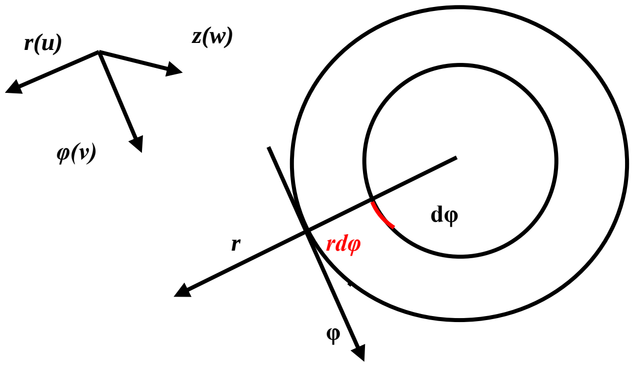
KRUŽNA PLOČA OPTEREĆENA ROTACIONO SIMETRIČNIM OPTEREĆENJEM

Specijalan slučaj opterećenja na kružnoj ploči jeste rotaciono simetrično opterećenje. Za rotaciono simetrično opterećenje važi da za svako φ ima isti intenzitet, t.j. da ne zavisi od ugla φ. Ako su i granični uslovi rotaciono simetrični, izvodi svih funkcija, kojima je opisano stanje naprezanja i deformacije, po φ su jednaki nuli.



Komponentalna pomeranja

Pretpostavke koje važe u teoriji savijanja tankih ploča važe i u ovom slučaju.

1) Linearni element, upravan na srednju ravan pre deformacije, ostaje prav, nepromenjene dužine i upravan na deformisanu srednju ravan i nakon deformacije.

2) Prilikom defomacije ne menja se dužina kao ni ugao između linijskih elemenata srednje ravni.

3) Normalni naponi σ_z za ravni paralelne sa srednjom ravni smatraju se malim u poređenju sa ostalim komponentalnim naponima i mogu se zanemariti.

Iz prve pretpostavke zaključujemo:

- Nema promene dužine linijskog elementa u z pravcu, pa je $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, odakle zaključujemo da funkcija w ne zavisi od promenljive z, dok od φ ne zavisi zbog rotacione simetrije, pa sledi da je ugib samo funkcija koordinate r, t.j.

$$w = w(r) \tag{1}$$

- Po pretpostavci su klizanja u vertikalnim ravnima jednaka nuli, pa je

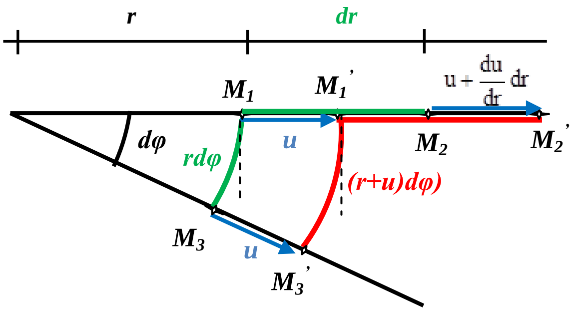
$\gamma_{zr} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \Rightarrow u = -z\frac{\partial w}{\partial r}$, a kako je W funkcija jedne promenljive, ovaj izraz se zapisuje

$$u = -z\frac{dw}{dr} \tag{2}$$

$\gamma_{z\varphi} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r\partial\varphi} = 0 \Rightarrow v = -z\frac{\partial w}{r\partial\varphi} = 0$ jer je zbog rotacione simetrije $\frac{\partial w}{\partial\varphi} = 0$. Dakle, u ovom specijalnom slučaju opterećenja je

$$v = 0 \tag{3}$$

Komponentalne deformacije



Slika 1.

Izrazi za komponentalne deformacije se izvode posmatrajući deformaciju diferencijalno malih linijskih elemenata u dva upravna pravca, duži M_1M_2 i luka M_1M_3. Dilatacija se izračunava po definiciji, kao promena neke dužine usled deformacije podeljena sa dužinom pre deformacije, t.j.

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell}. \tag{4}$$

Tako je:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta\overline{M_1M_2}}{M_1M_2} = \frac{\frac{du}{dr}dr}{dr} = \frac{du}{dr} = \frac{d\left(-z\frac{dw}{dr}\right)}{dr} = -z\frac{d^2w}{dr^2} \tag{5}$$

Luk je pr deformacije bio dužine $M_1M_3 = rd\varphi$, a posle deformacije $M_1'M_3' = (r+u)d\varphi$. Promena dužine luka se izračunava kao razlika nove i prvobitne dužine.

