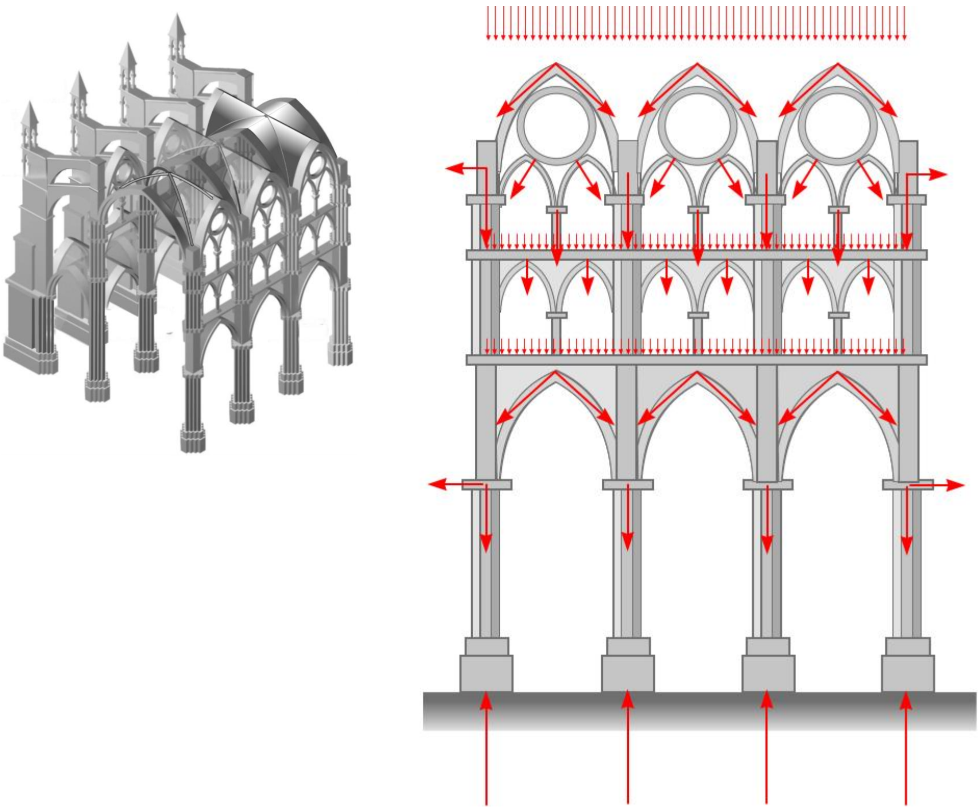
Poglavlje 6

PROIZVOLJNI SISTEMI SILA U RAVNI

Ciljevi poglavlja

- Predstavljanje sistema sila jednostavnijim ekvivalentnim sistemima sila
- Da se pokaže kako se sila premešta u neku tačku van njene napadne linije
- Da se pokaže kako se proizvoljni sistem sila u ravni redukuje u neku tačku
- Svođenjenje proizvoljnog sistema sila u ravni na prostiji oblik
- Određivanje rezultante proizvoljnog sistema sila
- Određivanje jednačine napadne linije rezultante sistema sila u ravni



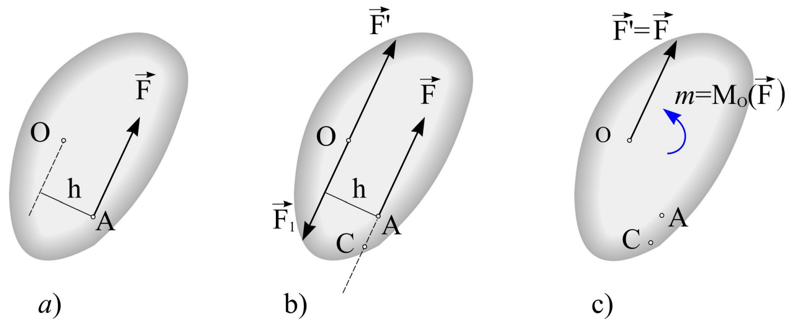
Proizvoljni sistem sila u ravni na primeru srednjevekovne gotske građevine od kamena

U statici se proučava ravnoteža tela i određuju neophodni uslovi da telo opterećeno silama zadrži stanje mirovanja ili jednolikog pravolinijskog kretanja. Da bi uslovi ravnoteže sistema sila mogli da se izvedu u opštem slučaju, neophodno je izvršiti transformaciju sistema sila na ekvivalentni sistem za koji se mogu utvrditi ovi uslovi. Prvo će se pokazati postupak redukcije sile u neku tačku, da bi se problem proširio na proizvoljni sistem sila u ravni u ovom poglavlju, a u prostoru u poglavlju 11.

6.1 Redukcija sile u tačku

U okviru aksioma statike je pokazano da se sila može premeštati duž svoje napadne linije pri čemu se njeno dejstvo na telo ne menja (Teorema o pomeranju sile duž njene napadne linije, poglavlje 3.3.3). Ovde će se pokazati postupak paralelnog premeštanja – redukcije sile u tačku koja je van njene napadne linije.

Teorema o redukciji sile u tačku: *Sila, koja deluje na kruto telo, se može premestiti (redukovati) paralelno u bilo koju tačku tela van njene napadne linije ako se pri tome doda spreg, čiji je moment jednak momentu te sile u odnosu na tačku u koju se sila prenosi.*



Slika 6.1 *a*) Sila $\vec{F}$ u tački A i redukciona tačka O; b) dodavanje uravnoteženog sistema sila; c) ekvivalentan sistem.

Ova teorema se zbog zanačaja u statici zove i *osnovna teorema statike*. Dokaz će se izvesti na osnovu aksioma statike i definicije sprega kao statičkog elementa, poglavlje 5.3.

Na kruto telo deluje sila $\vec{F}$ u tački A, Slika 6.1 *a*). Dejstvo ove sile se ne menja, ako se u bilo kojoj tački O doda uravnoteženi sistem sila, $\vec{F}_1$ i $\vec{F}'$, na osnovu treće aksiome, pri čemu je $\vec{F}' = \vec{F}$, $\vec{F}_1 = -\vec{F}$, a njihova napadna linija paralelna datoj sili, Slika 6.1 b).

Sile $\vec{F}$ i $\vec{F}_1$ obrazuju spreg čiji je moment:

$$m = F\,h\,. \tag{6.1}$$

Vektor momenta sprega je upravan na ravan dejstva sprega, Slika 6.2 c)

Kako je moment sile $\vec{F}$ u odnosu na tačku O intenziteta $M_O(\vec{F}) = F\,h$ i predstavlja vektor upravan na ravan koja sadrži silu $\vec{F}$ i tačku O:

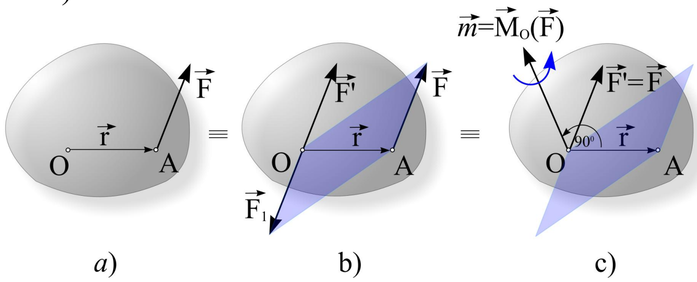
$$\overrightarrow{M}_O\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F}\,, \tag{6.2}$$

znači da je moment sprega jednak momentu sile u odnosu na tačku:

$$m = M_O\left(\vec{F}\right), \quad \vec{m} = \overrightarrow{M}_O\left(\vec{F}\right). \tag{6.3}$$

Dakle, delovanje neke sile $\vec{F}$ na kruto telo u tački A ekvivalentno je delovanju sile $\vec{F}' = \vec{F}$ u tački O i sprega sila čiji je moment određen jednačinom (6.3).

Kako je spreg sila određen svojim momentom, to se kod problema u ravni umesto sprega sila $(\vec{F},\vec{F}_1)$ može nacrtati samo kružna strelica, koja pokazuje smer obrtanja sprega, Slika 6.1 c).

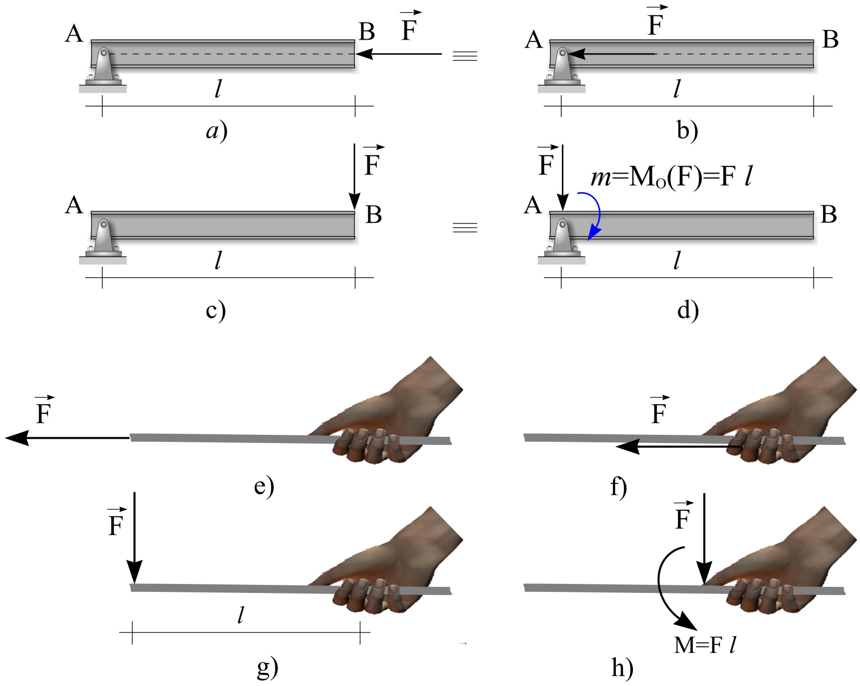


Slika 6.2 *a*) Sila $\vec{F}$ u tački A; b) dodavanje uravnoteženog sistema sila u tački O; c) vektor momenta sprega upravan na ravan dejstva sprega.

