1 Векторска функција једне променљиве

1.1 Главна нормала и ректификациона раван

Уколико је једначина криве у функцији природног параметра, векторска једначина главне нормале гласи

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{N}=\boldsymbol{0} \quad\Leftrightarrow\quad (\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\times\frac{1}{\varkappa}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\boldsymbol{0} \quad\Leftrightarrow\quad (\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\boldsymbol{0}.$$

Ако је крива задата у функцији произвољног параметра u, полазећи од

$$\boldsymbol{K}=\frac{s'\boldsymbol{r}''-s''\boldsymbol{r}'}{s'^3}, \tag{1}$$

с обзиром на то да је $\boldsymbol{K}=\varkappa\boldsymbol{N}$, орт главне нормале записујемо у облику

$$\boldsymbol{N}=\frac{1}{s'^3\varkappa}(s'\boldsymbol{r}''-s''\boldsymbol{r}')=\frac{1}{s'^4\varkappa}(s'^2\boldsymbol{r}''-s's''\boldsymbol{r}'),$$

па **једначина главне нормале** постаје

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\times(s'^2\boldsymbol{r}''-s's''\boldsymbol{r}')=\boldsymbol{0}.$$

Како из $s'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$, следи $s's''=x'x''+y'y''+z'z''$, добија се

$$s'^2\boldsymbol{r}''-s's''\boldsymbol{r}'=\left(\begin{vmatrix} x'' & y'y''+z'z'' \\ x' & y'^2+z'^2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y'' & z'z''+x'x'' \\ y' & z'^2+x'^2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z'' & x'x''+y'y'' \\ z' & x'^2+y'^2\end{vmatrix}\right).$$

Стога, једначина главне нормале у симетричном облику гласи

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} x'' & y'y''+z'z'' \\ x' & y'^2+z'^2\end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix} y'' & z'z''+x'x'' \\ y' & z'^2+x'^2\end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} z'' & x'x''+y'y'' \\ z' & x'^2+y'^2\end{vmatrix}}.$$

Раван ортогонална са вектором главне нормале назива се **ректификационом равни**. Њена векторска једначина је

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot(s'^2\boldsymbol{r}''-s's''\boldsymbol{r}')=0.$$

У скаларном облику једначина ректификационе равни гласи

$$\begin{vmatrix} x'' & y'y''+z'z'' \\ x' & y'^2+z'^2\end{vmatrix}(X-x)+\begin{vmatrix} y'' & z'z''+x'x'' \\ y' & z'^2+x'^2\end{vmatrix}(Y-y)+\begin{vmatrix} z'' & x'x''+y'y'' \\ z' & x'^2+y'^2\end{vmatrix}(Z-z)=0.$$

1.2 Бинормала и оскулаторна раван

Векторским множењем $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{N}$ добијамо **орт бинормале**, који означавамо са $\boldsymbol{B}$. Дакле $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$. Ортови $\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}$ чине **природни триједар** десне оријентације.

Раван одређена векторима $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{N}$ је **оскулаторна раван**. Ако је $\boldsymbol{R}$ вектор положаја произвољне тачке ове равни, вектори $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$ су компланарни, па се добија

$$[\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r},\boldsymbol{T},\boldsymbol{N}]=0, \tag{2}$$

што представља **једначину оскулаторне равни**, а како су оскулаторна раван и орт бинормале међусобно ортогоналани, векторска **једначина бинормале** гласи

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}.$$

У случају да је крива задата у функцији произвољног параметра u, из

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''&=\boldsymbol{r}'\times(s''\boldsymbol{T}+s'^2\varkappa\boldsymbol{N})=\boldsymbol{r}'\times(s'^2\varkappa\boldsymbol{N})\\&=s'^3\varkappa\Big(\frac{\boldsymbol{r}'}{s'}\times\boldsymbol{N}\Big)=s'^3\varkappa(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N})\end{aligned} \tag{3}$$

налазимо

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}=\frac{1}{s'^3\varkappa}(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''), \tag{4}$$

па једначина (2), на основу (1), постаје

$$[\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r},\boldsymbol{T},\boldsymbol{N}]=\Big[\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r},\frac{\boldsymbol{r}'}{s'},\frac{s'\boldsymbol{r}''-s''\boldsymbol{r}'}{s'^3\varkappa}\Big]=\Big[\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r},\frac{\boldsymbol{r}'}{s'},\frac{\boldsymbol{r}''}{s'^2\varkappa}\Big]=0,$$

