9.3 Kontinualna – neprekidno raspoređena opterećenja

Često je telo izloženo opterećenju, koje je raspodeljeno po njegovoj zapremini, površini, odnosno dužini. Opterećenje neprekidno raspoređeno po celoj dužini grede ili dela grede naziva se *neprekidno raspodeljeno ili kontinualno opterećenje*. Primeri raspodeljenog opterećenja su posledica dejstva sopstvene težine, vetra, snega, hidrostatičkog pritiska, pritiska tla itd. Prema vremenu trajanja opterećenja mogu biti stalna (težina nosača) i povremena (vetar, sneg itd.)

9.3.1 Linijska opterećenja

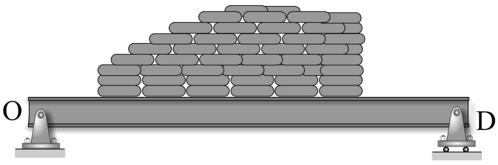
Ukoliko je kontakt između dva tela ostvaren duž linije, kao što je prikazano na Slici 9.5, tada je telo opterećeno *linijski raspoređenim opterećenjem*.
Dejstvo ovakvog opterećenja može se proučavati na jednostavan način ako se ono zameni svojom rezultantom. Na jednostavnom primeru će se pokazati kako se ovakvo opterećenje predstavlja analitički. Neka su na prostu gredu poslagane vreće sa peskom kao na Slici 9.5 *a*). Opterećenje se rasprostire na delu dužine grede i njegov intenzitet u nekoj tački grede zavisi od visine naslaganih vreća na tom mestu. Da bi opterećenje bilo definisano, treba odrediti funkciju q(x) tako da je sila koja deluje na mali element grede dužine dx, Slika 9.5 b):

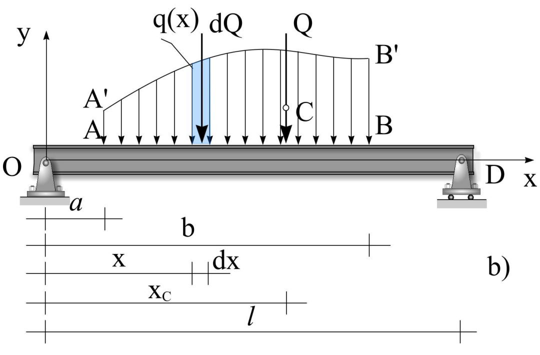
$$dQ = q(x)\,dx\,. \tag{9.13}$$

Ovakvih elementarnih sila duž kontaktne krive ima beskonačno mnogo. Za ovaj sistem paralelnih sila potrebno je odrediti veličinu i položaj rezultante.
Funkcijom q(x) mogu se predstaviti različita opterećenja kojima vreće sa peskom deluju na gredu. Strelice na slici pokazuju u kom smeru opterećenje deluje na gredu.
Kako je proizvod q(x) i dx sila dQ, q(x) se može nazvati *specifičnim opterećenjem*:

$$q = \frac{dQ}{dx}\,, \tag{9.14}$$

koje je dimenzionalno jednako odnosu sile i dužine, pa se njegov intenzitet izražava u njutnima po metru (N/m, kN/m).





Slika 9.5 *a*) Nosač opterećen vrećama cementa; b) specifično opterećenje q.

Intenzitet rezultante linijskog kontinualnog opterećenja

Neka je funkcija q(x) koja opisuje opterećenje raspodeljeno na gredi poznata. Kriva opterećenja ili kontaktna kriva je predstavljena na Slici 9.5 b).