Tačka O može da bude bilo koja tačka krutog tela i naziva se *redukciona tačka* ili *centar redukcije*.
Ako se redukciona tačka nalazi na napadnoj liniji sile, na primer tačka C, Slika 6.1, onda je spreg koji se dodaje pri redukciji jednak nuli:

$$\vec{m} = \vec{M}_C\left(\vec{F}\right) = \overrightarrow{CA} \times \vec{F} = 0\,,$$

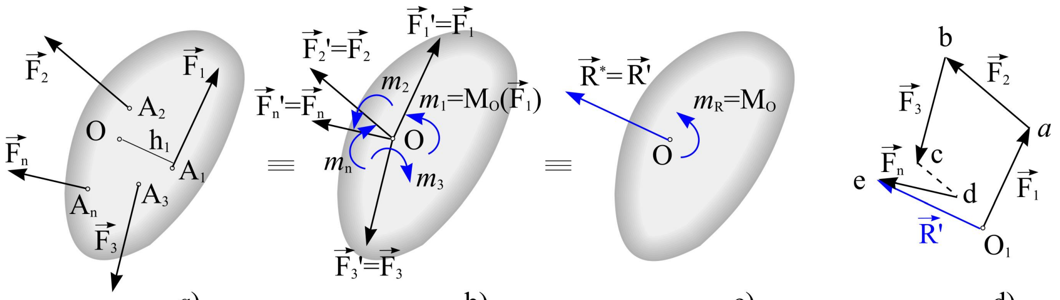
jer su vektori $\overrightarrow{CA}$ i $\vec{F}$ kolinearni. Prema tome, pomeranje napadne tačke sile duž njene napadne linije može se smatrati specijalnim slučajem redukcije pri čemu je spreg koji se dodaje jednak nuli, što je u skladu sa teoremom o pomeranju sile duž njene napadne linije.



Slika 6.3 *a*) Sila $\vec{F}$ u tački B; b) premeštanje sile $\vec{F}$ duž svoje napadne linije u tačku A - dejstvo na telo ne menja; c) sila $\vec{F}$ deluje u tački B; d) premeštanje - redukcija sile $\vec{F}$ u tačku A, pri čemu se javlja spreg sila $m = M_O\left(\vec{F}\right) = F\,l$; e) i f) bez obzira gde deluje sila $\vec{F}$ na napadnoj liniji isti je efekat zatezanja na ruku koja drži štap; g) i h) sila deluje upravno na štap - gura ruku na dole i istovremeno stvara obrtni efekat intenziteta F l na ruku.

6.2 Redukcija ravnog sistema sila u tačku

Ako na jedno kruto telo deluje proizvoljni sistem sila koje leže u istoj ravni, svaka od sila može da se redukuje u jednu proizvoljnu tačku O u istoj ravni, primenom postupka opisanog u poglavlju 6.1, čime se dobija ekvivalentan sistem sila koje deluju u jednoj tački, kao i sistem spregova, što je jednostavnije za analizu i rešavanje praktičnih problema statike.



Slika 6.4 *a*) Sistem sila u ravni; b) sistem sučeonih sila u ravni i sistem spregova u ravni; c) redukciona rezultanta i rezultujući redukcioni spreg; d) poligon sila i glavni vektor.

Na kruto telo deluje proizvoljan sistem sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2,..., \vec{F}_n$ u tačkama A_1, A_2,..., A_n, Slika 6.4 *a*). Kako sile deluju u različitim tačkama na telo, to će se u ravni dejstva sila odabrati proizvoljna tačka O (redukciona tačka) i korišćenjem teoreme o redukciji sile u tačku premestiti sve sile u tačku O. Posle toga na telo deluje sistem sučeonih sila, koje su u istoj ravni, u tački O, Slika 6.4 b):

$$\vec{F}_1' = \vec{F}_1,\ \vec{F}_2' = \vec{F}_2,\ ...,\ \vec{F}_n' = \vec{F}_n, \tag{6.4}$$

kao i sistem spregova u ravni čiji su momenti na osnovu (6.3):

$$m_1 = M_O\left(\vec{F}_1\right),\ m_2 = M_O\left(\vec{F}_2\right),...\ m_n = M_O\left(\vec{F}_n\right). \tag{6.5}$$

Sile koje deluju u tački O mogu se zameniti jednom silom na način opisan u poglavlju 4.1.3. Ova sila se naziva *redukciona rezultanta*:

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + ... + \vec{F}_n' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\ , \tag{6.6}$$

jer je $\vec{F}_1' = \vec{F}_1,\ \vec{F}_2' = \vec{F}_2,\ ...,\ \vec{F}_n' = \vec{F}_n$.

Kako je na osnovu izraza (4.12), poglavlje 4.1.3, *glavni vektor* jednak geometrijskom (vektorskom) zbiru sila sistema, Slika 6.4 d):

$$\vec{R}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \tag{6.7}$$

to je redukciona rezultanta jednaka glavnom vektoru sa napadnom tačkom u redukcionoj tački, zbog čega se i zove redukciona rezultanta, Slika 6.4 c):

$$\vec{R}' = \vec{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\ . \tag{6.8}$$

Sistem spregova sila koji deluju na telo, a leže u istoj ravni, može se zameniti jednim rezultujućim spregom primenom teoreme o slaganju spregova u ravni, poglavlje 5.3.4. Moment rezultujućeg sprega jednak je algebarskom zbiru momenata komponentnih spregova, a kako je moment sprega jednak momentu sile u odnosu na tačku, sledi:

$$m_R = m_1 + m_2 + ... + m_n = M_O\left(\vec{F}_1\right) + M_O\left(\vec{F}_2\right) + ... + M_O\left(\vec{F}_n\right), \tag{6.9}$$

$$m_R = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right). \tag{6.10}$$

Analogno definiciji glavnog vektora usvojena je definicija *glavnog momenta* M_O za algebarski zbir momenata svih sila sistema u odnosu na tačku:

$$M_O = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right), \tag{6.11}$$

pa je:

$$m_R = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = M_O. \tag{6.12}$$

Teorema o redukciji sistema sila u ravni u tačku glasi: *svaki ravan sistem sila, koji deluje na kruto telo, može se zameniti jednom silom* $\vec{R}^*$ *(redukciona rezultanta), koja je jednaka vektorskom zbiru svih sila sistema – glavnom vektoru* $\vec{R}'$*, sa napadnom tačkom u tački O i jednim spregom sila čiji je moment* m_R *jednak algebarskom zbiru momenata svih sila sistema u odnosu na redukcionu tačku O, tj. glavnom momentu* M_O *sistema sila u odnosu na tačku O.*

Glavni vektor $\vec{R}'$ se može odrediti geometrijskim putem konstukcijom poligona sila, Slika 6.4 d), a zatim se paralelno prenese u redukcionu tačku O, čime se dobija redukciona rezultanta $\vec{R}^*$, a može da se odredi i analitičkim putem (poglavlje 4.2.4). Usvoji se Dekartov koordinatni sistem u tački O u odnosu na koji se definišu pravci svih sila sistema pomoću uglova α_1, α_2, α_3, ..., α_n, odnosno β_1, β_2, β_3, ..., β_n, koje sile grade sa osom x i osom y. Projekcije glavnog vektora, tj. redukcione rezultante na koordinatne ose određuju se formulama:

$$\begin{aligned} X_R' &= \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i, \\ Y_R' &= \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\beta_i, \end{aligned} \tag{6.13}$$

na osnovu čega se intenzitet glavnog vektora određuje kao:

$$R' = R^* = \sqrt{\left(X_R'\right)^2 + \left(Y_R'\right)^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}, \tag{6.14}$$

a njegov pravac:

$$\cos\alpha_R = \frac{X_R'}{R'}, \quad \cos\beta_R = \frac{Y_R'}{R'}. \tag{6.15}$$

Intenzitet, pravac i smer glavnog vektora $\vec{R}'$ ne zavise od izbora redukcione tačke, jer poligon sila, Slika 6.4 d), ostaje nepromenjen bez obzira u koju se tačku tela sile sistema redukuju. Intenzitet glavnog momenta M_O određuje se analitičkim putem primenom izraza (6.12) i zavisi od izbora redukcione tačke O, jer se promenom položaja redukcione tačke menja krak sile u odnosu na tačku, tj. krak sprega, kao i znak momenta sile u odnosu na tačku. Zbog toga je prilikom određivanja glavnog momenta potrebno naglasiti u odnosu na koju tačku tela se on sračunava.

VAŽNE NAPOMENE

- Dejstvo proizvoljnog ravnog sistema sila na telo je u potpunosti određeno ako je poznat glavni vektor $\vec{R}'$ i glavni moment M_O
- Dva proizvoljna sistema sila su ekvivalentna ako su im jednaki glavni vektori i glavni momenti
- Glavni vektor $\vec{R}'$ i rezultanta $\vec{R}$ nekog sistema sila su dva različita pojma iako su po pravcu, smeru i intenzitetu isti vektori. Glavni vektor nije rezultanta, jer on sam ne zamenjuje neki sistem sila, već zajedno sa glavnim momentom M_O tog sistema sila. Sem toga, razlika između glavnog vektora i rezultante je u tome što je glavni vektor $\vec{R}'$ slobodan vektor, koji kad se odredi kao završna strana poligona sila može da se prenese u bilo koju redukcionu tačku na telu, čime postaje redukciona rezultanta $\vec{R}^*$, dok je rezultanta $\vec{R}$ kao svaka sila klizeći vektor koji može da se premešta samo po svojoj napadnoj liniji, koja je tačno određena

6.3 Svođenje ravnog sistema sila na prostiji oblik

Svaki ravan sistem sila se može svesti na redukcionu rezultantu $\vec{R}^*$ koja je jednaka glavnom vektoru $\vec{R}'$ i rezultujući spreg m_R čiji je moment jednak glavnom momentu M_O u odnosu na proizvoljnu tačku O tela. U nekim slučajevima sistem sila se svodi samo na jednu silu ili samo na spreg, ili je u ravnoteži, što će biti pokazano u narednoj analizi.

1. Sistem sila je u ravnoteži

Ako su glavni vektor i glavni moment sistema sila koji deluje na kruto telo jednaki nuli:

$$\begin{aligned} \vec{R}' = \vec{R}^* &= \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0, \\ m_R = \sum_{i=1}^{n} m_i &= \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = M_O = 0, \end{aligned} \tag{6.16}$$

onda je sistem sila u ravnoteži, što će biti detaljno obrađeno u poglavlju 7.