одакле добијамо

$$[\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'']=0,$$

тако да је за налажење њеног скаларног облика довољно наћи само први и други извод векторске функције $\boldsymbol{r}$. На тај начин, једначина оскулаторне равни, у случају произвољног параметра u, постаје

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z\\ x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\end{vmatrix}=0,$$

а једначина бинормале је

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z'\\ y'' & z''\end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x'\\ z'' & x''\end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}}.$$

Пример 1.1 Дата је крива $\boldsymbol{r}(u) = (2\cos^2 u, \sin 2u, 2\sin u)$. Показати да крива лежи у пресеку сфере и цилиндра, чија је генератриса паралелна оси z, и одредити њихове једначине. Наћи једначину оскулаторне равни криве у тачки која се добија за $u = \dfrac{\pi}{2}$.

Како је $x^2 + y^2 + z^2 = 4\cos^4 u + 4\sin^2 u \cos^2 u + 4\sin^2 u = 4$, добија се једначина сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Из $x^2 + y^2 = 4\cos^4 u + 4\sin^2 u\cos^2 u = 4\cos^2 u = 2x$ налазимо да је $x^2 + y^2 = 2x$ једначина цилиндра.

Једначина оскулаторне равни у тачки која се добија за $u = \dfrac{\pi}{2}$ гласи

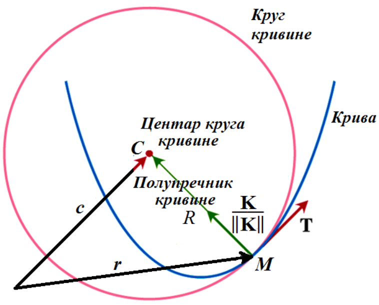
$$\begin{vmatrix} X & Y & Z-2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad X + 2Z - 4 = 0.$$

Пример 1.2 За криву $\boldsymbol{r} = (\cos^2 u, \sin u \cos u, \sin u)$ одредићемо ортове природног триједра у тачки која се добија за $u = 0$. Најпре налазимо

$$\boldsymbol{r}' = (-2\cos u \sin u, \cos 2u, \cos u), \quad \boldsymbol{r}'' = (-2\cos 2u, -2\sin 2u, -\sin u)$$

и $s' = \sqrt{1 + \cos^2 u}$, $s'' = \dfrac{-\cos u \sin u}{s'}$. За $u = 0$ је $s' = \sqrt{2}$, $s'' = 0$ и $\boldsymbol{r}' = (0, 1, 1)$, $\boldsymbol{r}'' = (-2, 0, 0)$, одакле је $\boldsymbol{K} = (-1, 0, 0)$ и $|\boldsymbol{K}| = 1$, па је орт главне нормале $\boldsymbol{N} = (-1, 0, 0)$. С обзиром да је $\boldsymbol{T} = \dfrac{\boldsymbol{r}'}{\sqrt{2}}$, за орт бинормале добијамо $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N} = \Big(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)$.

1.3 Круг кривине



Кругом кривине (или *оскулаторном кружницом*) *у тачки* M криве назива се кружница која пролази кроз тачку M криве, има са кривом у тачки M заједничку тангенту, налази се са оне стране тангенте на коју је усмерен вектор кривине $\boldsymbol{K}$ и има закривљеност једнаку закривљености криве у тачки M. Полупречник R круга кривине назива се такође *полупречником кривине криве у тачки* M. Вредност полупречника круга кривине једнака је реципрочној вредности интензитета вектора кривине. Зато је *вредност полупречника кривине* R *криве у датој тачки једнака реципрочној вредности апсолутне вредности закривљености у тој тачки*, то јест, $R = 1/\varkappa$.

