1 Неодређени интеграл

Нека је функција $f(x)$ дефинисана на неком интервалу (a, b). Функција $F(x)$, дефинисана на истом том интервалу, назива се *примитивном* за функцију $f(x)$, ако за сваки $x \in (a, b)$ важи $F'(x) = f(x)$.

Очигледно да ако је $F(x)$ примитивна функција за $f(x)$, тада је и функција $F(x) + C$, где је C константа, такође примитивна функција за $f(x)$. Приметимо да је функција $F(x)$ непрекидна на поменутом интервалу, с обзиром да је она диференцијабилна на њему.

Теорема 1.1 *Када су $F_1(x)$ и $F_2(x)$ две примитивне функције за $f(x)$, тада је $F_1(x) - F_2(x) = const$, што значи да се две примитивне функције разликују за константу.*

► Како су обе функције $F_1(x)$ и $F_2(x)$ примитивне за функцију за $f(x)$, то је $F_1'(x) = f(x)$ и $F_2'(x) = f(x)$, одакле је $(F_1(x) - F_2(x))' = 0$ за $x \in (a, b)$. На основу Лагранжове теореме, следи да је $F_1(x) - F_2(x) = \text{const}$. ◄

Када за функцију $f(x)$ постоји бар једна примитивна функција $F(x)$, то било која друга примитивна функција има облик $F(x) + C$, где је C произвољна константа.

Дефиниција 1.1 *Скуп свих примитивних функција за $f(x)$ назива се неодређеним интегралом функције $f(x)$ и означава се са*

$$\int f(x)\,dx.$$

На тај начин је

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Наводимо основне особине неодређеног интеграла

$$1) \quad \int F'(x)\,dx = F(x) + C \quad \Leftrightarrow \quad \int dF(x)\,dx = F(x) + C.$$

$$2) \quad \Big(\int f(x)\,dx\Big)' = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad d\Big(\int f(x)\,dx\Big) = f(x)\,dx.$$

Овде се под изводом неодређеног интеграла подразумева извод једне од примитивних функција, а он, очигледно, не зависи од избора примитивне функције.

3) Ако функција $f(x)$ има примитивну функцију, тада и функција $cf(x)$ (c је константа) такође има примитивну функцију, при чему је

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.$$

4) Ако функције $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имају примитивне функције, тада и функција $f_1(x)+f_2(x)$ такође има примитивну функцију, при чему је

$$\int (f_1(x)+f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

Налажење еодређеног интеграла представља поступак супротан од диференцирања, с обзиром да тражимо ону функцију $F(x)$ чији извод је дата функција $f(x)$. У складу с тим, као и наведеним особинама одређеног интеграла, лако састављамо таблицу неодређених интеграла, а на основу извода елементарних функција

$$1^\circ \int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\in\mathbb{R}, \alpha\neq -1), \qquad 2^\circ \int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$3^\circ \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \qquad 4^\circ \int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad 5^\circ \int \cos x = \sin x + C,$$

$$6^\circ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \qquad 7^\circ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$8^\circ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \qquad 9^\circ \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$10^\circ \int \sinh x\,dx = \cosh x + C, \qquad 11^\circ \int \cosh x\,dx = \sinh x + C.$$

2 Парцијална интеграција

У случају компликованијих функција, претходна таблица није довољна. Развијени су методи помоћу којих се неодређени интеграл таквих функција своди на неку од формула из таблица. Један од тих метода садржан је у наредној теореми.

Теорема 2.1 *Нека су функције $u(x)$ и $v(x)$ диференцијабилне не интервалу (a,b), на коме постоји примитивна функција за функцију $v(x)u'(x)$. Тада постоји примитивна функција за функцију $u(x)v'(x)$ и важи формула*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.$$

► У складу са правилом диференцирања производа двеју функција, имамо

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

одакле је

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - v(x)u'(x).$$

Према услову, постоји примитивна функција за функцију $v(x)u'(x)$, па, на основу особина 1) и 4) неодређеног интеграла, функција $u(x)v'(x)$ такође има примитивну функцију и добијамо

$$\begin{aligned}\int u(x)v'(x)\,dx &= \int (u(x)v(x))'\,dx - \int v(x)u'(x)\,dx\\ &= u(x)v(x) + C - \int v(x)u'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.\end{aligned}$$

Константу C укључили смо у последњи интеграл. ◄

Ова формула се назива формулом парцијалне интеграције и записује се краће у облику

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Пример 2.1 Израчунати интеграл $\int xe^x\,dx$. Не можемо одмах да применимо неки од табличних интеграла, па примењујемо формулу парцијалне интеграције, уводећи функције $u(x) = x$ и $v(x) = e^x$. Тако налазимо

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

У општем случају, интеграле $\displaystyle\int P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$ или $\displaystyle\int P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$ решавамо увођењем рекурзивне релације применом парцијалне интеграције, стављајући $u(x) = P_n(x)$, $dv(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$ или $dv(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$. На пример,

$$\begin{aligned}\int P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = P_n(x)e^{\alpha x}&\frac{\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\\ &- \int P_n'(x)e^{\alpha x}\frac{\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\,dx.\end{aligned}$$

Интеграл на десној страни разлажемо даље на збир два интеграла истог типа као и полазни и примењујемо исти поступак, с тим што је у сваком кораку степен полинома бар за један мањи.