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\Delta\overline{M_1M_3}}{M_1M_3} = \frac{(r+u)d\varphi - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{u}{r} = -\frac{z}{r}\frac{dw}{dr} \tag{6}$$

Sa Slike 1. se vidi da je

$$\gamma_{r\varphi} = 0, \tag{7}$$

jer je prav ugao $M_2M_1M_3$ ostao prav i posle deformacije zbog jednakog pomeranja tačaka M_1 i M_3 u radijalnom pravcu.

Komponentalni naponi i sile u preseku

Prema Hook-ovom zakonu veze između napona i deformacija su:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\varphi\right) = -\frac{E\cdot z}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\varphi + \nu\varepsilon_r\right) = -\frac{E\cdot z}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2w}{dr^2}\right)$$

$$\tau_{r\varphi} = G\gamma_{r\varphi} = 0$$

(8)

Momenti savijanja M_r, M_φ i momet torzije $M_{r\varphi}$ se dobijaju preko ranije izvedenih izraza za sile u presecima u funkciji napona:

$$M_r = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_r z dz$$

$$M_\varphi = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\varphi z dz \ , \qquad (9)$$

$$M_{r\varphi} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{r\varphi} z dz$$

u koje se unose izrazi za napone u konkretnom slučaju, i sprovodi se integracija, posle čega se izrazi za momente dobijaju u obliku:

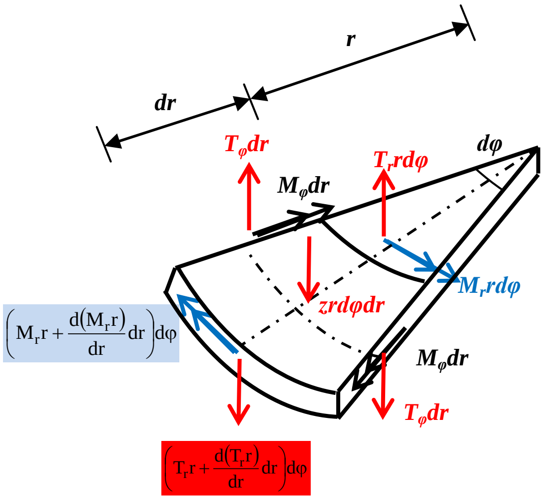
$$M_r = -K\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right)$$

$$M_\varphi = -K\left(\nu\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) \qquad (10)$$

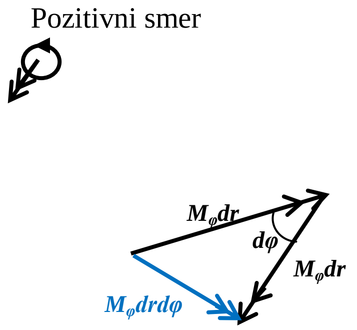
$$M_{r\varphi} = 0$$

Uslovi ravnoteže

Kao posledica rotacione simetrije, sve veličine u presecima na rastojanju *r* od centra, na jednom koncentričnom krugu, su konstantne. U presecima na rastojanju r***dφ*** na tom krugu nema promene ni jedne funkcije u pravcu ose *φ*, pa s toga funkcije T_φ *i* M_φ nemaju priraštaje u tom pravcu.



Slika 2.a



Slika 2.b

$$\sum M_\varphi = 0 \Rightarrow \left(M_r r + \frac{d(rM_r)}{dr} dr \right) d\varphi - M_r r d\varphi - M_\varphi dr d\varphi - T_r r dr d\varphi = 0 \Rightarrow \frac{d(rM_r)}{dr} - M_\varphi - T_r r = 0 \quad (11)$$

$$\sum M_r = 0 \Rightarrow T_\varphi dr \left(\frac{r+dr}{2} \right) d\varphi - zrd\varphi dr \left(\frac{r+dr}{2} \right) d\varphi = 0 \Rightarrow T_\varphi = 0 \quad (12)$$

(zanemaruju se male veličine višeg reda)

$$\sum Z = 0 \Rightarrow \frac{d(T_r r)}{dr} + z \cdot r = 0 \quad (13)$$

Transverzalne sile

Iz uslova ravnoteže (11) se dobija izraz za transverzalnu silu T_r tako što se ova jednačina reši po T_r, unesu izrazi za M_r i M_φ, kao i odgovarajući izvodi tih funkcija:

$$T_r = -k \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \quad (14)$$

Diferencijalna jednačina se dobija, kada se u uslov ravnoteže (13) unese izvod proizvoda $T_r r$ po promenljivoj r:

$$\boxed{\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{z}{k}}. \quad (15)$$

Jednačina (15) predstavlja diferencijalnu jednačinu kružne ploče po nezavisno promenljivoj r.