Центар C круга кривине назива се *центром кривине криве*. С обзиром да се круг кривине налази са оне стране тангенте на коју је усмерен вектор кривине $\boldsymbol{K}$, центар круга кривине у тачки M је крајња тачка вектора $\overrightarrow{MC}$ чији се смер поклапа са смером вектора кривине. Тако вектор положаја $\boldsymbol{c}$ центра кривине добијамо сабирањем вектора $\boldsymbol{r}$ положаја такче M и орта вектора кривине $\dfrac{\boldsymbol{K}}{\|\boldsymbol{K}\|}$ помноженог полупречником кривине R. Другим речима,

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{r} + R\frac{\boldsymbol{K}}{\|\boldsymbol{K}\|} = \boldsymbol{r} + \frac{1}{\varkappa}\frac{\boldsymbol{K}}{\varkappa} = \boldsymbol{r} + \frac{1}{\varkappa^2}\boldsymbol{K}. \tag{5}$$

Ако је познат вектор кривине, позната је и закривљеност криве (као његов интезитет), и може се одредити центар круга кривине.

Пример 1.3 Одредити центар круга кривине криве $\boldsymbol{r} = (\cos u, \sin u, u)$ у тачки за коју је $u = \frac{\pi}{4}$, као и једначину одговарајуће оскулаторне кружнице.

Како је $\boldsymbol{r}' = (-\sin u, \cos u, 1)$ и $\boldsymbol{r}'' = (-\cos u, -\sin u, 0)$, то је $s' = \sqrt{2}$ и $s'' = 0$, па је у тачки $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4})$, према (1), вектор кривине једнак $\boldsymbol{K} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) - 0 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)) = (-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0)$, одакле је $\varkappa = \|K\| = \frac{1}{2}$. На основу (5), закључујемо да је вектор положаја центра круга кривине $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}) + 4(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4})$, а сама оскулаторна кружница добија се као пресек сфере $(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(y+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(z-\frac{\pi}{4})^2 = 4$ и равни $x - y + \sqrt{2}(z - \frac{\pi}{4}) = 0$.

Означимо са $\boldsymbol{v}$ вектор $\boldsymbol{r}'$ тренутне брзине тела, чији је вектор положаја $\boldsymbol{r}$ зависи од протока времена, а тренутну брзину са $v = s'$, једанкост $\boldsymbol{r}' = s'\boldsymbol{T}$ записујемо у облику $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{T}$.

Убрзање представља промену брзине у односу на проток времена, то јест $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$, а **тренутно убрзање** је $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = v' = (s')' = s''$. У складу с тим, вектор тренутног убрзања $\boldsymbol{a}$ је $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \boldsymbol{r}''$. Формулу

$$\boldsymbol{r}'' = s''\boldsymbol{T} + s'\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}s' = s''\frac{\boldsymbol{r}'}{s'} + s'^2\boldsymbol{K} = s''\boldsymbol{T} + s'^2\varkappa\boldsymbol{N} \tag{6}$$

записујемо у облику

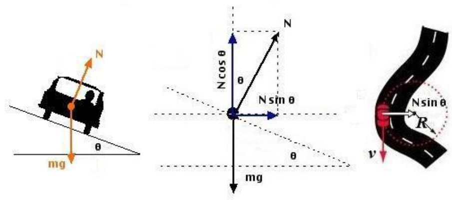
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}'' = s''\boldsymbol{T} + s'^2\varkappa\boldsymbol{N} = v'\boldsymbol{T} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{N},$$

где је $R = \dfrac{1}{\varkappa}$ полупречник кривине. Дакле, вектор тренутног убрзања разлаже се на збир вектора убрзања, тангенцијалног и центрипеталног. Тангенцијално убрзање је $a_t = v'$, док је центрипетално $a_c = \dfrac{v^2}{R}$. На тај начин, центрипетална сила која делује на тело масе m једнака $m \cdot a_c = \dfrac{mv^2}{R}$.

Размотримо кретање аутомобила дуж пута који је под углом θ у односу на раван основе. На слици уочавамо силе које делују на ауто. Једна је тежина mg, где је m маса аута, а g гравитационо убрзање, друга је нормална сила N, која делује навише и ортогонална је на површину пута. Центрипетална сила $\dfrac{mv^2}{R}$, која омогућава да ауто остане на путу, резултанта је нормалне силе и тежине.

Хоризонтална компонента нормалне силе $N \sin\theta$ дејствује као центрипетална сила, па је $N \sin\theta = \dfrac{mv^2}{R}$. Како се вертикална компонента нормалне силе $N\cos\theta$ супротстављa гравитационој сили mg, то је $N\cos\theta = mg$.

