$ је $\Delta\boldsymbol{r}(u) = \boldsymbol{r}(u + \Delta u) - \boldsymbol{r}(u)$, где је Δu прираштај аргумента. Лако се доказује да је функција непрекидна у таки u_0 ако је $\lim\limits_{u\to u_0} \Delta\boldsymbol{r}(u) = 0$, при чему важи да је функција $\boldsymbol{r}(u)$ непрекидна у тачки u_0 ако и само ако су у тој тачки непрекидне функције $x(u), y(u), z(u)$.

Дефиниција 1.3 *Извод векторске функције* $\boldsymbol{r}(u)$ *представља граничну вредност (уколико постоји)* $\lim\limits_{\Delta u\to 0} \dfrac{\Delta\boldsymbol{r}(u)}{\Delta u}$ *и означава се са* $\boldsymbol{r}'(u)$ *или* $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{du}$, *где је* $d\boldsymbol{r}$ *диференцијал векторске функције.*

Теорема 1.2 *Извод векторске функције поседује следеће особине:*

1. $\boldsymbol{r}' = (x', y', z')$ *и* $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$;
2. $(\boldsymbol{r}_1 \pm \boldsymbol{r}_2)' = \boldsymbol{r}_1' \pm \boldsymbol{r}_2'$;
3. $(k(u)\boldsymbol{r})' = k'(u)\boldsymbol{r} + k(u)\boldsymbol{r}'$, k је скаларна функција;
4. $(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2)' = \boldsymbol{r}_1' \cdot \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2'$;
5. $(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)' = \boldsymbol{r}_1' \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2'$;
6. $([\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3])' = [\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3] + [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2', \boldsymbol{r}_3] + [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3']$;
7. Ако је $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t))$, тада је $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{du}\dfrac{du}{dt}$.

► Доказаћмо само неке особине. Особина **1**. Ако су $x(u), y(u), z(u)$ диференцијабилне функције, тада постоји свака од граничних вредности

$$\lim_{\Delta u\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta u} = x'(u) = \frac{dx}{du}, \lim_{\Delta u\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'(u) = \frac{dy}{du}, \lim_{\Delta u\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta u} = z'(u) = \frac{dz}{du},$$

па постоји и гранична вредност

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta u}=\boldsymbol{r}'(u)=(x'(u),y'(u),z'(u))=\frac{1}{du}(dx,dy,dz)=\frac{d\boldsymbol{r}}{du}.$$

Особина **4**. Нека је $\boldsymbol{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$ и $\boldsymbol{r}_2=(x_2,y_2,z_2)$. Тада је

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2)'&=(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)'=x_1'x_2+x_1x_2'+y_1'y_2+y_1y_2'+z_1'z_2+z_1z_2'\\&=x_1'x_2+y_1'y_2+z_1'z_2+x_1x_2'+y_1y_2'+z_1z_2'=\boldsymbol{r}_1'\cdot\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2',\end{aligned}$$

Особина **5**. С обзиром да је

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)'=\left(\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\right)'=\left(\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}',\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix}',\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}'\right),$$

а да се лако показује да важи

$$\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}'=\begin{vmatrix}y_1'&z_1'\\y_2&z_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2'&z_2'\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix}'=\begin{vmatrix}z_1'&x_1'\\z_2&x_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2'&x_2'\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}'=\begin{vmatrix}x_1'&y_1'\\x_2&y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2'&y_2'\end{vmatrix},$$

то је

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)'=\left(\begin{vmatrix}y_1'&z_1'\\y_2&z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_1'&x_1'\\z_2&x_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1'&y_1'\\x_2&y_2\end{vmatrix}\right)+\left(\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2'&z_2'\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2'&x_2'\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2'&y_2'\end{vmatrix}\right).$$

Међутим,

$$\boldsymbol{r}_1'\times\boldsymbol{r}_2=\left(\begin{vmatrix}y_1'&z_1'\\y_2&z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_1'&x_1'\\z_2&x_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1'&y_1'\\x_2&y_2\end{vmatrix}\right),\quad \boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2'=\left(\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2'&z_2'\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2'&x_2'\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2'&y_2'\end{vmatrix}\right),$$

што значи да је $(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)'=\boldsymbol{r}_1'\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2'$, чиме је доказана особина **5**.