2. Sistem sila se svodi na spreg sila

Ako je glavni vektor jednak nuli, a glavni moment različit od nule:

$$\begin{aligned} \vec{R}' = \vec{R}^* &= \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0, \\ m_R = \sum_{i=1}^{n} m_i &= \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = M_O \neq 0, \end{aligned} \tag{6.17}$$

onda se sistem sila svodi na spreg sila. Intenzitet momenta sprega sila u ovom slučaju ne zavisi od izbora redukcione tačke.

3. Sistem sila se svodi na rezultantu koja prolazi kroz redukcionu tačku

Ako se redukcijom dobija:

$$\begin{aligned} \vec{R}' = \vec{R}^* &= \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \neq 0, \\ m_R = \sum_{i=1}^{n} m_i &= \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = M_O = 0, \end{aligned} \tag{6.18}$$

to znači da je dati sistem sila ekvivalentan jednoj sili (videti 3.2.1):

$$\vec{R} \equiv \left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right),$$

rezultanti $\vec{R}$, koja je jednaka glavnom vektoru i deluje u redukcionoj tački O:

$$\vec{R} = \vec{R}' = \vec{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \,. \tag{6.19}$$

4. Sistem sila se svodi na rezultantu koja ne prolazi kroz redukcionu tačku

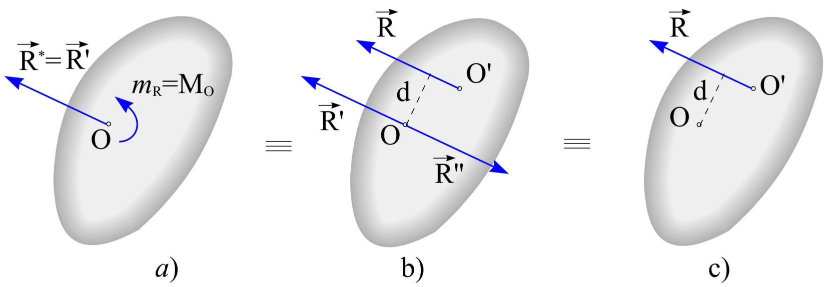
U slučaju kada se redukcijom u proizvoljnu tačku dobiju glavni vektor i glavni moment različiti od nule:

$$\begin{aligned} \vec{R}' = \vec{R}^* &= \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \neq 0, \\ m_R = \sum_{i=1}^{n} m_i &= \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = M_O \neq 0, \end{aligned} \tag{6.20}$$

daljim svođenjem na prostiji oblik dobija se da se takav sistem sila svodi na rezultantu $\vec{R}$, čija napadna linija ne prolazi kroz redukcionu tačku O, već kroz neku drugu tačku tela, što je pokazano u poglavlju 6.4.

6.4 Rezultanta ravnog sistema sila

Ako se pri redukciji ravnog sistema sila u tačku O, sistem sila u ravni svede na redukcionu rezultantu $\vec{R}^* = \vec{R}'$ i spreg, čiji je moment $m_R = M_O$, onda se taj sistem sila može zameniti samo jednom silom – rezultantom, čija napadna linija ne prolazi kroz redukcionu tačku O, već kroz neku drugu tačku tela. Da bi se ovo dokazalo posmatra se redukciona rezultanta $\vec{R}^* = \vec{R}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ u tački O i rezultujući redukcioni spreg, čiji je moment $m_R = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = M_O$, Slika 6.5 *a*), koji su posledica redukcije ravnog sistema sila $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,..., $\vec{F}_n$, koji deluje na kruto telo, u proizvoljno odabranoj tački O:



Slika 6.5 *a*) Redukciona rezultanta i redukcioni spreg; b) spreg sila m_R prikazan silama sprega $\vec{R}$ i $\vec{R}''$; c) rezultanta sistema sila.

Spreg sila čiji je moment m_R se može prikazati silama sprega $\vec{R}$ i $\vec{R}''$, Slika 6.5 b), pa će se, kako je u pitanju ravan sistem sila, sile sprega $\left(\vec{R}, \vec{R}''\right)$ koje leže u ravni delovanja datog sistema sila izabrati tako da su istog intenziteta kao glavni vektor: $R = R'' = R'$.

Kako se spreg može premestiti u bilo koji položaj u svojoj ravni, postaviće se sila $\vec{R}''$ tako da deluje u tački O, i da bude na napadnoj liniji redukcione rezultante $\vec{R}^*$, Slika 6.5 b), dok je druga sila sprega $\vec{R}$ na rastojanju d koje se može odrediti iz:

$$m_R = M_O = R\,d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{m_R}{R} = \frac{M_O}{R}. \tag{6.21}$$

Uravnoteženi sistem sila $(\vec{R}', \vec{R}'')$ se može ukloniti a da se dejstvo na posmatrano telo ne promeni (treća aksioma), tako da se dati sistem sila svodi na jednu silu $\vec{R}$, koja deluje u tački O′. Kako je dati sistem sila ekvivalentan jednoj sili, to je sila $\vec{R} = \vec{R}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ rezultanta datog sistema sila, Slika 6.5 c).

Dakle, *ako je glavni vektor sistema sila različit od nule, tada se dati sistem sila može uvek svesti na rezultantu* $\vec{R}$ *koja je jednaka glavnom vektoru sistema sila*:

$$\vec{R} = \vec{R}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,. \tag{6.22}$$

U poglavlju 5.2 je određivana rezultanta dve paralelne sile istog i suprotnih smerova. Sprovedena analiza i postupak određivanja glavnog vektora i glavnog momenta, odnosno rezultante proizvoljnog sistema sila u ravni, važe i u slučaju da na telo deluje sistem paralelnih sila u ravni, s tim što je u tom slučaju intenzitet glavnog vektora, odnosno rezultante jednak, algebarskom zbiru komponenata:

$$R = R' = \sum_{i=1}^{n} F_i\,. \tag{6.23}$$

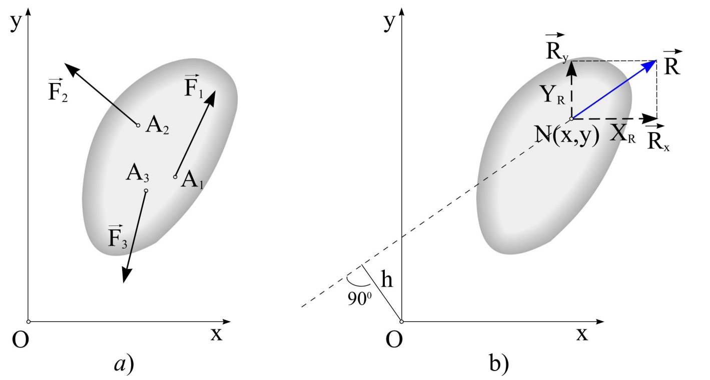
6.4.1 Jednačina napadne linije rezultante

Položaj rezultante ravnog sistema sila može se odrediti i analitičkim putem definisanjem jednačine njene napadne linije.

Primenom postupka slaganja sila koje leže u jednoj ravni, Slika 6.5 c) dobija se jedna sila $\vec{R}$ koja predstavlja rezultantu datog sistema sila. Rezultanta je jednaka glavnom vektoru, izraz (6.22), čije su projekcije:

$$X_R = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i, \qquad Y_R = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\beta_i.$$

Neka je napadna linija rezultante na rastojanju h od tačke O, Slika 6.6 b). Usvoji se proizvoljna tačka N(x,y) na napadnoj liniji rezultante čiju jednačinu treba odrediti.



Slika 6.6 *a*) Proizvoljni sistem sila u ravni; b) rezultanta sistema sila.

Za dati sistem sila Varinjonova teorema u odnosu na tačku O glasi:

$$M_O(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right). \tag{6.24}$$

Primenom Varinjonove teoreme moment rezultante $\vec{R}$ u odnosu na tačku O može da se izrazi i preko momenata komponenata rezultante $\vec{R}_x$ i $\vec{R}_y$ u odnosu na istu tačku:

$$M_O\left(\vec{R}\right) = M_O\left(\vec{R}_x\right) + M_O\left(\vec{R}_y\right) = Y_R\, x - X_R\, y\,. \tag{6.25}$$

Izjednačavanjem izraza (6.24) i (6.25) se dobija:

$$Y_R\, x - X_R\, y = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\, x_i - X_i\, y_i\right), \tag{6.26}$$

što predstavlja jednačinu napadne linije rezultante koja se može napisati u obliku:

$$y = \frac{Y_R}{X_R}x - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\, x_i - X_i\, y_i\right)}{X_R} = \frac{Y_R}{X_R}x - \frac{\sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right)}{X_R}. \tag{6.27}$$

Očigledno je da je dobijena jednačina prave $y = k\,x + n$, gde je:

$$k = \frac{Y_R}{X_R} = \operatorname{tg}\alpha_R\,,$$

$$n = -\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\, x_i - X_i\, y_i\right)}{X_R} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right)}{X_R} = -\frac{M_O}{X_R}. \tag{6.28}$$

Ako je glavni moment M_O jednak nuli napadna linija rezultante prolazi kroz tačku O, pa njena jednačina glasi:

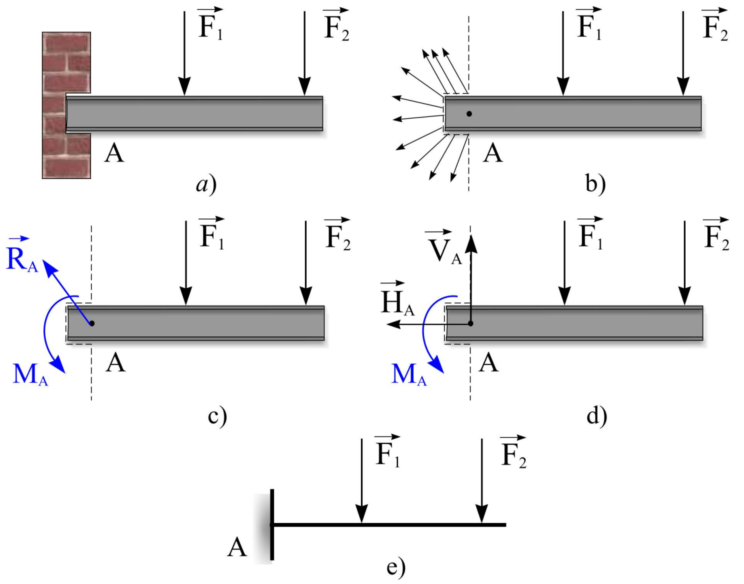
$$y = \frac{Y_R}{X_R}x\,. \tag{6.29}$$

6.5 Veza ostvarena uklještenjem

Pored veza koje su prikazane u poglavlju 3.3.5, postoji veza koja istovremeno ne dozvoljava pomeranje i obrtanje tela. Ovakva veza se naziva *uklještenje,* a telo koje je na jednom kraju uklješteno a na drugom slobodno, naziva se *konzola*, Slika 6.7.

