KRUŽNA PLOČA OPTEREĆENA PROMENLJIVIM ROTACIONO SIMETRIČNIM OPTEREĆENJEM

Diferencijalna jednačina kružne ploče izložene rotaciono simetričnom opterećenju je izvedena u obliku:

$$\frac{d^4W}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3W}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2W}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dW}{dr}=\frac{z(r)}{K}. \tag{1}$$

Rešenje jednačine (1) jednako je zbiru opšteg rešenja W_o odgovarajuće homogene jednačine i parktikularnog integrala W_p nehomogene jednačine.

$$W=W_o+W_p$$

- **Homogeni deo rešenja diferencijalne jednačine**

Opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine je označeno sa W_o.

$$\frac{d^4W_o}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3W_o}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2W_o}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dW_o}{dr}=0 \tag{2}$$

Umesto promenljive *r* može da se uvede bezdimenzionalna promenljiva $\rho=\frac{r}{a}$, gde je *a* proizvoljna konstanta, pri čemu *a* može da predstavlja i poluprečnik kružne ploče (što je veoma povoljno za rešavanje zadataka). U tom slučaju rešenje glasi:

$$W_0=C_1+C_2\rho^2+C_3\ln\rho+C_4\rho^2\ln\rho, \tag{3}$$

- **Partikularni deo rešenja diferencijalne jednačine za promenljivo rotaciono simetrično opterećenje**

Partikularni integral w_p **zavisi od opterećenja** i može se odrediti neposredno putem integracije ili na način koji je u nastavku prikazan za slučaj ploče opterećene promenljivim raspodeljenim opterećenjem *p(r)*.

$$\frac{d^4W_p}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3W_p}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2W_p}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dW_p}{dr}=\frac{p(r)}{k}. \tag{4}$$

Pretpostavimo rešenje partikularnog integrala W_p u obliku:

$$W_p=\sum A_m r^m. \tag{5}$$

Gde su A_m koeficijenti koje ćemo odrediti iz uslova da ovako pretpostavljeno rešenje zadovoljava diferencijanu jednačinu (5).

Izvod funkcije (6) je jednak zbiru izvoda sabiraka $w_p=A_m r^m$ pretpostavljenog rešenja.

$$\begin{aligned}
\frac{dw_p}{dr} &= A_m m r^{m-1} \\
\frac{d^2 w_p}{dr^2} &= A_m m(m-1) r^{m-2} \\
\frac{d^3 w_p}{dr^3} &= A_m m(m-1)(m-2) r^{m-3} \\
\frac{d^4 w_p}{dr^4} &= A_m m(m-1)(m-2)(m-3) r^{m-4}
\end{aligned} \tag{6}$$

(6) → (4) => $\sum A_m r^{m-4}\left[m(m-1)(m-2)(m-3)+2m(m-1)(m-2)-m(m-1)+m\right]=\frac{p(r)}{K}$ (7)

Kako je p(r) polinom, to i desna strana jednakosti predstavlja zbir sabiraka. Da bi jednakost mogla biti zadovoljena, neophodno je da bude jednak broj sabiraka sa leve i sa desne strane jednakosti. Dakle, sa leve strane treba da ima onoliko sabiraka koliko sabiraka ima polinom sa desne strane. Izjednačava se jedan sabirak sa leve strane jednačine sa odgovarajućim sabirkom sa desne strane. Pri tome je neophodno da stepeni uz r budu jednaki, pa se iz tog uslova određuje m. Ostaje još da se koeficijent u sabirku levo izjednači sa koeficijentom u odgovarajućem sabirku desno, odakle se određuje vrednost koeficijenta A_m za svaki deo pretpostavljenog partikularnog dela rešenja Wp funkcije ugiba W.

Konačno je $W = W_o + W_p$.

Integracione konstante C_1, C_2, C_3, C_4 koje figurišu u tom izrazu se određuju iz graničnih i prelaznih uslova ploče.

U okviru prethodnog predavanja je bilo reči o graničnim i prelaznim uslovima koje je neophodno postaviti i ispuniti pri rešavanju zadataka koji se odnose na kružne ploče.