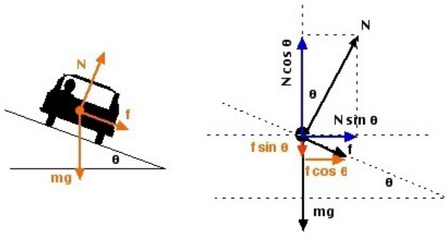
Брзина v за коју ауто остаје на путу, чак и да је прекривен глатким слојем леда је "идеална" брзина, v_{ideal}. Уколико би ишао пребрзо, излетео би с пута, а у случају да се не креће довољно брзо, склизнуо би ка центру. На основу ових једначина, налазимо



$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{gR} \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{gR\operatorname{tg}\theta}.$$

Дакле, уколико желимо да у датој кривини возимо брже, пут мора бити нагнут под већим углом! С друге стране, ако је кривина оштрија, полупречник R је мањи, па нагиб мора да буде већи. Ако угао θ не испуни овај услов, хоризонтална компонента неће обезбедити довољну центрипеталну силу, па је неопходна додатна бочна сила трења f (friction), $f = \mu N$ (μ је коефицијент трења), настала у контакту аутомобилских гума и површине пута, да би се спречило проклизавање аутомобила како навише, тако и наниже.

$v > v_{ideal}$: Ако је брзина аутомобила v, већа од идеалне брзине v_{ideal}, хоризонтална компонента нормалне силе биће мања од потребне центрипеталне силе, и ауто ће, удаљавајући се од центра кривине, излетети с пута. Бочна сила трења између аутомобилских гума и површине пута супротставља се оваквом кретању и дејствује тако да усмерава ауто ка центру кривине. Да би се успоставила равнотежа с центрипеталном силом, хоризонталној комоненти нормалне силе додајемо хоризонталну компоненту силе трења



$$\frac{mv^2}{R} = N\sin\theta + f\cos\theta = N\sin\theta + \mu N\cos\theta.$$

Насупрот томе, интезитети супротних вертикалних сила, које представљају, на једној страни вертикалну компоненту нормалне силе усмерену навише, а на другој тежину аута и вертикалну компоненту силе трења усмерене наниже, међусобно су једнаки. Стога је

$$N\cos\theta = mg + f\sin\theta = mg + \mu N\sin\theta \quad \Rightarrow \quad mg = N\cos\theta - \mu N\sin\theta.$$

Делећи прву једначну другом, добијамо

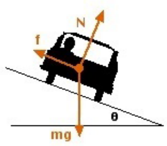
$$\frac{v^2}{gR} = \frac{N\sin\theta + \mu N\cos\theta}{N\cos\theta - \mu N\sin\theta}. \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gR\frac{\operatorname{tg}\theta + \mu}{1 - \mu\operatorname{tg}\theta}}.$$

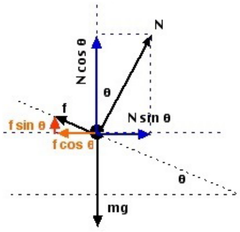
Ова једначина обезбеђује **максималну брзину** аутомобила за дати угао нагиба, коефицијент трења и полупречник кривине.

$v < v_{ideal}$: Ако је брзина аутомобила v, мања од идеалне брзине v_{ideal}, хоризонтална омпонента нормалне силе биће већа од захтеване центрипеталне силе и аутомобил ће склизнути низ нагиб, у смеру центра кривине. Бочна сила трења између аутомобилских гума и површине пута супротставља се овом кретању и повлачи ауто уз нагиб. Да би се успоставила равнотежа с хоризонталном компонентом нормалне силе, центрипеталној сили додаје се хоризонтална компонента трења

$$N\sin\theta = \frac{mv^2}{R} + f\cos\theta = \frac{mv^2}{R} + \mu N\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{R} = N\sin\theta - \mu N\cos\theta.$$

Интезитети супротних вертикалних сила, које представљају, с једне стране, вертикалну компоненту нормалне силе и силе трења, које су усмерене навише, с друге, тежину аута усмерену наниже, једнаки су. То значи да је





$$mg = N\cos\theta + f\sin\theta = N\cos\theta + \mu N\sin\theta.$$

Делећи прву једначну другом, добијамо

$$\frac{v^2}{gR} = \frac{N\sin\theta - \mu N\cos\theta}{N\cos\theta + \mu N\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gR\frac{\operatorname{tg}\theta - \mu}{1 + \mu\operatorname{tg}\theta}}.$$

Ова једначина обезбеђује **минималну брзину** аутомобила за дати угао нагиба, коефицијент трења и полупречник кривине.