Rešenje jednačine (15) dato je zbirom parktikularnog integrala w_p (date nehomogene jednačine) i opšteg rešenja w_0 homogenog dela jednačine.

Homogeni deo rešenja diferencijalne jednačine

Da bi rešili ovu jednačinu uvodimo smenu $r=e^t$. Tako dobijamo:

$$\frac{d^4w}{dt^4}-4\frac{d^3w}{dt^3}+4\frac{d^2w}{dt^2}=0\,. \tag{16}$$

Njeno rešenje glasi:

$$w_0=\overline{C}_1+\overline{C}_2e^{2t}+\overline{C}_3t+\overline{C}_4te^{2t}$$

odnosno,

$$w_0=\overline{C}_1+\overline{C}_2r^2+\overline{C}_3\,ln\,r+\overline{C}_4r^2\,ln\,r\,.$$

Umesto promenljive r može da se uvede bezdimenzionalna promenljiva $\rho=\frac{r}{a}$, gde je a proizvoljna konstanta, a može da predstavlja i poluprečnik kružne ploče (što je veoma povoljno za rešavanje zadataka). U tom slučaju rešenje glasi:

$$w_0=C_1+C_2\rho^2+C_3\,ln\,\rho+C_4\rho^2\,ln\,\rho\,, \tag{17}$$

Pri čemu su nepoznate veličine konstante C_1, C_2, C_3, C_4.

Za slučaj rotacione simetrije izrazi za sile u preseku svode se na:

$$\begin{aligned}
M_r&=-k\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\nu\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)\\
M_\varphi&=-k\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}+\nu\frac{d^2w}{dr^2}\right)\\
T_r&=-k\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{\partial r}\right)\\
M_{r\varphi}&=M_{\varphi r}=T_\varphi=0
\end{aligned} \tag{18}$$

Partikularni deo rešenja diferencijalne jednačine

Partikularni integral w_p **zavisi od opterećenja** i može se odrediti neposredno putem integracije ili na način koji je u nastavku prikazan za slučaj ploče opterećene jednako podeljenim opterećenjem $z=p$.

$$\frac{d^4w_p}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3w_p}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2w_p}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dw_p}{dr}=\frac{p}{k}\,. \tag{19}$$

Pretpostavimo rešenje partikularnog integrala W_p u obliku:

$$W_p = A_m r^m . \tag{20}$$

Potražićemo izvode pretpostavljenog rešenja i zamenićemo ih u jednačini (19).

$$\begin{aligned}
\frac{dw_p}{dr} &= A_m m r^{m-1} \\
\frac{d^2w_p}{dr^2} &= A_m m(m-1)r^{m-2} \\
\frac{d^3w_p}{dr^3} &= A_m m(m-1)(m-2)r^{m-3} \\
\frac{d^4w_p}{dr^4} &= A_m m(m-1)(m-2)(m-3)r^{m-4}
\end{aligned} \tag{21}$$

$$(21) \rightarrow (19) \Rightarrow \; A_m r^{m-4}[m(m-1)(m-2)(m-3)+2m(m-1)(m-2)-m(m-1)+m]=\frac{p}{k} \tag{22}$$

Da bi leva i desna strana jednakosti bile jednake, potrebno je da stepeni uz r budu jednaki. Opterećenje *p* smo zadali kao jednakopodeljeno tj. ravnomerno raspodeljeno opterećenje. To znači da je *p=const* odnosno

$$A_m \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{m-4}}[m(m-1)(m-2)(m-3)+2m(m-1)(m-2)-m(m-1)+m]=\frac{p}{k}\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{0}} \tag{23}$$