Da bi se odredio intenzitet rezultante kontinualnog opterećenja Q, potrebno je sumirati sve elementarne sile dQ=q(x)dx koje deluju na deo dx štapa dužine *l*, odnosno integraliti krivu opterećenja po x:

$$Q = \int dQ = \int_a^b q(x)dx \,. \tag{9.15}$$

Kako je površina obojenog elementarnog dela dA površi između krive opterećenja i ose x, Slika 9.5 b), jednaka površini pravougaonika $q(x)\,dx = dA$, (kriva gornje ivice može da se aproksimira pravom na maloj dužini dx), zaključuje se iz izraza (9.15) da je rezultanta kontinualnog opterećenja koje deluje na gredu jednaka površini A između krive opterećenja i x ose (površina AA′B′B):

$$Q = \int_a^b q(x)dx = \int_A dA = A \,. \tag{9.16}$$

Ako se površ određena linijom kontakta i elementarnim silama nazove *površ opterećenja*, onda izraz (9.16) znači da je *intenzitet rezultante linijski raspoređenog kontinualnog opterećenja jednak površini površi opterećenja.*

Položaj rezultante linijskog kontinualnog opterećenja

Pošto se sistem sila svodi na rezultantu važi Varinjonova teorema, prema kojoj je moment rezultante u odnosu na neku tačku ili osu jednak sumi momenata komponenata u odnosu na istu tačku ili osu.

Pretpostaviće se da napadna linija rezultante Q prolazi kroz tačku C, koja je na rastojanju x_c od momentne tačke A, Slika 9.5 b). Moment rezultante u odnosu na tačku A jednak je proizvodu njenog intenziteta Q i normalnog rastojanja x_c, dok je moment elementarne sile dQ=q(x)dx jednak xq(x)dx, tako da ukupni moment kontinualnog opterećenja u odnosu na tačku A iznosi $\int_a^b x\,q(x)dx$, pa je:

$$x_C\,Q = \int x\,dQ = \int_a^b x\,q(x)\,dx \,. \tag{9.17}$$

Odavde sledi da je rezultanta kontinualnog opterećenja Q ekvivalentna kontinualnom opterećenju ukoliko se postavi u položaj definisan izrazom:

$$x_C = \frac{1}{Q}\int_a^b x\,q(x)\,dx = \frac{\int_a^b x\,q(x)\,dx}{\int_a^b q(x)\,dx} \,. \tag{9.18}$$

Zamenom $q(x)\,dx = dA$ u izrazu (9.18) dobija se:

$$x_C = \frac{\int_a^b x\,q(x)\,dx}{\int_a^b q(x)\,dx} = \frac{1}{A}\int_A x\,dA \,, \tag{9.19}$$

što predstavlja izraz kojim je definisan položaj težišta površi AA′B′B, (videti poglavlje 9.2, izraz (9.9)), pa se zaključuje da je rezultanta Q kontinualnog opterećenja ekvivalentna kontinualnom opterećenju ukoliko njena napadna linija prolazi kroz težište površi opterećenja (između krive opterećenja i x ose – površ AA′B′B), Slika 9.5 b).
Dakle, *napadna linija rezultante linijski raspoređenog kontinualnog opterećenja prolazi kroz težište površi opterećenja*.

Intenzitet rezultante linijski raspoređenog kontinualnog opterećenja jednak je površini površi opterećenja, a napadna linija rezultante prolazi kroz težište površi opterećenja.

9.3.2 Površinska opterećenja

Linijski kontinualno raspoređeno opterećenje je idealizovani model kontakta. U realnim uslovima stvarni kontakt dva tela se ostvaruje uvek na nekoj površi. Tada tela deluju jedna na druga *površinski raspoređenim silama*. Ovde će se posmatrati specijalan slučaj kontakta kada je kontaktna površ ravna, a kontaktne sile upravne na kontaktnu površ i usmerene prema njoj – sile pritiska. Površinski raspoređeno opterećenje se može grafički predstaviti *prostorom opterećenja*, Slika 9.6 *a*). S*pecifično površinsko opterećenje* p(x,y), tj. *opterećenje po jedinici površine*:

$$p(x,y)=\frac{dQ}{dA}, \tag{9.20}$$

je dimenzionalno jednako odnosu sile i površine, pa se njegov intenzitet izražava u njutnima po kvadratnom metru (N/m^2), odnosno paskalima (1 Pa=1 N/m^2). Ako je p(x,y) poznato, onda se odgovarajuća elementarna sila dQ, koja deluje na elementarnu površ dA ploče, definisanu položajem (x,y), Slika 9.6 b):