1.4 Торзија

Извод вектора бинормале

$$\boldsymbol{B}' = \frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{B}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{B}(s+\Delta s) - \boldsymbol{B}(s)}{\Delta s}$$

указује на промену правца вектора бинормале по луку s, а како је орт $\boldsymbol{B}$ управан на оскулаторну раван, вектор $\boldsymbol{B}'$ описује извијање криве из оскулаторне равни. Стога се степен тог извијања мери се интезитетом $\|\boldsymbol{B}'\|$.

Диференцирањем једнакости $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$, узимијаћи у обзир да је $\boldsymbol{T}'\times\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$ (јер су вектори $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{K} = \varkappa\boldsymbol{N}$ колинеарни), добијамо

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{T}'\times\boldsymbol{N} + \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}' = \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}' \tag{7}$$

Одавде следи, да су вектори $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{B}'$ су ортогонални, а на основу Теореме о ортогоналности вектора и његовог изводног вектора, ортогонални су и вектори $\boldsymbol{B}$

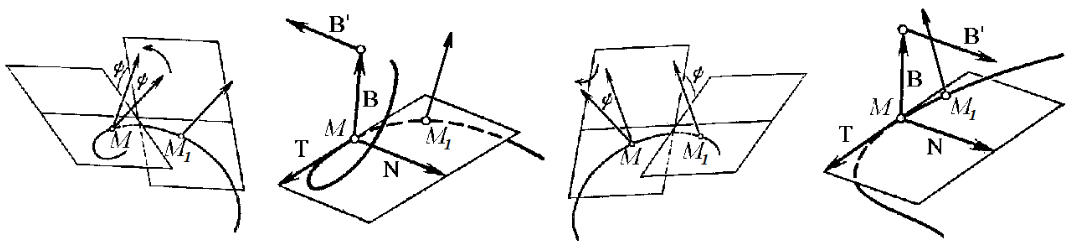
и $\boldsymbol{B}'$, па се $\boldsymbol{B}'$ налази у оскулаторној равни. Значи, вектори $\boldsymbol{B}'$ и $\boldsymbol{N}$ су колинеарни, то јест $\boldsymbol{B}' = \lambda \boldsymbol{N}$. Скаларним множењем ове једнакости са $\boldsymbol{N}$, налазимо $\boldsymbol{B}' \cdot \boldsymbol{N} = \lambda \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{N} = \lambda$. Користећи (7), добија се $\lambda = (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}') \cdot \boldsymbol{N} = [\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}', \boldsymbol{N}]$, односно $\lambda = -[\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}']$, одакле је

$$\boldsymbol{B}' = -[\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}']\, \boldsymbol{N}, \quad \|\boldsymbol{B}'\| = \big|\,[\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}']\,\big|\,.$$

Израз $[\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}']$ представља **торзију** коју означавамо са τ. Вектори $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$ чине систем десне оријентације, а вектор $\boldsymbol{N}'$ налази се на истој страни оскулаторне равни као и вектор $\boldsymbol{B}$, само ако вектори $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}'$ такође чине систем десне оријентације, односно ако је $[\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}'] > 0$, и тада је **торзија позитивна**, а вектори $\boldsymbol{B}'$ и $\boldsymbol{N}$ су у том случају супротних смерова.

Ако је $[\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}'] < 0$, вектори $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}'$ чине систем леве оријентације, па се вектори $\boldsymbol{N}'$ и $\boldsymbol{B}$ налазе на супротним странама оскулаторне равни и тада је **торзија негативна**. У том случају, вектори $\boldsymbol{B}'$ и $\boldsymbol{N}$ су истог смера.

Приликом преласка из тачке M_1 у тачку M криве, вектор бинормале, односно оскулаторна раван, изврши ротацију за угао ψ. Уколико је та ротација удесно, торзија је позитивна, а уколико је она улево, торзија је негативна.