Особина **6**. На основу дефиниције мешовитог производа, је

$$[\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3]=(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_3.$$

Користећи особине **4** и **5**, добијамо

$$\begin{aligned}([\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3])'&=(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)'\cdot\boldsymbol{r}_3+(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_3'=(\boldsymbol{r}_1'\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2')\cdot\boldsymbol{r}_3+(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_3'\\&=(\boldsymbol{r}_1'\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_3+(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2')\cdot\boldsymbol{r}_3+(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_3'.\ \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Извод векторске функције $\boldsymbol{r}$, у општем случају, опет је векторска функција, а извод ове функције је други извод функције $\boldsymbol{r}$. Дакле,

$$\frac{d}{du}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{du}\right)=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{du^2}=\boldsymbol{r}''.$$

Слично налазимо изводе вишег реда.

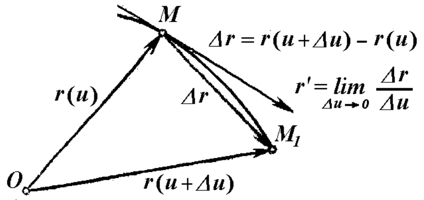
Како за скаларне, тако и за векторске функције важи **Тејлорова формула**

$$\boldsymbol{r}(u_0+\Delta u)=\boldsymbol{r}(u_0)+\boldsymbol{r}'(u_0)\Delta u+\frac{\boldsymbol{r}''(u_0)}{2!}\Delta u^2+\cdots+\frac{\boldsymbol{r}^{(n)}(u_0)}{n!}\Delta u^n+o(\Delta u^n).$$

Теорема 1.3 *Вектор константног интезитета ортогоналан је са својим изводним вектором.*

▶ Нека је $\boldsymbol{r}$ вектор променљивог правца и константног интезитата, $\|\boldsymbol{r}\| = c$. Тада је $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = c^2$. Одавде, а на основу особине 4 из Теореме 1.2, стављајући $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$, налазимо $(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})' = 2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}' = 0$. ◀

Крива је *проста* када различитим вредностима параметра u одговарају различите тачке криве, *затворена* када $x(b) = x(a)$, $y(b) = y(a)$, $z(b) = z(a)$. Уколико је извод функције $\boldsymbol{r}(u)$ непрекидан за $u \in [a, b]$, тада кажемо да је крива *глатка на* $[a, b]$. Ако је овај извод део-по-део непрекидан на $[a, b]$, крива је *део-по-део глатка*.

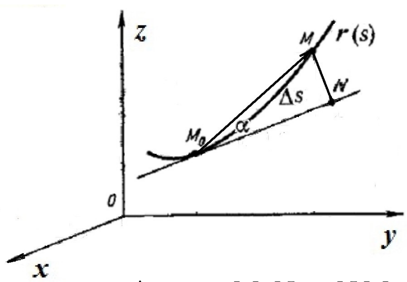


Геометријски, извод векторске функције $\boldsymbol{r}$ у тачки M криве по произвољном параметру u представља **тангентни вектор** криве у тачки M, при чему је вектор $\boldsymbol{r}'$ оријентисан је у смеру раста скалара.

1.3 Тангента и нормална раван

Врло често се дужина лука криве s узима као параметар. У том случају s називамо *природним параметром*, а векторску једначину криве $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, *природном једначином криве*.

Нека је $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s + \Delta s) - \boldsymbol{r}(s)$ прираштај вектора положаја криве у двема бесконачно блиским тачкама M_0 и M, а $\|\Delta\boldsymbol{r}\|$ његов интезитет. Посматрајмо однос $\|\Delta\boldsymbol{r}\|$ и прираштаја лука Δs. У тачки M_0 поставимо тангенту на криву, а из тачке M спустимо нормалу на ову тангенту. Означимо са N њихову пресечну тачку (видети слику). Тада важи



$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \|\Delta\boldsymbol{r}\| < \Delta s < M_0N + NM \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \frac{\Delta s}{\|\Delta\boldsymbol{r}\|} < \frac{M_0N}{\|\Delta\boldsymbol{r}\|} + \frac{NM}{\|\Delta\boldsymbol{r}\|},$$

односно

$$1 < \frac{\Delta s}{\|\Delta\boldsymbol{r}\|} < \cos\alpha + \sin\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos\alpha + \sin\alpha} < \frac{\|\Delta\boldsymbol{r}\|}{\Delta s} < 1.$$

Како $\alpha \to 0$, када $\Delta s \to 0$, то $\cos\alpha + \sin\alpha \to 1$. На основу теореме о укљештењу, следи $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\|\Delta\boldsymbol{r}\|}{\Delta s} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \left\|\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}\right\| = 1$. Узимајући у обзир (1), налазимо

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}, \quad \lim_{\Delta s \to 0} \left\|\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}\right\| = \left\|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right\| = 1.$$