Uklještenje se ostvaruje tako što se jedan kraj tela "uzida" u zid ili tlo, odnosno ostvari se čvrst kontakt između tela i zida, kao što je pokazano na Slici 6.7 *a*). Primenom pete aksiome, telo se oslobađa veze, pri čemu se u svim elementima kontaktne površi pojavljuju sile veze koje predstavljaju proizvoljan sistem sila, kao što je prikazano na Slici 6.7 b). Ako na telo deluje sistem spoljašnjih sila u ravni, onda su i reakcije veza u istoj ravni. Redukcijom ovog sistema kontaktnih sila u tačku A, dobijaju se redukciona rezultanta i redukcioni spreg sila, Slika 6.7 c).

Reakcije veze ostvarene uklještenjem su sila $\vec{R}_A$, unapred nepoznatog intenziteta i pravca i moment sprega M_A, koji se naziva *moment uklještenja*. Pošto je redukciona rezultanta (glavni vektor) u ravni određena ako su poznate njene dve ortogonalne komponente (projekcije X_R i Y_R), reakcija veze $\vec{R}_A$ će se u praktičnim problemima u ovom udžbeniku predstavljati preko horizontalne H_A i vertikalne komponente V_A, Slika 6.7 d). Dakle, veza ostvarena uklještenjem se zamenjuje sa tri nepoznate veličine: H_A, V_A i M_A.



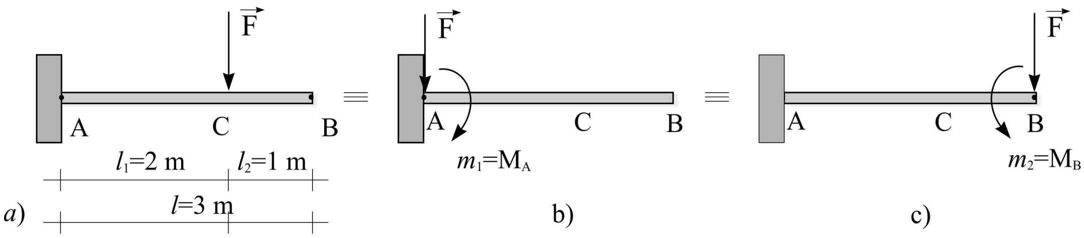
Slika 6.7 *a*) Greda uklještena u zid u A; b) greda oslobođena veze; c) reakcije veze osvarene uklještenjem; d) tri reakcije veze H_A, V_A, M_A; e) šematski prikaz veze.

Uklještenje sprečava i pomeranje u bilo kom pravcu i rotaciju, pa se prilikom oslobađanja veze primenom pete aksiome, na mestu veze postavlja sila $\vec{R}_A$ i moment sprega M_A. Kao i kod zglobne veze sila veze $\vec{R}_A$ se obično predstavlja svojom horizontalnom H_A i vertikalnom komponentom V_A.

Primeri redukcije sile u tačku

Primer 6.1

Redukovati datu silu u tačku A, a zatim je premestiti u tačku B. Sila $\vec{F}$ je intenziteta 2 kN.



Slika P 6.1 *a*) Sila $\vec{F}$ deluje na konzolu u C; b) ekvivalentan sistem u tački A; c) ekvivalentan sistem u tački B.

Redukcijom sile $\vec{F}$ u tačku A dobija se ekvivalentni sistem sila, Slika P 6.1 b), koji se sastoji od iste sile i sprega čiji je moment jednak momentu sile u odnosu na tačku A:

$$M_A = -F \cdot l_1 = -2 \cdot 2 = -4\,\mathrm{kNm},$$

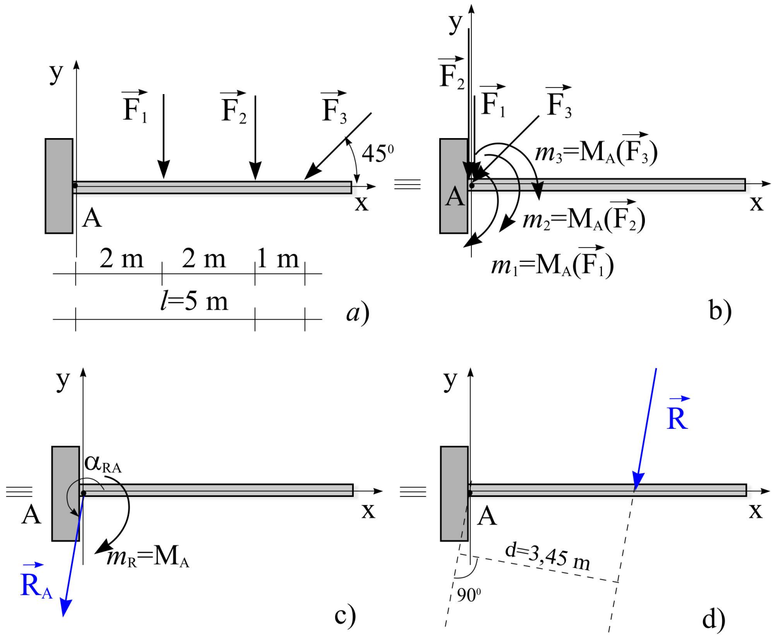
a redukcijom sile $\vec{F}$ u tačku B, Slika P 6.1 c), se dobija ekvivalentni sistem koga čine sila $\vec{F}$ i spreg čiji je moment:

$$M_B = F \cdot l_2 = 2 \cdot 1 = 2\,\mathrm{kNm}.$$

Primeri redukcije sistema sila u ravni u tačku

Primer 6.2

Na konzolu, prikazanu na Slici P 6.2 *a*), deluje ravan sistem sila čiji su intenziteti: $F_1 = 2\,\text{kN}$, $F_2 = 3\,\text{kN}$ i $F_3 = \sqrt{2}\,\text{kN}$. Redukovati sistem sila u tačku A. Odrediti rezultantu sistema sila i njen položaj.



Slika P 6.2 *a*) Konzola opterećena sistemom sila u ravni; b) redukcija svih sila sistema u tačku A; c) ekvivalentan sistem u tački A; d) rezultanta sistema sila.

Kada se primeni teorema o redukciji sile na tačku A dobija se sistem sučeonih sila $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ u tački A i ravan sistem spregova, Slika P 6.2 b), čiji su momenti:

$$m_1 = -F_1 \cdot 2 = -2 \cdot 2 = -4\,\text{kNm},$$

$$m_2 = -F_2 \cdot 4 = -3 \cdot 4 = -12\,\text{kNm},$$

$$m_3 = -F_3 \sin 45^0 \cdot 5 = -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5 = -5\,\text{kNm},$$

Glavni vektor sistema sila se može odrediti geometrijskim putem, kao što je pokazano na Slici 6.4 d), izraz (6.8), ili analitičkim putem, tako što se u odnosu na koordinatni sistem xOy, Slika P 6.2 b), odrede projekcije glavnog vektora na koordinatne ose na osnovu izraza (6.13). Kao što je rečeno, u redukcionoj tački deluje redukciona rezultanta $\vec{R}_A$ koja je jednaka glavnom vektoru, a njene projekcije na ose x i y su:

$$X_{R_A} = \sum_{i=1}^{3} X_i = -F_3 \cos 45° = -\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -1\,\text{kN},$$

$$Y_{R_A} = \sum_{i=1}^{3} Y_i = -F_1 - F_2 - F_3 \sin 45° = -2 - 3 - \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -6\,\text{kN}\,.$$

Zatim se izračuna intenzitet redukcione rezultante (glavnog vektora):

$$R_A = \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{37}\,\text{kN}$$

i pravac:

$$\text{tg}\alpha_{R_A} = \frac{Y_{R_A}}{X_{R_A}} = \frac{-6}{-1} = 6, \quad \alpha_{R_A} = 180° + \text{arc tg}\,6 = 260°30'46''.$$

Sistem spregova sila koji deluju na telo i leže u istoj ravni mogu se zameniti jednim rezultujućim spregom, čiji je moment jednak algebarskom zbiru momenata komponentnih spregova, tj. algebarskom zbiru momenata svih sila u odnosu na tačku A (izraz (6.12)), odnosno glavnom momentu M_A:

$$m_R = \sum_{i=1}^{3} m_i = \sum_{i=1}^{3} M_A\left(\vec{F}_i\right) = M_A = -4 - 12 - 5 = -21\,\text{kNm}.$$

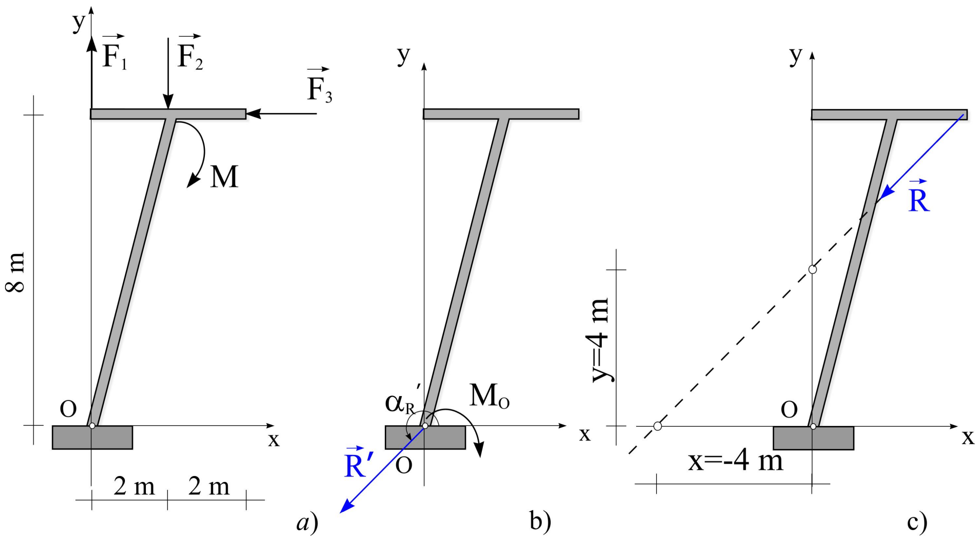
Na ovaj način se dejstvo datog sistema sila može zameniti ekvivalentnim sistemom u tački A, Slika P 6.2 c).