позитивна торзија *негативна торзија*

Практично, у случају да је крива задата преко природног параметра s, торзија се израчунава на следећи начин

$$\begin{aligned}\tau = [\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}'] &= \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \times \Big(\frac{1}{\varkappa}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\Big)\right) \cdot \frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{\varkappa}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\Big) \\ &= \frac{1}{\varkappa}\Big(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\Big) \cdot \Big(-\frac{\varkappa'}{\varkappa^2}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} + \frac{1}{\varkappa}\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\Big) \\ &= \frac{1}{\varkappa^2}\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}, \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right] = \frac{\left[\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}, \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}, \dfrac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right]}{\left\|\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right\|^2}.\end{aligned}$$

Извод од $\boldsymbol{N}$ можемо изразити преко $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{B}$, јер је

$$\boldsymbol{N}' = (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{T})' = \boldsymbol{B}' \times \boldsymbol{T} + \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{T}' = -\tau \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{T} + \boldsymbol{B} \times (\varkappa \boldsymbol{N}) = \tau \boldsymbol{B} - \varkappa \boldsymbol{T}. \qquad (8)$$

Формула (8) једна је од три формуле којима се успостављају везе ортова природног триједра и њихових извода, а називају се **Френеовим формулама** (Frederic Jean Frenét (1816-1900), француски математичар). Две смо већ извели у поступку налажења флексије и торзије. На тај начин, Френеове формуле гласе

$$\boldsymbol{T}' = \varkappa \boldsymbol{N}, \qquad \boldsymbol{N}' = -\varkappa \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{B}' = -\tau \boldsymbol{N}.$$

У случају произвољног параметра u, вектор $\boldsymbol{r}'''$ можемо изразити преко ортова $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$. Диференцирајући једнакост

$$\boldsymbol{r}'' = s''\boldsymbol{T} + s'\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}s' = s''\frac{\boldsymbol{r}'}{s'} + s'^2\boldsymbol{K} = s''\boldsymbol{T} + s'^2\varkappa\boldsymbol{N},$$

најпре налазимо

$$\boldsymbol{r}''' = s'''\boldsymbol{T} + (3s's''\varkappa + s'^2\varkappa')\boldsymbol{N} + s'^3\varkappa\boldsymbol{N}'.$$

Затим, примењујући (8), добијамо

$$\boldsymbol{r}''' = (s''' - s'^3\varkappa^2)\boldsymbol{T} + (3s's''\varkappa + s'^2\varkappa')\boldsymbol{N} + s'^3\varkappa\tau\boldsymbol{B}.$$

Множећи (3) скаларно са $\boldsymbol{r}'''$ и користећи

$$\varkappa = \frac{\|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''\|}{s'^3} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}, \tag{9}$$

добијамо

$$\tau = \frac{[\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''']}{\|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''\|^2} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}, \tag{10}$$

чиме смо торзију израчунали када је крива задата преко произвољног параметра.

Пример 1.4 Наћи ћемо торзију за хелису $\boldsymbol{r}(u) = (a\cos u, a\sin u, bu)$, $a > 0$. Тамо смо одредили

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right), \quad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right), \quad \varkappa = \frac{a}{c^2},$$

при чему смо означили $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Сада налазимо

$$\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3} = \left(\frac{a}{c^3}\sin\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^3}\cos\frac{s}{c}, 0\right),$$

тако да је торзија једнака

$$\tau = \frac{1}{\varkappa^2}\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}, \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right] = \begin{vmatrix} -\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c} & \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c} & \frac{b}{c} \\ -\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c} & -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c} & 0 \\ \frac{a}{c^3}\sin\frac{s}{c} & -\frac{a}{c^3}\cos\frac{s}{c} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\frac{a^2}{c^4}} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{a^2}{c^5} = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Одавде непосредно уочавамо да је, као и флексија, торзија константна, али је за десно-оријентисану хелису ($b > 0$) торзија позитивна, док је за лево-оријентисану ($b < 0$) торзија негативна.

Пример 1.5 За криву $(l): \ y = \dfrac{x^2}{2}, \quad z = \dfrac{x^3}{6}$ одредићемо торзију у тачки за коју је $x = 2$. С обзиром да је $\boldsymbol{r}' = (1,2,2)$, $\boldsymbol{r}'' = (0,1,2)$ и следи да је $\|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''\| = 3$ и $\boldsymbol{r}''' = (0,0,1)$, примењујући затим формулу (10), третирајући x као параметар, налазимо да је торзија једнака

$$\tau = \frac{[\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''']}{\|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''\|^2} = \frac{1}{9}.$$