Означимо, $\boldsymbol{T} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$. Тада је $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{T}\,ds$, а како је $\|\boldsymbol{T}\| = 1$, $\boldsymbol{T}$ је **тангентни орт** криве у некој тачки M_0, и следи $ds = \|d\boldsymbol{r}\| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Знајући да су α, β, γ углови које тангентни орт $\boldsymbol{T}$ заклапа са редом осама x, y, z, и да је однос пројекције вектора на осу и његовог интезитета једнак косинусу угла између вектора и осе, из

$$\boldsymbol{T} = \frac{d\boldsymbol{r}}{\|d\boldsymbol{r}\|} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \Big(\frac{dx}{\|d\boldsymbol{r}\|}, \frac{dy}{\|d\boldsymbol{r}\|}, \frac{dz}{\|d\boldsymbol{r}\|}\Big) = \Big(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\Big),$$

налазимо

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\|d\boldsymbol{r}\|} = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{\|d\boldsymbol{r}\|} = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{\|d\boldsymbol{r}\|} = \frac{dz}{ds}. \tag{2}$$

Нека је $\boldsymbol{R}$ вектор положаја произвољне тачке на тангенти. Тада је векторска једначина тангенте $(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}$. Раван ортогаонална са тангентом криве у тачки M назива се *нормалном равни* криве. Њена једначина је $(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{T} = 0$. Свака крива која припада нормалној равни ортогонална је са датом кривом.

Свакој вредности дужине лука s одговара нека вредност параметра u, и обратно, па се s може изразити у функцији од u. На основу особине **7** Теореме 1.2, имамо

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{du} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{du} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}' = s'\boldsymbol{T}, \quad \|\boldsymbol{r}'\| = s', \tag{3}$$

тако да **једначина тангенте** постаје $(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{0}$, а у скаларном облику она гласи

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'},$$

док је **једначина нормалне равни**

$$x'(X - x) + y'(Y - y) + z'(Z - z) = 0.$$

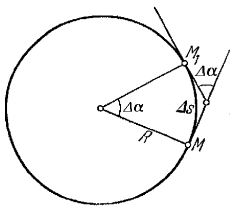
Промени вектора положаја $\boldsymbol{r}$ дуж лука s параметар одговара проток времена t, тако да

$$\|\boldsymbol{r}'\| = s' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

у физичком смислу представља **тренутну брзину тела** које се креће по кривој, док је $\boldsymbol{r}'$ вектор брзине. Дакле, вектор брзине је истовремено и тангентни вектор $\boldsymbol{r}'$, што значи да када би једном тренутку престала да делује сила која приморава тело да се креће по датој путањи, оно би наставило да се креће датом брзином у смеру вектора тангенте!

1.4 Закривљеност криве

Из елементарне геометрије познато је да је обим круга полупречника R једнак $2R\pi$. Уколико поделимо ову једнакост реалним бројем $x \geqslant 1$, добијамо лук дужине $s = \dfrac{2R\pi}{x}$ коме одговара централни угао $\alpha = \dfrac{2\pi}{x}$, при чему важи $s = R\alpha$, односно $\dfrac{1}{R} = \dfrac{\alpha}{s}$. Крећући се по кругу, тачка M прелази у блиску тачку M_1. Нека је Δs дужина лука између њих. Њему одговара централни угао $\Delta\alpha$, који је и угао између тангената на кружницу у тим тачкама, па је $\dfrac{1}{R} = \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$.



Повећањем полупречника, за исту дужину лука Δs, угао $\Delta\alpha$ између тангената се смањује и тежи нули, а лук $\overset{\frown}{MM_1}$ кружнице поприма облик дужи. Праву посматрамо као деформисану кружницу бесконачно великог полупречника. Само у случају коначног полупречника јавља се одступање од праве линије, а оно је обрнуто пропорционално полупречнику, и представља **закривљеност**, односно **флексију** дуж лука $\overset{\frown}{MM_1}$, а гранична вредност $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ је закривљеност кружнице у тачки M, и означава се са $\varkappa$. Она је у свакој тачки иста $\varkappa = \dfrac{1}{R}$. Закривљеност дуж лука $\overset{\frown}{MM_1}$ је, заправо, брзина промене правца тангенте у двема блиским тачкама.