Kada se redukcijom na proizvoljnu tačku dobiju glavni vektor i glavni moment različiti od nule (poglavlje 6.3, slučaj 4), daljim svođenjem na prostiji oblik dobija se da se takav sistem sila svodi na rezultantu $\vec{R}$ čija napadna linija ne prolazi kroz redukcionu tačku A, već kroz neku drugu tačku tela, Slika P 6.2 d). Rezultanta $\vec{R}$ je jednaka glavnom vektoru sistema sila, izraz (6.22): a njena napadna linija je na rastojanju d koje se može odrediti iz izraza (6.21):

$$d = \frac{m_R}{R} = \frac{M_A}{R} = 3,45\,\text{m}.$$

Primer 6.3

Na telo, prikazano na Slici P 6.3 *a*), deluju sile $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$, čiji su intenziteti $F_1 = 2\,\text{kN}$, $F_2 = 6\,\text{kN}$ i $F_3 = 4\,\text{kN}$, kao i spreg sila intenziteta 4 kNm. Redukovati dati sistem sila u tačku O, a zatim odrediti jednačinu napadne linije rezultante.



Slika P 6.3 *a*) Sistem sila u ravni; b) ekvivalentan sistem u tački O; c) rezultanta sistema sila.

Dejstvo sprega sila na telo se u praktičnim proračunima uzima kao koncentrisani moment. Predstavlja se kružnom linijom sa strelicom koja označava smer obrtnog dejstva.
Projekcije redukcione rezultante, odnosno glavnog vektora sistema sila na ose usvojenog koordinatnog sistema, Slika P 6.3 *a*), su:

$$X_R' = \sum_{i=1}^{3} X_i = -4\,\text{kN},$$

$$Y_R' = \sum_{i=1}^{3} Y_i = 2 - 6 = -4\,\text{kN}.$$

Intenzitet je:

$$R^* = R' = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 5{,}67\,\text{kN}\,,$$

a pravac:

$$\text{tg}\alpha_R' = \frac{Y_R'}{X_R'} = \frac{-4}{-4} = 1 \;\Rightarrow\; \alpha_R' = 180° + \text{arctg}\,1 = 225°.$$

Moment rezultujućeg redukcionog sprega jednak je glavnom momentu:

$$M_O = \sum_{i=1}^{3} M_O\left(\vec{F}_i\right) = -F_2 \cdot 2 + F_3 \cdot 8 - M = -6 \cdot 2 + 4 \cdot 8 - 4 = 16\,\text{kNm}\,.$$

Dejstvo sistema sila je zamenjeno redukcionom rezultantom u redukcionoj tački, koja je jednaka glavnom vektoru, i redukcionim spregom, čiji je moment jednak glavnom momentu, Slika P 6.3 b).
Rezultanta sistema sila je jednaka glavnom vektoru, a jednačina napadne linije rezultante može da se odredi primenom izraza (6.26):

$$Y_R\,x - X_R\,y = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = M_O,$$

$$(-4)\,x - (-4)\,y = 16,$$

Napadna linija rezultante je prikazana na Slici P 6.3 c). To je prava $-4x + 4y = 16$, čiji su odsečci na x osi i na y osi: $x = -4\text{m},\;\; y = 4\text{m}$.

Najvažnije u ovom poglavlju

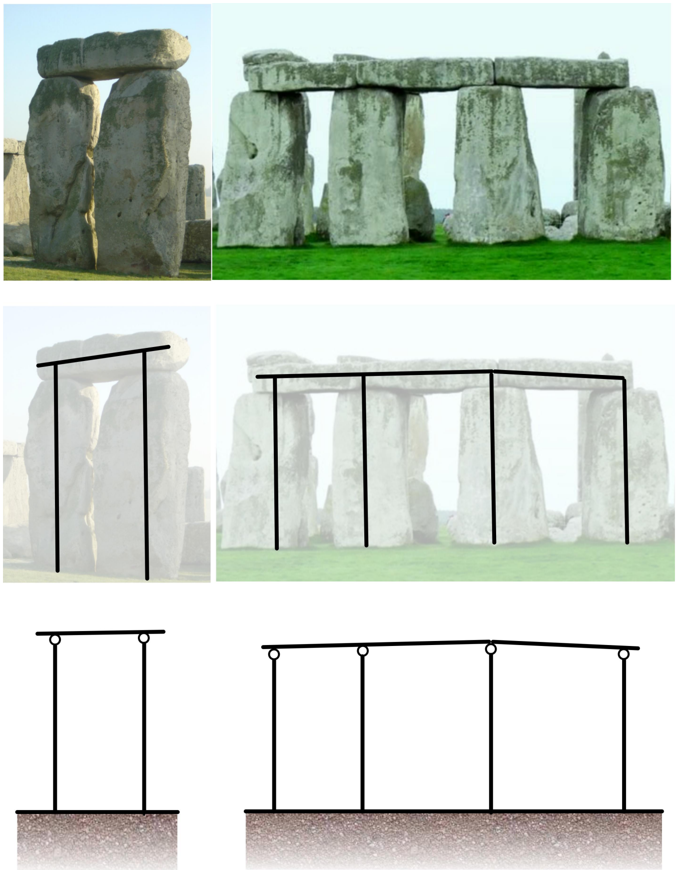
- Kako se sila premešta u tačku van njene napadne linije
- Kako se sistem sila u ravni premešta u tačku i svodi na prostiji oblik
- Šta je redukciona rezultanta i redukcioni spreg sila
- Šta je glavni vektor i glavni moment
- Rezultanta sistema sila u ravni i jednačina napadne linije rezultante
- Veza ostvarena uklještenjem

Poglavlje 7

RAVNOTEŽA TELA U RAVNI

Ciljevi poglavlja

- Izvođenje jednačina (uslova) ravnoteže sistema sila u ravni
- Rešavanje problema ravnoteže krutog tela primenom uslova ravnoteže
- Ravnoteža sistema krutih tela



Stounhendž, Velika Britanija

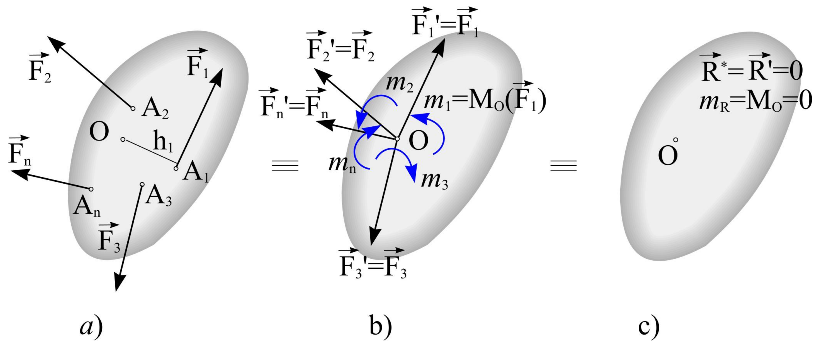
Svi prirodni i veštački objekti opstaju jer su u skladu sa uslovima ravnoteže. Kameni blokovi, prikazani na slici, čine objekte i opstali su više od pet hiljada godina. Veze između blokova i veze sa spoljašnjom sredinom ostvarene su oslanjanjem. Da bi se sračunale reakcije veza, potrebno je primeniti uslove ravnoteže. U ovom poglavlju su definisani uslovi ravnoteže tela pod dejstvom ravnog sistema sila. Potom je pokazano kako se na telu oslobođenom veza primenom uslova ravnoteže određuju nepoznate sile, reakcije i momenti.

7.1 Uslovi ravnoteže ravnog sistema sila

Za ravnotežu proizvoljnog ravnog sistema sila potrebno je i dovoljno da njihov glavni vektor $\vec{R}'$ i glavni moment M_O istovremeno budu jednaki nuli:

$$\begin{aligned} &\vec{R}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0, \\ &m_R = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = M_O = 0, \end{aligned} \tag{7.1}$$

gde je O bilo koja tačka koja se nalazi u ravni dejstva sila, jer kad je glavni vektor jednak nuli, intenzitet glavnog momenta ne zavisi od izbora redukcione tačke (poglavlje 6.3, slučaj 2 – sistem sila se svodi na spreg sila). Uslovi ravnoteže dati izrazom (7.1) predstavljaju uslove ravnoteže proizvoljnog sistema sila u ravni u vektorskom obliku. Prvi od ova dva uslova predstavlja uslov ravnoteže sistema sučeonih sila (poglavlje 4.3, izraz (4.33)), dok druga jednačina predstavlja uslov ravnoteže sistema spregova u ravni (poglavlje 5.3.4, izraz (16)).



Slika 7.1 *a*) Ravan sistem sila; b) redukcijom na tačku O dobija se sistem sučeonih sila u tački O u istoj ravni i sistem spregova takođe u istoj ravni; c) ako je $\vec{R}' = 0$ i $M_O = 0$ sistem sila je u ravnoteži.

Iz uslova ravnoteže (7.1) proizilaze uslovi ravnoteže u analitičkom obliku. Postoje tri oblika uslova ravnoteže u analitičkom obliku.