Izjednačavamo stepen uz r sa leve strane sa stepenom uz r sa desne strane znaka jednakosti:

$$m-4=0 \Rightarrow m=4$$

Unosimo vrednost m=4 u jednačinu (22)

$$A_m r^{4-4}[4(4-1)(4-2)(4-3)+2\cdot 4(4-1)(4-2)-4(4-1)+4]=\frac{p}{k}r^0 .$$

Rešavanjem ove jednačine po A_m.dobija se vrednost ove konstante za slučaj ploče opterećene jednako podeljenim opterećenjem

$$A_m \cdot 64=\frac{p}{k} \Rightarrow A_m=\frac{p}{64k} \; .$$

Sada možemo napisati vrednost partikularnog dela rešenja uvodeći $\rho=\frac{r}{a}$:

$$w_p = A_m r^m \Rightarrow w_p = \frac{p}{64k}\rho^4 a^4$$

Ukupno rešenje diferencijalne jednačine ploče opterećene ravnomerno raspodeljenim površinskim opterećenjem biće $w = w_0 + w_p$, tj

$$\boxed{w=\frac{pa^4}{64k}\left(\rho^4+C_1+C_2\rho^2+C_3\ln\rho+C_4\rho^2\ln\rho\right)}$$

Nepoznati koeficijenti su C_1, C_2, C_3, C_4 koje određujemo iz graničnih uslova.

Ako ploča nema površinsko opterećenje, rešenje je ustvari rešenje homogenog dela jednačine tj.

$$\boxed{w=C_1+C_2\rho^2+C_3\ln\rho+C_4\rho^2\ln\rho}$$

Ako na ploči deluje površinsko opterećenje koje je proizvoljno a poznata je njegova funkcija, potrebno je odrediti partikularni deo rešenja po uzoru na ploču opterećenu ravnomerno raspodeljenim opterećenjem.

Granični uslovi

Granični uslovi kružne ploče mogu biti konturni i prelazni uslovi. Svi granići uslovi postavljaju se u odgovarajućem preseku, koji je određen veličinom ρ, koja pak zavisi od poluprečnika r , i važe samo na tom mestu.

a) Konturni uslovi.

Konturni uslovi definišu se na konturi, za određenu vrednost promenljive veličine ρ. Kako je ploča rotaciono simetrična uvek posmatramo desni deo ploče, jer su tako izvedeni izrazi za sile u presecima. Razmotrićemo različite slučajeve konture.

Slobodna kontura (slobodan kraj). U tom slučaju moment savijanja *Mr* i transverzalna sila *Tr* jednaki su nuli. U slučaju da na tom mestu deluju moment *M* ili sila *F* onda je *Mr=M* i *Tr=F* , pri čemu vodimo računa o njihovom znaku.

$$\begin{array}{ll}1) & \mathrm{M_r}=0\\ 2) & \mathrm{T_r}=0\end{array}\quad \text{ili} \quad \begin{array}{ll}1) & \mathrm{M_r}=\mathrm{M}\\ 2) & \mathrm{T_r}=\mathrm{T}\end{array}.$$

Slobodno oslonjena kontura. Konturni uslovi biće:

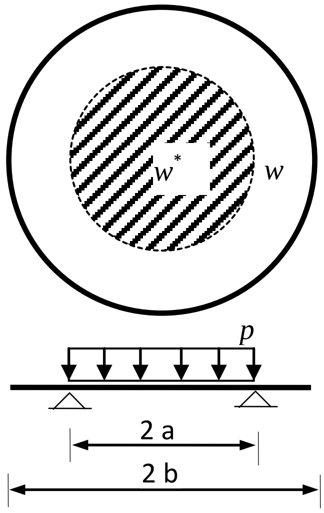
$$\begin{array}{ll}1) & \mathrm{w}=0\\ 2) & \mathrm{M_r}=0\end{array}\quad \text{ili} \quad \begin{array}{ll}1) & \mathrm{w}=0\\ 2) & \mathrm{M_r}=\mathrm{M}\end{array}.$$

Uklještena kontura. Konturni uslovi biće:

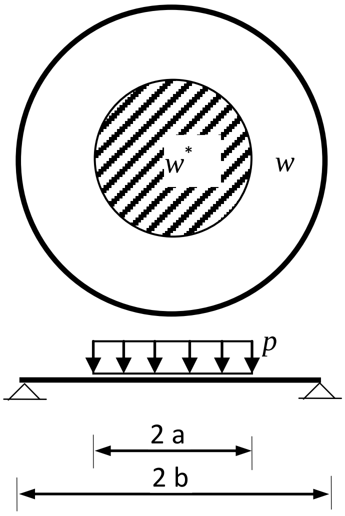
$$\begin{array}{ll}1) & \mathrm{w}=0\\ 2) & \dfrac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dr}}=0\end{array}.$$

Kod prstenastih ploča (ploče sa otvorom), postoje četiri granična uslova.

b) Prelazni uslovi. Prelazni uslovi javljaju se kod kružnih ploča koje imaju prepust (Sl.3.a) i kod punih kružnih ploča (Sl.3.b).