Посматрајмо на кривој $\boldsymbol{r}(s)$ две блиске тачке M и M_1 којима одговарају вредности параметра s и $s + \Delta s$, при чему је Δs дужина лука $\overset{\frown}{MM_1}$. Нека су $\boldsymbol{T}(s)$ и $\boldsymbol{T}(s + \Delta s)$ тангентни ортови у овим тачкама. Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{T}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\boldsymbol{T}(s + \Delta s) - \boldsymbol{T}(s)}{\Delta s} = \frac{d\boldsymbol{T}}{ds},$$

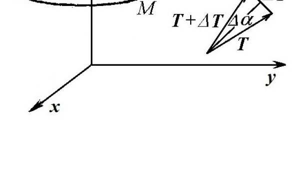
она представља **вектор кривине** $\boldsymbol{K}$. Притом је

$$\boldsymbol{K} = \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \frac{d}{ds}\Big(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\Big) = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2},$$

и важи $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{K} = \boldsymbol{T} \cdot \dfrac{d\boldsymbol{T}}{ds} = 0$. Дакле, $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{K}$ су ортогоналани. Смер вектора $\Delta\boldsymbol{T}$ увек је у смеру скретања, а како је $\Delta s > 0$, исто важи и за вектор $\dfrac{\Delta\boldsymbol{T}}{\Delta s}$, а самим тим је и вектор кривине $\boldsymbol{K}$ увек у смеру скретања.

Ако је $\Delta\alpha$ угао између ортова $\boldsymbol{T}(s)$ и $\boldsymbol{T}(s + \Delta s)$, закривљеност $\varkappa$ у тачки M је, као и код кружнице, гранична вредност

$$\varkappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}. \tag{4}$$



Како је $\|\Delta\boldsymbol{T}\| = 2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}$, а $\Delta s \to 0$ повлачи $\Delta\alpha \to 0$, на основу (4), налазимо

$$\varkappa = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}\frac{\|\Delta\boldsymbol{T}\|}{\Delta s} = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\frac{\Delta\alpha}{2}}{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}\lim_{\Delta s\to 0}\left\|\frac{\Delta\boldsymbol{T}}{\Delta s}\right\| = \lim_{\Delta s\to 0}\left\|\frac{\Delta\boldsymbol{T}}{\Delta s}\right\|.$$

На тај начин је $\varkappa = \|\boldsymbol{K}\|$.

Када се вектор кривине подели својим интезитетом, добија се јединични вектор који означавамо са $\boldsymbol{N}$, то јест

$$\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{K}}{\|\boldsymbol{K}\|} = \frac{1}{\varkappa}\boldsymbol{K} = \frac{1}{\varkappa}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2},$$

и он предствља **орт главне нормале**.

У случају да је крива задата у функцији произвољног параметра u, диференцирањем једнакости на десној страни (3) по u, добија се

$$\boldsymbol{r}'' = s''\boldsymbol{T} + s'\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}s' = s''\frac{\boldsymbol{r}'}{s'} + s'^2\boldsymbol{K} = s''\boldsymbol{T} + s'^2\varkappa\boldsymbol{N}. \tag{5}$$

Из (5) можемо наћи вектор кривине $\boldsymbol{K}$ у функцији произвољног параметра u

$$\boldsymbol{K} = \frac{s'\boldsymbol{r}'' - s''\boldsymbol{r}'}{s'^3}. \tag{6}$$

Множењем једнакости на десној страни (5) векторски слева са $\boldsymbol{r}'$, и узимајући у обзир да је, на основу (3), $\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}$, имамо

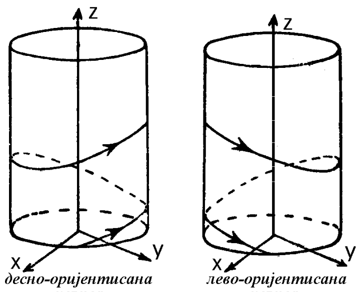
$$\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r}' \times (s''\boldsymbol{T} + s'^2\varkappa\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{r}' \times (s'^2\varkappa\boldsymbol{N}) = s'^3\varkappa\Big(\frac{\boldsymbol{r}'}{s'} \times \boldsymbol{N}\Big) = s'^3\varkappa(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}). \tag{7}$$

Како је $\|\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}\| = 1$, из (7) израчунавамо

$$\varkappa = \frac{\|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''\|}{s'^3} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}. \tag{8}$$

Пример 1.1 Наћи ћемо закривљеност криве $x = 4\cos^3 u,\ y = 4\sin^3 u,\ z = 3\cos 2u$ у тачки за коју је $u = 2\pi/3$. Како је $\boldsymbol{r}' = \Big(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{9}{2}, 3\sqrt{3}\Big)$, $\boldsymbol{r}'' = \Big(-\frac{15}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}, 6\Big)$, $s' = 3\sqrt{6}$, $s'' = 6\sqrt{2}$, на основу (6), за вектор кривине добијамо $\boldsymbol{K} = \Big(-\frac{1}{12}, \frac{1}{12\sqrt{3}}, 0\Big)$, па је $\varkappa = \|\boldsymbol{K}\| = \frac{1}{6\sqrt{3}}$. На тај начин, орт главне нормале је $\boldsymbol{N} = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\Big)$.