3 Смена променљивих код неодређеног интеграла

Понекад ни примена парцијалне интеграције не омогућава поједностављење поступка налажења неодређеног интеграла. Врло често је од велике помоћи *смена променљивих.*

Теорема 3.1 *Нека функција $f(x)$ има примитивну функцију $F(x)$ на интервалу (a,b), док је функција $x = \varphi(t)$ диференцијабилна на интервалу (α,β). Тада је*

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C.$$

► Довољно је доказати да је $F(\varphi(t))$ примитивна функција за подинтегралну функцију. Према услову теореме $F'(x) = f(x)$. На основу правила диференцирања сложене функције, имамо

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

чиме је изведена формула за смену променљивих код неодређеног интеграла. ◄

У многим случајевима, показује се да је боље за нову променљиву изабрати такву функцију $\omega(x)$, да се подинтегрални израз представи у облику

$$f(x)\,dx = g(\omega(x))\,d(\omega(x)),$$

где је g погоднија функција за интеграцију од функције f, и тада замењујемо $\omega(x)$ са t, тако да је

$$\int f(x)\,dx = \int g(t)\,dt.$$

Пример 3.1 Израчунајмо $\int \operatorname{tg} x\,dx$. Примењујући претходну формулу, добијамо

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{dt}{t}\,dx = -\ln|t| + C,$$

где је $\omega(x) = \cos x$. На тај начин је

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C.$$

4 Интеграција рационалних функција

У општем случају, рационална функција има облик $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где су $P(x)$ и $Q(x)$ полиноми. Уколико је степен полинома $P(x)$ већи од степена полинома $Q(x)$, тада је $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \dfrac{T(x)}{Q(x)}$, при чему је степен полинома $T(x)$ мањи од степена полинома $Q(x)$. Најпре ћемо размотрити различите посебне облике рационалних функција.

1° Рационалну функцију $1/(x^2 - a^2)$ можемо раставити на збир

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} = \frac{(A+B)x + Aa - Ba}{x^2 - a^2},$$

где коефицијенте A и B треба одредити. Тако налазимо $A = 1/2a$ и $B = -1/2a$ и зато је

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int \Big(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\Big)\,dx = \frac{1}{2a}\ln\Big|\frac{x-a}{x+a}\Big| + C.$$

2° Уколико је подинтегрална функција облика $1/(x^2+a^2)$ интеграл израчунавамо на следећи начин

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

3° Уколико је подинтегрална функција квадратни трином ax^2+bx+c, можемо га довести на облик $a\Big(\Big(x+\dfrac{p}{2}\Big)^2 - \dfrac{p^2-4q}{4}\Big)$, где смо означили $p=b/a$ и $q=c/a$. Сада је

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2-4q}{4}}.$$

1. Ако је $p^2-4q>0$, овај случај је обухваћен примером **1°**.
2. Ако је $p^2-4q<0$, овај случај се обухваћен примером **2°**.
3. Ако је $p^2-4q=0$, имаћемо $\displaystyle\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2} = -\Big(x+\frac{p}{2}\Big)^{-1} + C.$

4° Нека је $n>1$ природан број или $n=m+1/2$, где је $m\geqslant 1$ природан број. Тада је

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

На последњи интеграл примењујемо парцијалну интеграцију

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int x\frac{d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{x(x^2+a^2)^{1-n}}{1-n} + \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right).$$

На тај начин добијамо рекурзивну формулу

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

5° Посматрајмо рационалну функцију $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где је степен полинома $P(x)$ мањи од степена полинома $Q(x)$. Довољно је размотрити само овај случај, јер се произвољна рационална функција може свести на овај облик. Уколико је

$$(x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}\cdots(x^2+p_nx+q_n)^{r_n},$$

при чему је $p_i^2-4q_i<0$ $(i=1,\ldots,n)$, факторизација полинома $Q(x)$, тада су суме

$$\sum_{i=1}^{k_1}\frac{A_1^{(i)}}{(x-a_1)^i},\ldots,\sum_{i=1}^{k_m}\frac{A_m^{(i)}}{(x-a_m)^i},\sum_{i=1}^{r_1}\frac{B_1^{(i)}x+D_1^{(i)}}{(x^2+p_1x+q_1)^i},\ldots,\sum_{i=1}^{r_n}\frac{B_n^{(i)}x+D_n^{(i)}}{(x^2+p_nx+q_n)^i}$$

све елементарне рационалне функције на које се разлаже рационална функција $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Стога се израчунавање интеграла $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ своди на израчунавање интеграла типа $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx$ и $\displaystyle\int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^k}\,dx$ за $k>1$. Први тип интеграла лако налазимо

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = \frac{A(x-a)^{1-k}}{1-k} + C.$$

У случају другог типа, имамо

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^k}\,dx &= \frac{B}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^k} + \Big(D-\frac{Bp}{2}\Big)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}\\ &= \frac{B(x^2+px+q)^{1-k}}{2-2k} + \Big(D-\frac{Bp}{2}\Big)\int \frac{d\big(x+\frac{p}{2}\big)}{\big((x+\frac{p}{2})^2-\frac{p^2-4q}{4}\big)^k}.\end{aligned}$$

Како је $p^2-4q<0$, то се овај интеграл на случај 2. из **3°**.