Slika 3.a Kružna ploča sa prepustom



Slika 3.b Puna kružna ploča

Kod ploča sa prepustom prelazne uslove postavljamo na mestu oslonca. Razlikuju se dve funkcije ugiba i to:

jedna funkcija ugiba, ovde označena sa w^*, koja važi na delu ploče $0 < r < a$ i

druga funkcija ugiba, ovde označena sa w, koja važi na delu ploče $a < r < b$.

Prelazne uslove postavljamo na mestu $r=a$ i ima ih ukupno četiri:

1) $w = 0$

2) $w^* = 0$

3) $\dfrac{dw}{dr} = \dfrac{dw^*}{dr}$.

4) $M_r = M_r^*$

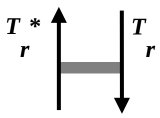
Kod punih poča (kao na Sl.3.b) na kojima na jednom delu ploče deluje površinsko opterećenje, rešenje jednačine označeno je sa w^*, a na delu ploče bez opterećenja rešenje jednačine označeno je sa w. Prelazni uslovi biće:

1) $w = w^*$

2) $\dfrac{dw}{dr} = \dfrac{dw^*}{dr}$

3) $M_r = M_r^*$

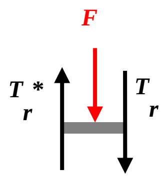
4) $T_r = T_r^*$.



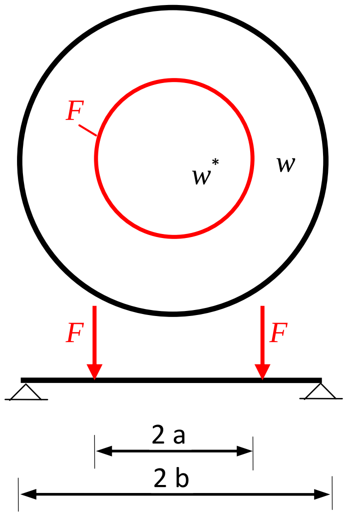
Slika 4.

Četvrti uslov dobijamo kada postavimo uslov ravnoteže diferencijalno malog prstena na mestu gde postavljamo granični uslov. Transverzalne sile pretpostavimo da su pozitivne (videti Sl.7). Ako bi na tom mestu delovalo linijsko opterećenje, potrebno je i njega uzeti u obzir (videti Sl.8), pa je u tom slučaju četvrti uslov:

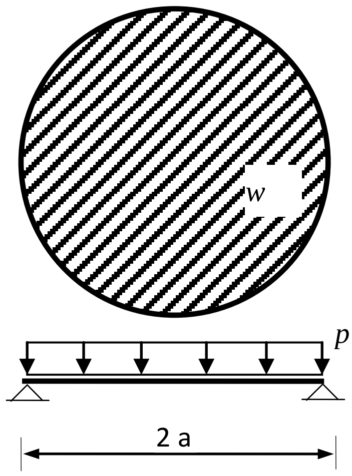
4) $T_r^* - T_r - F = 0$



Slika 5.



Sl.6 Puna kružna ploča



Sl.7 Puna kružna ploča

c) U slučaju da je puna ploča data kao na Sl.7, rešenje diferencijalne jednačine prema prethodnim izrazima biće u obliku:

$$w = \frac{pa^4}{64k}\left(\rho^4 + C_1 + C_2\rho^2 + C_3 \ln\rho + C_4\rho^2 \ln\rho\right).$$

Granični uslovi postavljaju se na mestu $r=a$, pa ako je za uporedni poluprečnik izabrano a , biće na tom mestu ρ=1, jer je $\rho = \frac{r}{a} = \frac{a}{a} = 1$. Granični uslovi su:

1) $w = 0$
2) $M_r = 0$

Ostale uslove postavljamo na mestu r=0 odnosno ρ=0. Kako je $ln0 \to -\infty$, a ugib ploče na tom mestu svakako ima neku konačnu vrednost, zaključujemo iz USLOVA O KONAČNOSTI UGIBA da su koeficijenti uz $ln\rho$ jednaki nuli, odnosno funkcija ugiba je u tom slučaju:

$$w = \frac{pa^4}{64k}\left(\rho^4 + C_1 + C_2\rho^2\right).$$

Sada treba izračunati dve konstante C_1 i C_2 uz pomoć dva konturna uslova koja smo prethodno postavili.