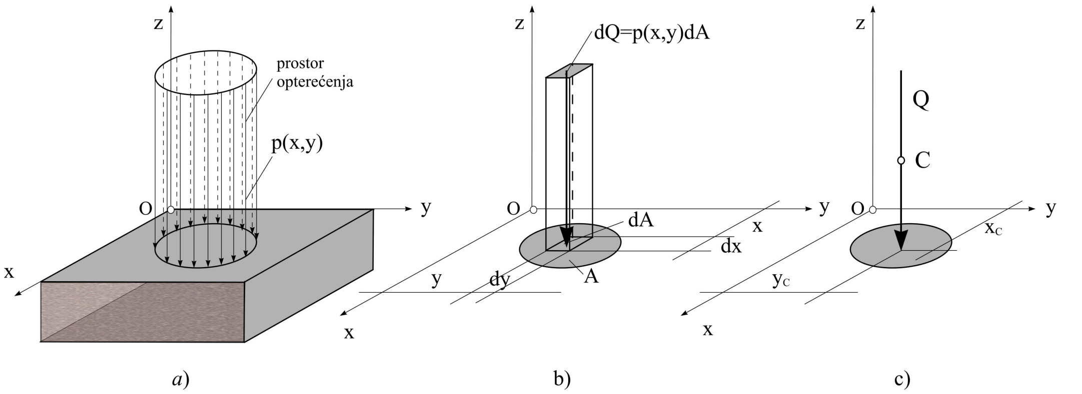
$$dQ = p(x,y)\,dA = p(x,y)\,dx\,dy, \tag{9.21}$$

Jedinica za elementarnu silu dQ je, naravno, njutn, jer (N/m^2) pomnožen sa (m^2) daje (N). Celokupno opterećenje koje deluje na ploču je na ovaj način predstavljeno sistemom paralelnih sila beskonačnog broja, od kojih svaka deluje na različitu elementarnu površ dA.

Intenzitet rezultante površinskog kontinualnog opterećenja
Pošto su sve elementarne sile paralelne, mogu se zameniti rezultantom Q, koja je jednaka njihovom zbiru:

$$Q=\int_A p(x,y)\,dA=\int_V dV, \tag{9.22}$$

gde je $p(x,y)\,dA = dV$ elementarna zapremina prostora opterećenja, što je sa Slike 9.6 b) očigledno. Iz izraza (9.22) se zaključuje da je *intenzitet rezultante površinski raspoređenog kontinualnog opterećenja jednak zapremini prostora opterećenja.*



Slika 9.6 *a*) Površinski raspoređeno opterećenje; b) opterećenje na elementu površi; c) rezultanta površinskog opterećenja.

Položaj rezultante površinskog kontinualnog opterećenja

Neka napadna linija rezultante Q prolazi kroz tačku C koja je na rastojanju x_c od ose y, odnosno na rastojanju y_C od ose x, Slika 9.6 c). Tada je prema Varinjonovoj teoremi moment rezultante u odnosu na ose x i y jednak sumi momenata komponenata u odnosu na te iste ose:

$$x_C Q = \int_A x\, dQ = \int_A x\, p(x,y)\, dA,$$
$$y_C Q = \int_A y\, dQ = \int_A y\, p(x,y)\, dA, \tag{9.23}$$

odakle su koordinate tačke C:

$$x_C = \frac{1}{Q}\int_A x\, dQ = \frac{1}{Q}\int_A x\, p(x,y)\, dA,$$
$$y_C = \frac{1}{Q}\int_A y\, dQ = \frac{1}{Q}\int_A y\, p(x,y)\, dA, \tag{9.24}$$

čime je određen položaj rezultante površinskog kontinualnog opterećenja.