7.1.1 Prvi osnovni oblik uslova ravnoteže

Kako se intenziteti glavnog vektora i glavnog momenta proizvoljnog sistema sila u ravni određuju primenom izraza (6.14) i (6.12):

$$R' = R^* = \sqrt{X_R^{\,2} + Y_R^{\,2}} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2},$$

$$M_O = m_R = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right),$$

to će uslovi (7.1) biti zadovoljeni ako je:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \tag{7.2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = 0.$$

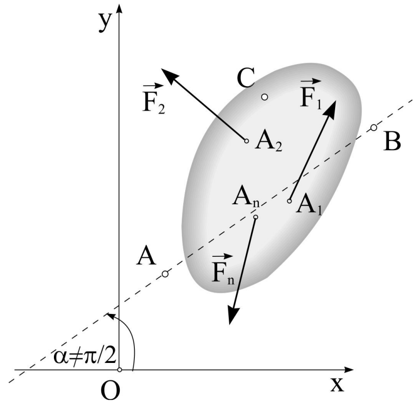
Kada su zadovoljene prve dve jednačine sistema (7.2) glavni vektor $\vec{R}'$ je jednak nuli, a kada je zadovoljena treća jednačina ovog sistema i glavni moment M_O je jednak nuli. Prema tome: *za ravnotežu proizvoljnog ravnog sistema sila koji deluje na kruto telo potrebno je i dovoljno da algebarski zbir projekcija svih sila na svaku od dve proizvoljno izabrane ortogonalne koordinatne ose bude jednak nuli i da je algebarski zbir momenata svih sila u odnosu na bilo koju izabranu tačku O, koja se nalazi u ravni dejstva sila jednak nuli.*
U mehaničkom smislu, prva dva uslova izražavaju nemogućnost pomeranja tela u pravcu koordinatnih osa, a treći uslov izražava nemogućnost obrtanja tela oko ose upravne na ravan dejstva sila.

7.1.2 Drugi oblik uslova ravnoteže

Uslovi ravnoteže proizvoljnog ravnog sistema sila se mogu izraziti i u sledećem obliku:

$$\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_B\left(\vec{F}_i\right) = 0, \tag{7.3}$$
$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0,$$

pri čemu osa x ne sme biti normalna na pravu koja prolazi kroz tačke A i B, u odnosu na koje se računaju momenti sila sistema, Slika 7.2.
Uslovi (7.3) su potrebni i dovoljni za ravnotežu proizvoljnog ravnog sistema sila, što treba i dokazati.



Slika 7.2 Sistem sila u ravni, izbor momentnih tačaka kod primene drugog oblika uslova ravnoteže

Neophodnost ovih uslova je očigledna, jer ako bilo koji od njih nije ispunjen, onda je ili $\vec{R}' \neq 0$, ili $M_A \neq 0 \left(M_B \neq 0\right)$ i ravnoteža ne postoji. Ako su zadovoljene prve dve jednačine uslova (7.3), onda je to samo potreban uslov, ali ne i dovoljan, jer prema 6.3 sistem sila se može tada svesti na rezultantu $\vec{R}$ koja prolazi kroz tačke A i B, Slika 7.2. Prema tome, bilo koja od prve dve jednačine sistema (7.3) obezbeđuje da je glavni moment M_O jednak nuli, a da bi i glavni vektor $\vec{R}'$ bio jednak nuli mora da bude zadovoljena i treća jednačina sistema (7.3). Pri tome osa x ne sme da bude normalna na pravu koja prolazi kroz tačke A i B, jer će tada biti zadovoljen uslov $X_R = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$ samo ako je glavni vektor $\vec{R}'$ jednak nuli. Prema tome: *za ravnotežu proizvoljnog ravnog sistema sila koji deluje na kruto telo potrebno je i dovoljno da algebarski zbir momenata svih sila sistema u odnosu na bilo koje dve tačke A i B koje leže u ravni dejstva sila bude jednak nuli i algebarski zbir projekcija svih sila na bilo koju osu x koja nije upravna na pravu AB bude jednak nuli.*

7.1.3 Treći oblik uslova ravnoteže

Uslovi ravnoteže proizvoljnog ravnog sistema sila se mogu izraziti i u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} M_B\left(\vec{F}_i\right) = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} M_C\left(\vec{F}_i\right) = 0, \end{aligned} \tag{7.4}$$

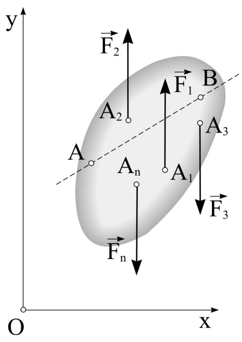
pri čemu tačke A, B i C leže u ravni dejstva sila, ali se ne nalaze na istoj pravoj, Slika 7.2. Uslovi (7.4) su potebni i dovoljni za ravnotežu ravnog sistema sila. Bilo koja od tri jednačine sistema (7.4) obezbeđuje uslov da je glavni moment M_O sistema jednak nuli, dok sve tri jednačine sistema (7.4) zajedno obezbeđuju uslov da je i glavni vektor $\vec{R}'$ sistema jednak nuli. Ako bi se sistem sila sveo na jednu silu različitu od nule $\vec{R} = \vec{R}' \neq 0$, onda bi rezultanta $\vec{R}$ morala istovremeno da prolazi kroz tri nekolinearne tačke A, B i C, što je nemoguće, pa će uslovi (7.4) biti ispunjeni samo ako je glavni vektor sistema jednak nuli. Prema tome: *za ravnotežu proizvoljnog ravnog sistema sila koji deluje na kruto telo potrebno je i dovoljno da algebarski zbir momenata svih sila sistema u odnosu na proizvoljno izabrane tri nekolinarne tačke A, B i C koje leže u ravni dejstva sila bude jednak nuli.* .

U svim razmatranim slučajevima dobijena su *po tri uslova ravnoteže*. Uslovi (7.2) se smatraju *osnovnim*, jer ne podležu nikakvim ograničenjima, ni u izboru koordinatnih osa, ni u izboru momentnih tačaka.

7.2 Ravnoteža ravnog sistema paralelnih sila

U slučaju kada su sve sile koje deluju na kruto telo paralelne među sobom, osa x Dekartovog koordinatnog sistema se može izabrati tako da bude normalna na sile, a osa y paralelna silama, Slika 7.3. U tom slučaju će projekcije svih sila na osu x biti jednake nuli, pa prva od jednačina sistema (7.2) prelazi u identitet, (0≡0). Uslovi ravnoteže paralelnih sila se tako svode na sledeći oblik:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} F_i = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = 0. \end{aligned} \tag{7.5}$$



Slika 7.3 Sistem paralelnih sila u ravni

Za ravnotežu ravnog sistema paralelnih sila koji deluje na slobodno kruto telo potrebno je i dovoljno da algebarski zbir svih sila bude jednak nuli, kao i da je algebarski zbir momenata svih sila u odnosu na proizvoljno izabranu tačku O koja leži u ravni dejstva sila jednak nuli.

Treći oblik uslova ravnoteže (7.4) u slučaju ravnog sistema paralelnih sila može se izraziti u obliku:

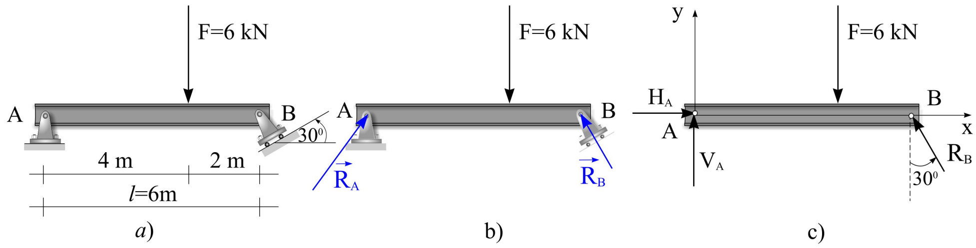
$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} M_B\left(\vec{F}_i\right) = 0. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Pri tome, tačke A i B ne smeju da leže na pravoj koja je paralelna silama.

7.3 Ravnoteža tela u ravni

Uspešna primena jednačina ravnoteže krutog tela na koje deluje sistem sila u ravni podrazumeva precizno definisanje svih poznatih i nepoznatih spoljašnjih sila koje deluju na telo. Da bi se proračunale nepoznate veličine, potrebno je da se nacrta skica tela oslobođenog veza – dijagram slobodnog tela, primenom pete aksiome (poglavlja 3.3.5, 3.3.7). Na toj skici je neophodno prikazati sve sile i spregove koji deluju na telo, sa precizno definisanim smerovima i položajima na telu, da bi se jednačine ravnoteže formirale uzimajući u obzir sve uticaje koji deluju na telo.

Na primer, štap prikazan na Slici 7.4 *a*) vezan je nepokretnim osloncem na levom kraju i pokretnim osloncem na desnom kraju, a opterećen je silom $\vec{F}$ intenziteta 6 kN. Pokretan oslonac je na površi koja je pod uglom od 30^0 u odnosu na horizontalu. Ova veza sprečava kretanje u pravcu normalnom na pravac mogućeg kretanja oslonca. Prvo, treba osloboditi telo veza primenom pete aksiome, ukloniti sve veze i tela za koja je posmatrani štap vezan. Uticaj veza se nadoknađuje reakcijama veza. Reakcija veze u B je normalna na površ po kojoj klizi pokretni oslonac. U A je veza ostvarena nepokretnim osloncem. Ovakva veza ne dozvoljava kretanje štapa u bilo kom pravcu, pa je reakcija veze u A nepoznatog intenziteta i pravca, Slika 7.4 b). Pošto se radi o dvema nepoznatim veličinama, zbog jednostavnijeg proračuna reakcija veze $\vec{R}_A$ se predstavlja pomoću svojih komponenata u horizontalnom i vertikalnom pravcu H_A i V_A, Slika 7.4 c).



Slika 7.4 *a*) Telo vezano nepokretnim osloncem u A i pokretnim osloncem u B; b) oslobađanje veza; c) telo oslobođeno veza sa reakcijama veza.