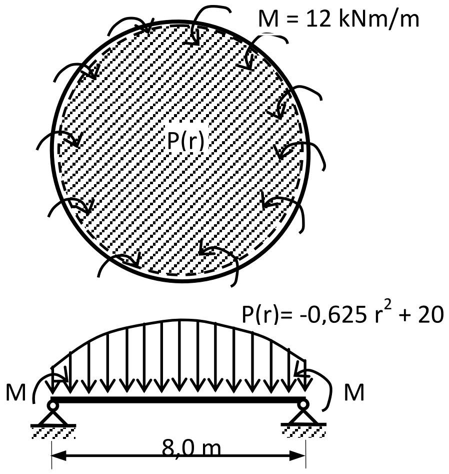
Za slučaj rotacione simetrije izrazi za sile u presecima su ranije izvedeni u obliku:

$$\begin{aligned}
M_r &= -K\left(\frac{d^2W}{dr^2}+\nu\frac{1}{r}\frac{dW}{dr}\right) \\
M_\varphi &= -K\left(\frac{1}{r}\frac{dW}{dr}+\nu\frac{d^2W}{dr^2}\right) \\
T_r &= -K\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2W}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW}{\partial r}\right) \\
M_{r\varphi} &= M_{\varphi r} = T_\varphi = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

PRIMER

Za datu ploču i opterećenje sračunati i nacrtati dijagrame ugiba W, momenata savijanja M_r i transverzalnih sila T_r.

ν = 0.3



Rešenje:

$$\nu = 0,30$$

$$\frac{d^4W}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3W}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2W}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dW}{dr}=\frac{p_{(r)}}{k}...(a)$$

$$W = W_0 + W_p$$

$$W_0 = \overline{C_1} + \overline{C_2}\rho^2$$

$$W_p = \Sigma A_m \cdot r^m$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{dW_p}{dr} = mA_m \cdot r^{m-1} \\ \dfrac{d^2W_p}{dr^2} = m(m-1)\cdot A_m \cdot r^{m-2} \\ \dfrac{d^3W_p}{dr^3} = m(m-1)(m-2)\cdot A_m \cdot r^{m-3} \\ \dfrac{d^4W_p}{dr^4} = m(m-1)(m-2)(m-3)\cdot A_m \cdot r^{m-4} \end{cases}\right\}...(b)$$

$$(b)\rightarrow(a)\Rightarrow \Sigma A_m \cdot r^{m-4}\left[m(m-1)(m-2)(m-3)+2m(m-1)(m-2)-m(m-1)+m\right]=-\frac{0,625}{k}r^2+20$$

$$za\ m-4=2\Rightarrow m=6\Rightarrow A_m\cdot 576=-\frac{0,625}{k}$$

$$A_m=-\frac{0,625}{576\cdot k}\Rightarrow W_p^{\mathrm{I}}=-\frac{0,625\cdot a^6}{576\cdot k}\cdot\rho^6$$

$$za\ m-4=0\Rightarrow m=4\Rightarrow A_m\cdot 64=\frac{20}{k}$$

$$A_m=\frac{20}{64k}\Rightarrow W_p^{\mathrm{II}}=-\frac{20\cdot a^4}{64k}\cdot\rho^4$$

$$W=\frac{a^4}{64k}(20\rho^4-1,111\cdot\rho^6+C_1+C_2\rho^2)$$

$$\frac{dW}{dr}=\frac{a^3}{64k}(80\rho^3-6,666\rho^5+2C_2\rho)$$

$$\frac{d^2W}{dr^2}=\frac{a^2}{64k}(240\rho^2-33,333\rho^4+2C_2)$$

$$\frac{d^3W}{dr^3}=\frac{a}{64k}(480\rho-133,332\rho^3)$$

Granični uslovi:

$$\rho=\frac{r}{a}=\frac{a}{a}=1\Rightarrow$$

$$W=0...(1)$$

$$M_r=12,00...(2)$$

$$M_r=-k(\frac{d^2W}{dr^2}+\frac{\nu}{2}\frac{dW}{dr})$$

$$M_r=-\frac{a^2}{64}\left[240\rho^2-33,333\rho^4+2C_2+0,3(80\rho^2-6,666\rho^4+2C_2)\right]$$