Kako je $p(x,y)\,dA = dV$, a na osnovu izraza (9.22) rezultanta Q je jednaka zapremini prostora opterećenja V, zamenom u (9.24) sledi:

$$x_C = \frac{1}{Q}\int_A x\, dQ = \frac{1}{V}\int_A x\, dV,$$
$$y_C = \frac{1}{Q}\int_A y\, dQ = \frac{1}{V}\int_A y\, dV. \tag{9.25}$$

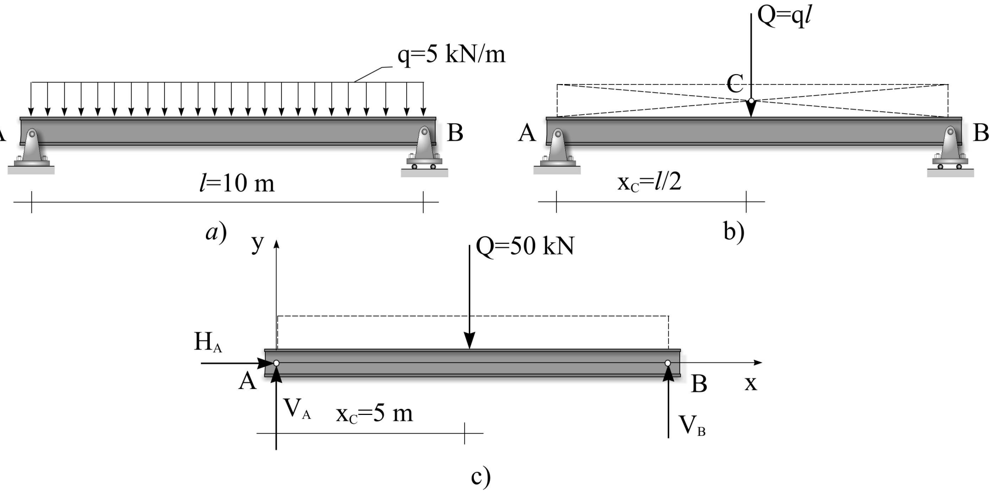
Upoređenjem izraza (9.25) sa izrazima (9.6) za određivanje položaja težišta zapremine, zaključuje se da *napadna linija rezultante površinski raspoređenog kontinualnog opterećenja prolazi kroz težište prostora opterećenja*.

Intenzitet rezultante površinski raspoređenog kontinualnog opterećenja jednak je zapremini prostora opterećenja, a njena napadna linija prolazi kroz težište prostora opterećenja.

Primeri ravnoteže nosača opterećenih linijskim kontinualnim opterećenjem

Primer 9.9

Greda raspona l=10 m opterećena je jednako podeljenim opterećenjem q=5 kN/m, Slika P 9.9 *a*). Odrediti rezultantu i položaj rezultante kontinualnog opterećenja, kao i reakcije veza u A i B.



Slika P 9.9 *a*) Greda opterećena kontinualnim opterećenjem; b) kontinualno opterećenje predstavljeno svojom rezultantom; c) greda oslobođena veza.

Opterećenje koje deluje na gredu je linijski raspodeljeno po celoj dužini grede konstantnog intenziteta q=5 kN/m, Slika P 9.9 *a*). Oblik dijagrama opterećenja je pravougaonik čija je površina jednaka intenzitetu rezultante kontinualnog opterećenja, Slika P 9.9 b), tj:

$$Q = q\,l = \left(5\,\mathrm{kN/m}\right)\left(10\,\mathrm{m}\right) = 50\,\mathrm{kN}\,.$$

Napadna linija rezultante kontinualnog opterećenja prolazi kroz težište pravougaonika, pa je:

$$x_C = \frac{l}{2} = 5\,\mathrm{m}\,.$$

Greda oslobođena veza – nepokretnog oslonca u A i pokretog oslonca u B prikazana je na Slici P 9.9 c). Pošto je raspodeljeno opterećenje predstavljeno svojom rezultantom i reakcije veza prikazane na oslobođenom telu, sada mogu da se primene jednačina ravnoteže:

$$\sum X = 0 \;\rightarrow\; H_A = 0\,,$$

$$\sum Y = 0 \;\rightarrow\; V_A + V_B - Q = 0\,,$$

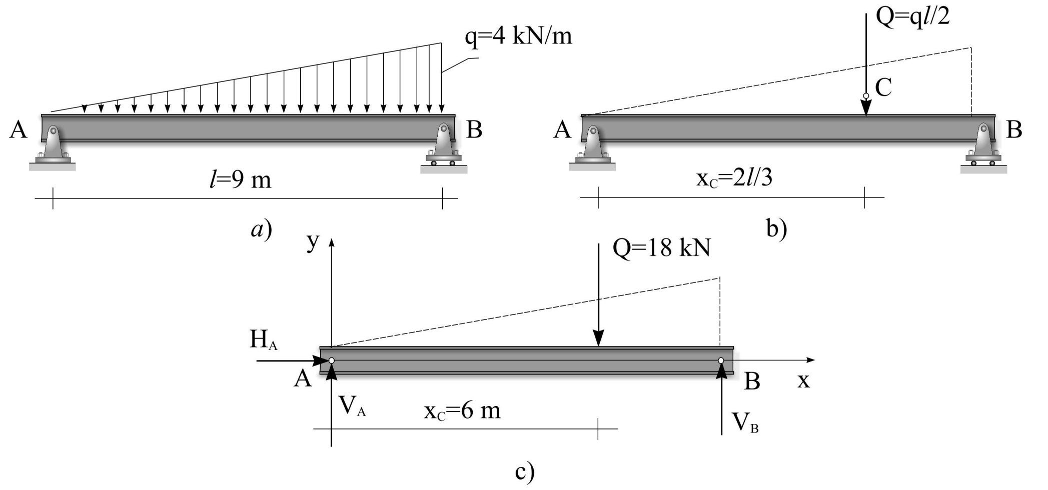
$$\sum M_A = 0 \;\rightarrow\; 10\,V_B - 5\,Q = 0\,,$$

čijim se rešavanjem dobijaju reakcije veza:

$$V_B = \frac{Q}{2} = 25\,\mathrm{kN}, \quad V_A = Q - V_B = \frac{Q}{2} = 25\,\mathrm{kN}, \quad H_A = 0\,.$$

Primer 9.10

Greda raspona l=9 m opterećena je linijskim kontinualnim opterećenjem u obliku trougla, čija je vrednost u B q=4 kN/m, Slika P 9.10 *a*). Odrediti rezultantu i položaj rezultante kontinualnog opterećenja, kao i reakcije veza u A i B.



Slika P 9.10 *a*) Greda opterećena trougaonim opterećenjem; b) kontinualno opterećenje predstavljeno svojom rezultantom; c) greda oslobođena veza.

Opterećenje koje deluje na gredu raspodeljeno je po celoj dužini grede i menja se po linearnom zakonu od nule, na levom kraju grede, do 4 kN/m na desnom kraju. Oblik dijagrama opterećenja je trougao čija je površina jednaka rezultanti kontinualnog opterećenja, Slika P 9.10 b), tj:

$$Q = \frac{ql}{2} = \frac{(4\,\mathrm{kN/m})(9\,\mathrm{m})}{2} = 18\,\mathrm{kN},$$

a njena napadna linija prolazi kroz težište trougla koje je na rastojanju od tačke A:

$$x_C = \frac{2l}{3} = 6\,\mathrm{m}.$$

Jednačine ravnoteže glase:

$$\sum X = 0 \;\rightarrow\; H_A = 0,$$

$$\sum Y = 0 \;\rightarrow\; V_A + V_B - Q = 0,$$

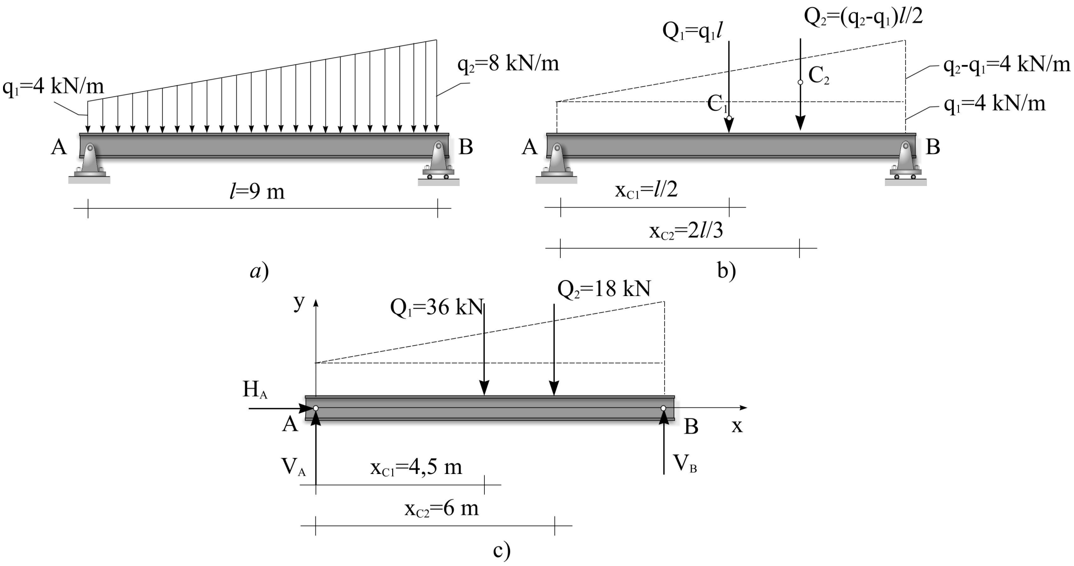
$$\sum M_A = 0 \;\rightarrow\; 9V_B - 6Q = 0.$$

Reakcije veza su:

$$V_B = \frac{2Q}{3} = 12\,\mathrm{kN}, \quad V_A = Q - V_B = \frac{Q}{3} = 6\,\mathrm{kN}, \quad H_A = 0.$$

Primer 9.11

Prosta greda raspona l=9 m opterećena je opterećenjem koje se linearno menja od vrednosti q_1=4 kN/m na levom kraju, do vrednosti q_2=8 kN/m na desnom kraju, Slika P 9.11 *a*). Odrediti rezultantu i položaj rezultante kontinualnog opterećenja, kao i reakcije veza u A i B.



Slika P 9.11 a) Greda opterećena trapeznim opterećenjem; b) trapezno kontinualno opterećenje predstavljeno rezultantama pravougaonog i trougaonog opterećenja; c) greda sa reakcijama veza.

Oblik dijagrama opterećenja je trapez koji može da se predstavi kao zbir pravougaonika i trougla čije su površine jednake rezultantama kontinualnih opterećenja Q_1 i Q_2, Slika P 9.11 b):

$$Q_1 = q_1\, l = 4\cdot 9 = 36\,\text{kN}\,,\; Q_2 = \frac{(q_2 - q_1)\, l}{2} = \frac{(8-4)\cdot 9}{2} = 18\,\text{kN}\,.$$

Težište pravougaonika i težište trougla su na rastojanjima od tačke A:

$$x_{C_1} = \frac{l}{2} = 4{,}5\,\text{m},$$

$$x_{C_2} = \frac{2l}{3} = 6\,\text{m}.$$

Na Slici P 9.11 c) je predstavljeno telo oslobođeno veza, za koje se primenjuju jednačine ravnoteže:

$$\sum X = 0 \;\rightarrow\; H_A = 0\,,$$

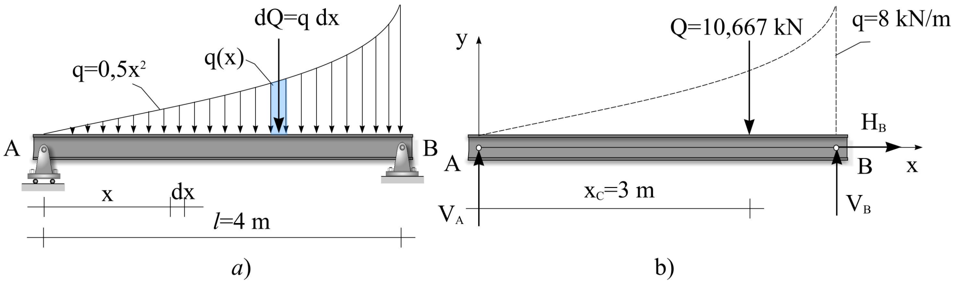
$$\sum Y = 0 \;\rightarrow\; V_A + V_B - Q_1 - Q_2 = 0\,,$$