Kako se radi o telu na koje deluje sistem sila u ravni, reakcije veza se određuju primenom jednog od tri oblika uslova ravnoteže (7.2), (7.3) ili (7.4).
Jednačine ravnoteže će se formirati primenom izraza (7.2), u odnosu na usvojeni koordinatni sistem, Slika 7.4 c), uzimajući tačku A za momentnu tačku i glase:

$$\begin{aligned} &\sum X = 0 \quad H_A - R_B \sin 30^0 = 0, \\ &\sum Y = 0 \quad V_A + R_B \cos 30^0 - F = 0, \\ &\sum M_A = 0 \quad R_B \cos 30^0 \cdot 6 - F \cdot 4 = 0. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobijaju se vednosti reakcija veza:

$$H_A = 2{,}31\,\text{kN}, \quad V_A = 2\,\text{kN}, \quad R_B = 4{,}62\,\text{kN}.$$

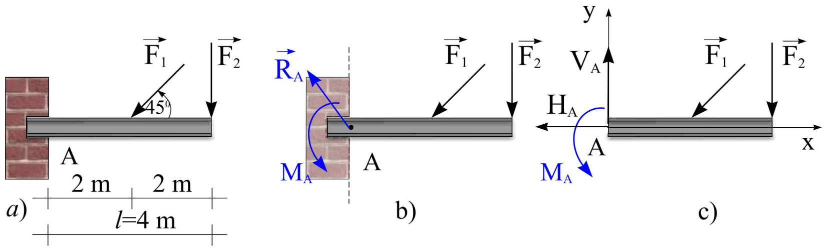
Smerovi reakcija H_A, V_A i R_B su pretpostavljeni kao na Slici 7.4 c). Dobijene su pozitivne vrednosti reakcija, što znači da su pretpostavljeni smerovi tačni. Da je, na primer, smer reakcije H_A pretpostavljen s desna u levo, prva od jednačina sistema (7.7) bi glasila:

$$\sum X = 0 \quad -H_A - R_B \sin 30^0 = 0,$$

dok bi ostale dve bile iste, pa bi reakcije bile:

$$H_A = -2{,}31\,\text{kN}, \; V_A = 2\,\text{kN}, \; R_B = 4{,}62\,\text{kN}.$$

Dobijena negativna vrednost reakcije H_A ukazuje na to da je horizontalna reakcija u A suprotnog smera od onog koji je pretpostavljen.
Štap prikazan na Slici 7.5 je ukliješten na levom kraju, dok je na desnom kraju slobodan. Kao što je rečeno u poglavlju 6.5, ukliještenje sprečava i pomeranje u bilo kom pravcu i rotaciju, pa se prilikom oslobađanja veze, primenom pete aksiome, na mestu veze postavlja sila $\vec{R}_A$ i moment sprega M_A, Slika 7.5 b). Kao i kod zglobne veze, sila veze $\vec{R}_A$ se obično predstavlja svojom horizontalnom H_A i vertikalnom komponentom V_A, Slika 7.5 c). Intenziteti aktivnih sila su F_1=4 kN i F_2=2 kN.



Slika 7.5 *a*) Greda ukliještena u zid; b) uklanjanje veze; c) greda sa aktivnim silama i reakcijama veze.

Jednačine ravnoteže su:

$$
\begin{aligned}
&\sum X = 0 \quad -H_A - F_1 \cos 45^0 = 0,\\
&\sum Y = 0 \quad V_A - F_1 \sin 45^0 - F_2 = 0,\\
&\sum M_A = 0 \quad M_A - F_1 \sin 45^0 \cdot 2 - F_2 \cdot 4 = 0,
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

a vrednosti reakcija veze su: $H_A = -2{,}83\,\text{kN}$, $V_A = 4{,}83\,\text{kN}$, $M_A = 13{,}66\,\text{kN}$.
Stvarna reakcija H_A je suprotnog smera od pretpostavljenog.

Postupak prilikom rešavanja zadataka

- Uočava se telo čiju ravnotežu treba proučiti
- Telo treba osloboditi veza, a njihov uticaj zameniti odgovarajućim reakcijama veza. Pri tome, treba zadržati nepromenjen položaj tela i njegovu celokupnu geometriju
- Treba izvršiti analizu svih sila koje deluju na telo, a to su u opštem slučaju spoljašnja opterećenja (koristan teret, vetar, sneg itd), reakcije veza u osloncima ili tačkama kontakta ili veze sa drugim telima (videti Tabelu 3.1) i težina tela
- Sile i spregove treba naneti na skicu tela sa odgovarajućim pravcima, smerovima i naznačenim intenzitetima. Slovnim oznakama se obeležavaju nepoznate veličine reakcija i uglovi njihovih pravaca. Detaljno treba obeležiti dimenzije tela zbog proračuna momenata sila koje deluju na telo
- Na telo oslobođeno veza treba primeniti odgovarajuće uslove ravnoteže. Ako se radi o telu na koje deluje proizvoljni sistem sila u ravni, treba primeniti jedan od sistema jednačina (7.2), (7.3), (7.4), ako se radi o sistemu paralelnih sila u ravni (7.5) ili (7.6), ako na telo deluje sistem sila čije se napadne linije seku u jednoj tački (4.36) ili (4.38), ako deluje sistem spregova (5.67) itd
- Za određivanje ravnoteže pod dejstvom proizvoljnog ravnog sistema sila postoje samo tri jednačine ravnoteže i mogu se odrediti samo tri nepoznate veličine. Ako je telo vezano tako da se oslobađanjem od veza pojavljuju samo tri nepoznate, onda je takav problem *statički određen*, a ako je broj nepoznatih veći od tri, problem je *statički neodređen*
- Veoma je važan izbor koordinatnog sistema pri postavljanju uslova ravnoteže. Koordinatni sistem se bira tako da što veći broj sila, posebno nepoznatih, bude paralelan nekoj od koordinatnih osa, odnosno da neku od osa seče. U tom slučaju jednačine ravnoteže su jednostavnije za rešavanje, jer su projekcije sila na upravne ose jednake nuli
- Prilikom pisanja jednačine ravnoteže $\sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = 0$, treba izabrati tačku O, u kojoj se seku napadne linije nepoznatih sila, jer će momenti nepoznatih sila u odnosu na tu tačku biti jednaki nuli

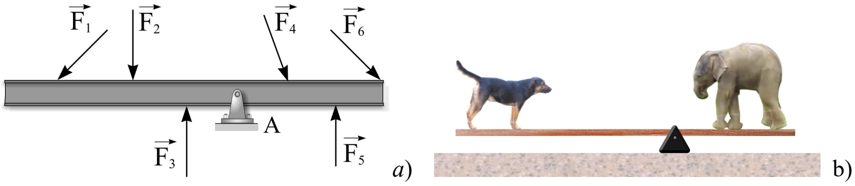
VAŽNE NAPOMENE

- Problemi ravnoteže tela se rešavaju na skici tela koje je oslobođeno veza, na kome su prikazane sve sile i spregovi koji deluju na njega
- Ukoliko oslonac sprečava pomeranje (translaciju) u nekom pravcu, onda je na skici tela oslobođenog veza na tom mestu reakcija veze u pravcu u kome je sprečena translacija
- Ako oslonac sprečava obrtanje (rotaciju), na tom mestu je na skici tela oslobođenog veza moment sprega, koji se naziva moment uklještenja
- Težina tela je spoljašnja sila i ona se na telo nanosi kao sila vertikalnog pravca, smera nadole sa napadnom tačkom u težištu tela
- Položaj spregova na telu, opterećenom ravanskim sistemom sila, nije važan za ravnotežu, važna je samo veličina momenta sprega i njegov smer, pa se oni mogu postaviti bilo gde na telu (ekvivalentnost spregova u ravni), a sile mogu da deluju bilo gde duž svoje napadne linije, pa se one mogu postaviti u bilo koju tačku na svojoj napadnoj liniji, jer to, takođe, ne utiče na ravnotežu tela (teorema o pomeranju sile duž svoje napadne linije)

7.3.1 Ravnoteža tela vezanog jednim nepokretnim osloncem

Telo vezano u jednoj tački A tako da može da se obrće oko ose koja prolazi kroz A i upravna je na ravan dejstva sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, naziva se *poluga*, Slika 7.6. Tačka A oko koje se poluga može obrtati naziva se *tačkom oslonca poluge.*
Kako je poluga vezana samo u jednoj tački, reakcija veze nema moment u odnosu na tu tačku [3].
Da bi poluga pod dejstvom ravnog sistema sila bila u ravnoteži, potrebno je i dovoljno da algebarski zbir momenata svih aktivnih sila u odnosu na tačku oslonca bude jednak nuli:

$$\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0 . \tag{7.9}$$

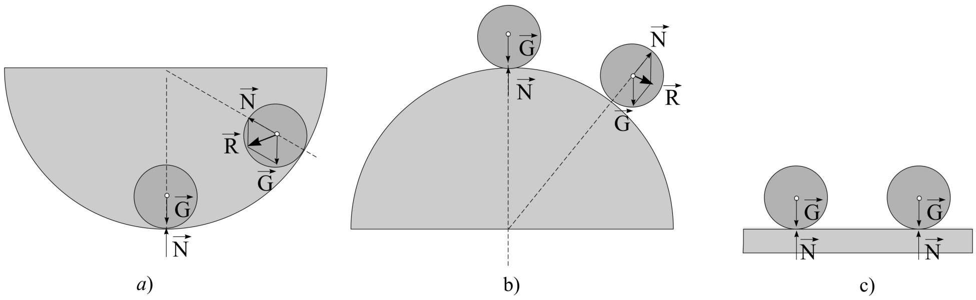


Slika 7.6 *a*) Poluga u ravnoteži; b) poluga u ravnoteži.

7.3.2 Stabilnost ravnotežnog stanja tela

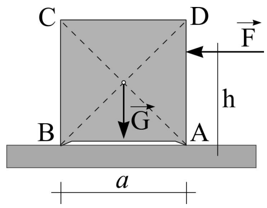
U idealnom slučaju, slobodno kruto telo, na koje deluje proizvoljni sistem sila, biće u ravnoteži, tj. nalaziće se u stanju mirovanja, ako su glavni vektor $\vec{R}'$ i glavni moment M_O svih sila istovremeno jednaki nuli. Međutim, u realnim uslovima je veoma važno da se utvrdi da li su veze takve da obezbeđuju stabilan položaj ravnoteže tela. U tom smislu razlikuju se tri oblika položaja ravnoteže tela: *stabilan, nestabilan, tj. labilan i indiferentan*.
Položaj ravnoteže je stabilan ako telo pod dejstvom neke sile, izvedeno iz ravnotežnog položaja, po prestanku dejstva sile, teži da se vrati u prvobitan položaj, Slika 7.7 *a*).

Položaj ravnoteže je nestabilan (labilan) ako telo pod dejstvom neke sile bude izvedeno iz tog položaja i nastavlja da se udaljuje od tog položaja bez obzira na prestanak dejstva sile, Slika 7.7 b).
Indiferentan položaj ravnoteže je onaj kada telo pod dejstvom neke sile bude izvedeno u drugi položaj i ostane u tom položaju po prestanku dejstva sile, Slika 7.7 c).