$$M_r=-\frac{1}{4}\left[264\rho^2-35,333\rho^4+2,6C_2\right]$$

$$(2)\Rightarrow-\frac{1}{4}(264-35,333+2,6C_2)=12$$

$$228,667+2,6C_2=-48\Rightarrow C_2=-106,410$$

$$(1)\Rightarrow 20-1,111+C_1+C_2=0$$

$$C_1=-20+1,111+106,410=87,521$$

$$W=4(20\rho^4-1,11\rho^6+87,521-106,410\rho^2)$$

$$W_{\rho=1}=0$$

$$W_{\rho=0,5}=\frac{248,604}{k}$$

$$W_{\rho=0}=\frac{350,084}{k}$$

$$M_r=-\frac{1}{4}(264\rho^2-35,333\rho^4-276,667)$$

$$M_{r,\rho=1}=12,00kNm/m'$$

$$M_{r,\rho=0,5}=53,219kNm/m'$$

$$M_{r,\rho=0}=69,167kNm/m'$$

$$T_r = -\frac{a}{64k}(640\rho - 160\rho^3) = \frac{4 \cdot 160}{64k}\left(4\rho - \rho^3\right)$$

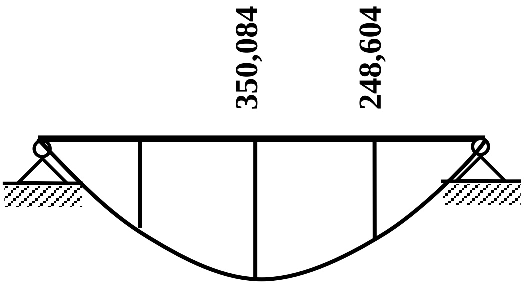
$$T_r = -10(4\rho - \rho^3)$$

$$T_{r,\rho=1} = -30kN/m^{'}$$

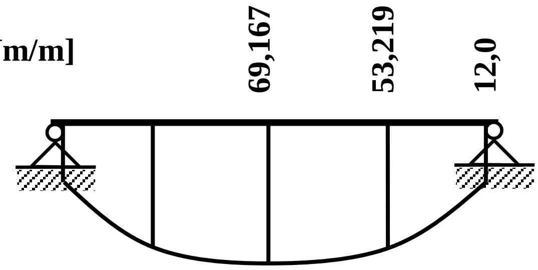
$$T_{r,\rho=0,5} = -18,75kN/m^{'}$$

$$T_{r,\rho=0} = 0kN/m^{'}$$

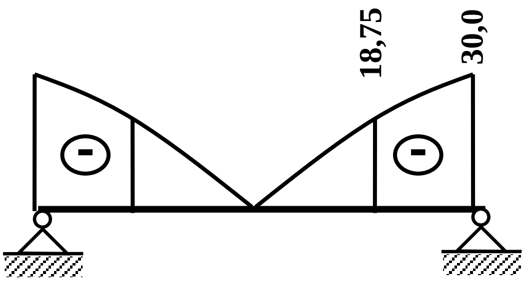
kW



M_r [kNm/m]

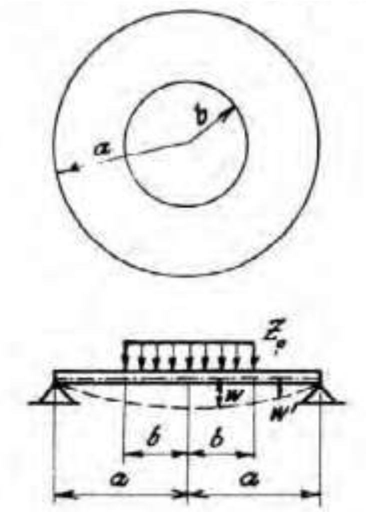


T_r [kN/m]



SLOBODNO OSLONJENA PLOČA OPTEREĆENA KONCENTRISANOM SILOM U CENTRU

Iz rešenja izvedenog za delimišno opterećenu punu kružnu ploču sa slike koja sledi (koje se može izvesti kako je pokazano u knjizi Teorija površinskih nosača, Hajdin) može da se izvede rešenje za kružnu ploču opterećenu koncentrisanom silom u sredini.