$$\sum M_A = 0 \;\rightarrow\; 9\,V_B - 4{,}5\,Q_1 - 6\,Q_2 = 0\,,$$

na osnovu kojih su reakcije veza:

$$V_B = 30\,\text{kN},\quad V_A = Q_1 + Q_2 - V_B = 24\,\text{kN},\quad H_A = 0\,.$$

Primer 9.12
Greda je po celoj dužini raspona *l*=4 m opterećena kontinualnim opterećenjem koje se menja po zakonu $q=0{,}5x^2$ kN/m, Slika 9.12 *a*). Odrediti rezultantu i položaj rezultante kontinualnog opterećenja, kao i reakcije veza u A i B.



Slika P 9.12 *a*) Greda opterećena kontinualnim opterećenjem $q=0{,}5x^2$; b) greda oslobođena veza.

Pošto je funkcija opterećenja q=q(x) poznata, ovaj problem se rešava integracijom elementarne površine $dA=q(x)\,dx=0{,}5\,x^2dx$, koja je na Slici P 9.12 *a*) prikazana osenčenim segmentom. Primenom izraza (9.16) i (9.18), tj (9.19) određuje se rezultanta Q kontinualnog opterećenja, kao i njen položaj:

$$Q=\int_A^B dQ=\int_L q(x)dx=\int_0^4 0{,}5x^2dx=0{,}5\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4=0{,}5\frac{4^3}{3}=10{,}667\,\text{kN},$$

$$x_C=\frac{1}{Q}\int_L x\,q(x)\,dx=\frac{\int_0^4 x\left(0{,}5\,x^2\right)dx}{10{,}667}=3\,\text{m}.$$

Greda oslobođena veza – pokretnog oslonca u A i nepokretnog oslonca u B prikazana je na Slici P 9.12 b). Pošto je raspodeljeno opterećenje predstavljeno svojom rezultantom i reakcije veza prikazane na oslobođenom telu, mogu da se primene jednačina ravnoteže:

$$\sum X=0\;\rightarrow\;H_B=0,$$

$$\sum Y=0\;\rightarrow\;V_A+V_B-Q=0,$$

$$\sum M_A=0\;\rightarrow\;4V_B-3Q=0,$$

čijim se rešavanjem dobija:

$$V_B=\frac{3Q}{4}=8\,\text{kN},\quad V_A=Q-V_B=2{,}667\,\text{kN},\quad H_B=0.$$

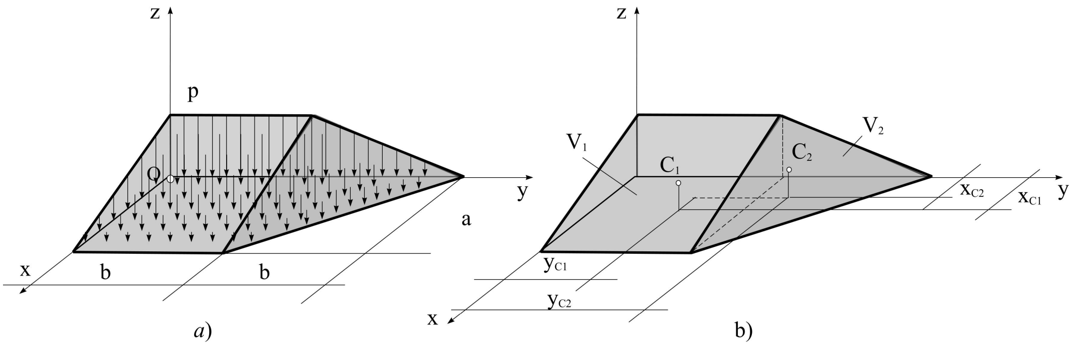
Nosač u primeru 9.9 je opterećen linearnim ravnomerno raspoređenim opterećenjem u obliku pravougaonika, a u primeru 9.10 je linearno promenljivo linijsko kontinualno opterećenje u obliku trougla. To su jednostavne površi opterećenja za koje su površine, odnosno položaji težišta poznati. U primeru 9.11 opterećenje je takođe linearno promenljivo – raspoređeno u obliku trapeza koji može da se podeli na dve jednostavne površi – pravougaonik i trougao, dok je u primeru 9.12 kontinualno opterećenje definisano funkcijom $q=0{,}5x^2$, pa se integracijom određuju površina i položaj težišta površi opterećenja.