Пример 1.2 Дата је крива $(l):\ y = \frac{x^2}{2},\quad z = \frac{x^3}{6}$. Одредићемо флексију криве (l) у тачки за коју је $x = 2$. Стављамо да је $x = u$. Једначина криве у векторском облику гласи $\boldsymbol{r} = \left(u, \dfrac{u^2}{2}, \dfrac{u^3}{6}\right)$, па је $\boldsymbol{r}' = \left(1, u, \dfrac{u^2}{2}\right)$, $\boldsymbol{r}'' = (0, 1, u)$, $s' = \sqrt{1 + u^2 + \dfrac{u^4}{4}}$, $s'' = \dfrac{2u + u^3}{2\sqrt{1 + u^2 + \dfrac{u^4}{4}}}$ и $\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} = \dfrac{u^2}{2}$, $\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} = -u$, $\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 1$. На основу (6) за $u = 2$ налазимо $\boldsymbol{K} = \dfrac{3 \cdot (0,1,2) - 2 \cdot (1,2,2)}{27} = \left(-\dfrac{2}{27}, -\dfrac{1}{27}, \dfrac{2}{27}\right)$ и $\varkappa = \|\boldsymbol{K}\| = \dfrac{1}{9}$, па је $\boldsymbol{N} = \left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.



десно-оријентисана хелиса   *лево-оријентисана хелиса*

Некада је једноставније да једначину криве, задату у функцији произвољног параметра u, изразимо преко природног параметра s. То ћемо показати на примеру *хелисе* или *завојнице.*

Пример 1.3 Наћи закривљеност кружне хелисе $\boldsymbol{r}(u) = (a\cos u, a\sin u, bu)$, $a > 0$ и показати да је она иста и за десно-оријентисану и за лево-оријентисану хелису. Кружна хелиса је десно-оријентисана ако је $b > 0$ а лево-оријентисана ако је $b < 0$. С обзиром да је

$$\frac{ds}{du} = s'(u) = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

налазимо $s = u\sqrt{a^2 + b^2}$, односно $u = \dfrac{s}{c}$, где смо означили $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Једначина хелисе у функцији параметра s гласи $\boldsymbol{r}(s) = \left(a\cos\dfrac{s}{c}, a\sin\dfrac{s}{c}, \dfrac{bs}{c}\right)$, одакле је

$$\boldsymbol{T} = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right), \ \boldsymbol{K} = \left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right),$$

тако да је

$$\boldsymbol{K} = \frac{a}{c^2}\left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right), \ \boldsymbol{N} = \left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right),$$

док је $\varkappa = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$. Како израз за закривљеност остаје непромењен уколико b промени знак, закључујемо да је закривљеност кружне хелисе константна и да је, штавише, иста и за десно и за лево-оријентисану хелису.

У случају раванске криве $\boldsymbol{r}(u)$, стављајмо $z(u) = 0$, па се из (8), добија

$$\varkappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Пример 1.4 Наћи ортове $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{N}$, као и закривљеност криве $x = \cos^3 u, y = \sin^3 u$, $u \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, у тачки за коју је $u = \dfrac{\pi}{4}$.

Овде је $\boldsymbol{r}' = (-3\cos^2 u \sin u, 3\sin^2 u \cos u)$, $\boldsymbol{r}'' = (6\cos u \sin^2 u - 3\cos^3 u, 6\sin u \cos^2 u - 3\sin^3 u)$, $s' = \frac{3}{2}\sin 2u$, $\quad s'' = 3\cos 2u$. За $u = \dfrac{\pi}{4}$, добија се $\boldsymbol{r}' = \Big(-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}, \dfrac{3}{2\sqrt{2}}\Big)$, $\boldsymbol{r}'' = \Big(\dfrac{3}{2\sqrt{2}}, \dfrac{3}{2\sqrt{2}}\Big)$, $s' = \frac{3}{2}, s'' = 0$. На тај начин је

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{r}'}{\|\boldsymbol{r}'\|} = \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big),\ \boldsymbol{K} = \Big(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\Big),\ \varkappa = \frac{2}{3},\ \boldsymbol{N} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Ако је крива задата у експлицитном облику $y = f(x)$, имамо $\boldsymbol{r} = (x, f(x))$, па је $\boldsymbol{r}' = (1, f'(x))$ и $\boldsymbol{r}'' = (0, f''(x))$. Тада је закривљеност једнака

$$\varkappa = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'^2(x))^{3/2}}. \tag{9}$$