Opterećenje koncentrisanom silom se zamenjuje statički ekvivalentnim raspodeljenim opterećenjem:

$$P = Z_o a^2 \beta^2 \pi$$

$$Z_o a^2 \beta^2 = \frac{P}{\pi}.$$

Kada se ova vrednost unese u izraz za ugib W' na delu ploče gde nema površinskog opterećenja,

$$W' = \frac{Z_o a^4 \beta^2}{16K}\left[\frac{2(3+\nu)-(1-\nu)\beta^2}{2(1+\nu)}\left(1-\rho^2\right)+2\rho^2 \ln\rho + \beta^2 \ln\beta\right],$$

za β teži nuli dobija se rešenje u obliku:

$$W = \frac{Pa^2}{16\pi K}\left[\frac{3+\nu}{1+\nu}\left(1-\rho^2\right)+2\rho^2 \ln\rho\right].$$

Maksimalni ugib je u sredini ploče $W = \frac{3+\nu}{16(1+\nu)} \cdot \frac{Pa^2}{K\pi}$.

Sa ovom funkcijom ugiba sile u presecima su oblika:

$$M_r = -\frac{P(1+\nu)}{4\pi} \cdot \ln\rho$$

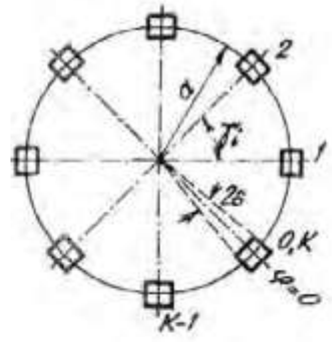
$$M_r = -\frac{P}{4\pi}\left[(1-\nu)-(1+\nu)\ln\rho\right]$$

$$T_r = -\frac{P}{2\pi a\rho}$$

KRUŽNA PLOČA OSLONJENA NA STUBOVE OPTEREĆENA RAVNOMERNO RASPODELJENIM OPTEREĆENJEM

(Preuzeto iz knjige Teorija površinskih nosača, Hajdin=

Ploča prikazana na slici 29 oslonjena je u tačkama ... k, na medjusobno jednakom rastojanju. Rezultanta reakcije na jednom osloncu je $\frac{P}{K}$, gde je P rezultanta ukupnog opterećenja $P = g_o \pi a^2$ a K broj oslonaca. Na sl. 30 su prikazane ove reakcije na razvijenoj projekciji obima ploče, pod pretpostavkom da se na širini stuba rasprostiru kao jednako podeljeno opterećenje. Ovakvo opterećenje možemo da razvijemo u Fourier-ov red sa periodom $\frac{2\pi a}{K}$ pa dobijamo



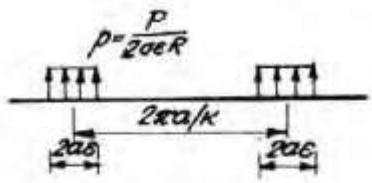
Sl. 29.

$$\bar{p}(\varphi) = \frac{P}{a\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_n \frac{\sin nK\varepsilon}{nK\varepsilon} \cos nK\varphi\right) \qquad (I.101)$$
$$n = 1, 2, 3 \ldots$$

Rešenje problema pretpostavljamo u obliku zbira :

$$W = W' + W'' \qquad (I.102)$$

Sa W' ćemo označiti rešenje za slobodno oslonjenu ploču (I.79) a sa W'' partikularni integral homogene diferencijalne jednačine u obliku :



Sl. 30.

$$w'' = A_o + \sum_m (A_m r^m + B_m r^{m+2}) \cos m\varphi \qquad (I.103)$$

gde je $m = Kn$, a $n = 1,2,3,\ldots\ldots$

Konstante A_m i B_m odredjujemo iz uslova da je momenat savijanja M_r na konturi jednak nuli i da je reaktivno opterećenje po konturi jednako opterećenju $\bar{p}(\varphi)$

$$(M_r'')_{r=a} = 0 \qquad (\bar{T}_r'')_{r=a} + \frac{P}{2\pi a} = -\bar{p}(\varphi)$$

Konstantu A_o koja je bez značaja za naprezanje odredjujemo iz uslova da je W'' u sredini jednog od oslonaca ravan nuli. Samim tim će biti ugib i nad ostalim osloncima jednak nuli.