VAŽNE NAPOMENE

- Ravan sistem linijski kontinualno raspoređenih sila karakteriše se *specifičnim opterećenjem q*, tj. veličinom sile koja deluje na jedinicu dužine opterećenog odsečka grede $q = \frac{dQ}{dx}$, a njegov intenzitet meri se u njutnima po metru N/m (sila/ dužina)
- Intenzitet rezultante Q linijski raspoređenog kontinualnog opterećenja jednak je površini A površi opterećenja.
- Napadna linija rezultante Q kontinualnog opterećenja prolazi kroz težište površi opterećenja
- Sistem površinski kontinualno raspoređenih sila karakteriše se *specifičnim opterećenjem* $p(x, y) = \frac{dQ}{dA}$, tj. veličinom sile koja deluje na jedinicu površine ploče, a njegov intenzitet se izražava u njutnima po kvadratnom metru (N/m^2), odnosno paskalima (1 Pa=1 N/m^2)
- Intenzitet rezultante površinski raspoređenog kontinualnog opterećenja jednak je zapremini V prostora opterećenja
- Napadna linija Q površinski raspoređenog kontinualnog opterećenja prolazi kroz težište prostora opterećenja

Primer određivanja rezultante površinskog kontinualnog opterećenja

Primer 9.13
Odrediti intenzitet rezultante površinskog opterećenja i njen položaj, Slika P 9.13 *a*).



Slika P 9.13 *a*) Površinsko opterećenje; b) prostor opterećenja podeljen na prizmu zapremine V_1 i piramidu zapremine V_2.

Prostor opterećenja treba podeliti na dva dela – prizmu i piramidu, kao što je prikazano na Slici P 9.13 b). Zapremina ovih tela je:

$$V_1 = \frac{1}{2}abp, \quad V_2 = \frac{1}{3}\frac{ab}{2}p = \frac{1}{6}abp,$$

pa je rezultanta kontinualnog opterećenja:

$$Q = V_1 + V_2 = \frac{2}{3}a\,b\,p,$$

a koordinate njihovih težišta su:

$$x_{C_1} = \frac{1}{3}a, \quad y_{C_1} = \frac{1}{2}b, \quad z_{C_1} = \frac{1}{3}p, \quad x_{C_2} = \frac{1}{4}a, \quad y_{C_2} = b + \frac{1}{4}b, \quad z_{C_1} = \frac{1}{4}p.$$

Položaj težišta celog prostora opterećenja određuje se primenom izraza (9.5) za određivanje težišta zapremine složenog tela:

$$x_C = \frac{x_{C_1}V_1 + x_{C_2}V_2}{V} = \frac{5}{16}a,$$

$$y_C = \frac{y_{C_1}V_1 + y_{C_2}V_2}{V} = \frac{11}{16}b,$$

$$z_C = \frac{z_{C_1}V_1 + z_{C_2}V_2}{V} = \frac{5}{16}p.$$

Ovim je određen položaj rezultante površinskog opterećenja.

Najvažnije u ovom poglavlju

- Šta je težište tela, zapremine, površi i linije i kako se ono određuje
- Kako se raspodeljeno opterećenje može zameniti rezultantom
- Kako se određuje rezultanta i položaj rezultante linijskog kontinualnog opterećenja
- Rezultanta i položaj rezultante površinskog kontinualnog opterećenja