Slika 7.7 *a*) Stabilan položaj ravnoteže; b) nestabilan položaj ravnoteže; c) indiferentan položaj ravnoteže.

Problem stabilne ravnoteže je veoma značajan kod oslanjanja tela na glatke površi. Takva tela se mogu obrtati oko neke ose, odnosno tačke oslonca, a momenti aktivnih sila mogu da budu takvi da teže da vrate telo u ravnotežni položaj. Momenti sila koje teže da obrnu (preture) telo oko tačke oslonca, tj. ose koja prolazi kroz tu tačku nazivaju se *momenti preturanja*, M_p, dok se momenti sila koje teže da vrate telo nazivaju *momenti stabilnosti*, M_s.



Slika 7.8 Moment težine G u odnosu na tačku B treba da bude veći od momenta sile F u odnosu na B

Da bi telo bilo statički stabilno, potrebno je da moment stabilnosti bude veći od momenta preturanja:

$$M_s > M_p. \tag{7.10}$$

Telo težine $\vec{G}$ oslanja se na horizontalnu glatku površ, Slika 7.8. Na telo deluje sila $\vec{F}$, čija se napadna linija nalazi na rastojanju h od horizontalne ravni. Telo bi moglo da se preturi oko tačke B, odnosno oko ose koja prolazi kroz tačku B i upravna je na ravan dejstva sila, ukoliko ne bi bio zadovoljen uslov (7.10). Dakle, telo će biti u položaju stabilne ravnoteže ako je ispunjen uslov:

$$G\frac{a}{2} > F\,h\,,$$

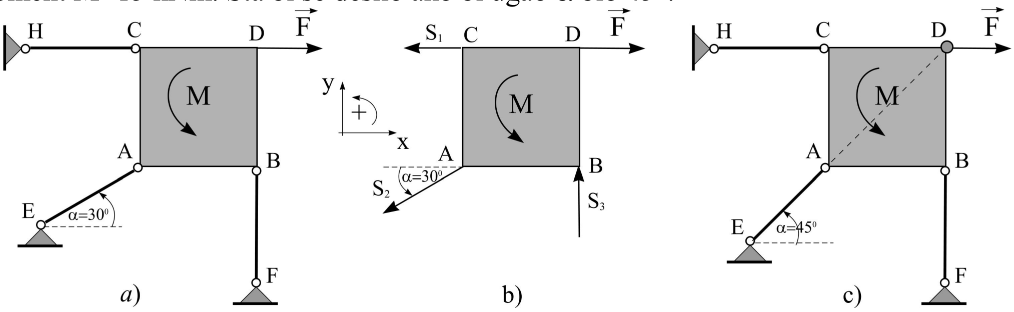
tj. ako je: $G > \dfrac{2F\,h}{a}$. Može se zaključiti da težina G može biti utoliko manja ukoliko je krak h sile $\vec{F}$ manji.

Odnos momenta stabilnosti i momenta preturanja $\dfrac{M_s}{M_p} = k$ je *stepen* ili *koeficijent stabilnosti*. Da bi telo bilo u stabilnom položaju ravnoteže, koeficijent stabilnosti treba da bude u granicama od 1,3 do 2.

Primeri ravnoteže tela pod dejstvom ravnog sistema sila

Primer 7.1

Odrediti sile u štapovima $\overline{CH}$, $\overline{AE}$ i $\overline{BF}$ zanemarljive težine, ako je kvadratna ploča stranice 2 m, takođe zanemarljive težine, opterećena silom F=10 kN i spregom čiji je moment M=15 kNm. Šta bi se desilo ako bi ugao α bio 45^0?



Slika P 7.1 a) Kvadratna ploča vezana prostim štapovima; b) telo oslobođeno veza; c) veze ne obezbeđuju konematičku stabilnost tela.

Kvadratna ploča na Slici P 7.1 *a*) je vezana prostim štapovima $\overline{CH}$, $\overline{AE}$ i $\overline{BF}$. Ploča oslobođena veza je prikazana na Slici P 7.1 b). Reakcije veza su sile u štapovima S_1, S_2 i S_3. Pretpostavljeno je da su štapovi $\overline{CH}$ i $\overline{AE}$ zategnuti, a štap $\overline{BF}$ pritisnut. Na ploču oslobođenu veza deluje sistem sila u ravni, pa se za određivanje reakcija veza može primeniti jedan od tri oblika uslova ravnoteže (7.2), (7.3) ili (7.4). Ovde će biti primenjen osnovni oblik uslova ravnoteže, u odnosu na usvojen koordinatni sistem, prikazan na Slici P 7.1, pri čemu je za momentnu tačku izabrana tačka D u kojoj se seku napadne linije reakcija S_1 i S_3. Na taj način momentna jednačina $\sum M_D = 0$ sadrži samo jednu nepoznatu, silu S_2 u štapu $\overline{AE}$.

Jednačine ravnoteže su:

$$\sum X = 0 \;\rightarrow\; -S_1 - S_2\cos 30^0 + F = 0,$$

$$\sum Y = 0 \;\rightarrow\; -S_2\sin 30^0 + S_3 = 0,$$

$$\sum M_D = 0 \;\rightarrow\; S_2\sin 30^0\cdot 2 - S_2\cos 30^0\cdot 2 + M = 0.$$

Reakcije veza dobijene rešavanjem ovih jednačina su:

$$S_1 = 7{,}745\,\text{kN},\;\; S_2 = 20{,}49\,\text{kN},\;\; S_3 = 10{,}245\,\text{kN}.$$

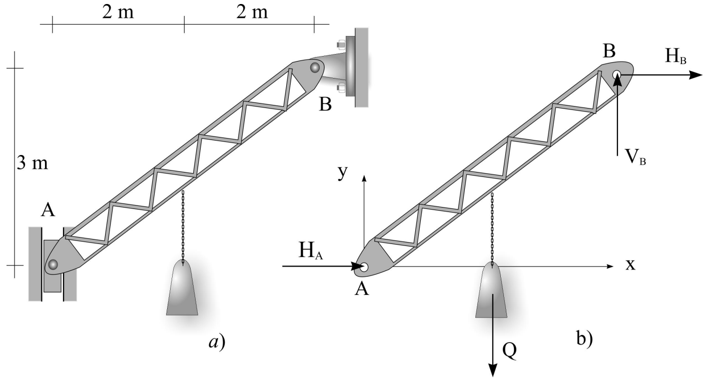
Dobijene pozitivne vrednosti za sile u štapovima potvrđuju da su usvojene pretpostavke njihovih smerova tačne. Štapovi $\overline{CH}$ i $\overline{AE}$ su stvarno zategnuti, a štap $\overline{BF}$ je stvarno pritisnut.

Ako bi pravci štapova bili kao na Slici P 7.1 c), napadne linije svih reakcija veza bi prolazile kroz istu tačku D. Takve veze ne bi mogle da obezbede stabilnost tela, jer bi se ploča okretala oko tačke D. Veze moraju da budu takve da ne dozvole kretanje tela. Sistem od tri jednačine ravnoteže ne bi imao jednoznačna rešenja.

Prilikom pisanja jednačina ravnoteže treba pažljivo odabrati momentnu tačku, jer se dobrim izborom momentne tačke pojednostavljuje proračun. Kada se za momentnu tačku odabere tačka preseka napadnih linija nepoznatih reakcija veza, te reakcije veza se neće pojaviti u momentnoj jednačini.

Primer 7.2

Telo AB drži teret težine Q=5 kN, a vezano je u A klizačem i u B nepokretnim osloncem, Slika P 7.2. Težina tela AB se može zanemariti. Odrediti reakcije veza u A i B.



Slika P 7.2 *a*) Vezano telo; b) telo oslobođeno veza.

Telo se oslobađa veza, Slika 7.2 b), pri čemu je poznat pravac reakcije veze u A (normalan na pravac mogućeg kretanja, poglavlje 3.3.5). Izabran je koordinatni sistem kao na Slici P 7.2 b) i momentna tačka B, pa jednačine ravnoteže glase:

$$\sum X = 0 \;\rightarrow\; H_A + H_B = 0,$$

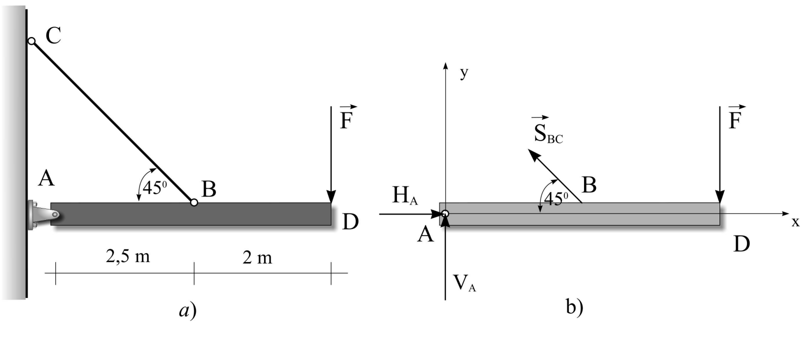
$$\sum Y = 0 \;\rightarrow\; V_B - Q = 0,$$

$$\sum M_B = 0 \;\rightarrow\; H_A \cdot 3 + Q \cdot 2 = 0,$$

a reakcije veza su: $H_A = -3,33\,\text{kN}, \quad V_B = 5\,\text{kN}, \quad H_B = 3,33\,\text{kN}.$

Primer 7.3

Telo je nepokretnim osloncem A vezano za zid, a u horizontalnom položaju ga održava uže BC, Slika P 7.3 *a*). Ako se težina tela zanemari, a intenzitet sile koja deluje na telo je 10 kN, odrediti reakcije veza.



Slika P 7.3 *a*) Vezano telo; b) telo oslobođeno veza.

Telo oslobođeno nepokretnog oslonca u A i užeta BC prikazano je na Slici P 7.3 b). Jednačine ravnoteže su:

$$\sum X = 0 \;\rightarrow\; H_A - S_{BC} \cos 45^0 = 0,$$

$$\sum Y = 0 \;\rightarrow\; V_A + S_{BC} \sin 45^0 - F = 0,$$

$$\sum M_C = 0 \;\rightarrow\; S_{BC} \sin 45^0 \cdot 2,5 - F \cdot 4,5 = 0.$$

Rešavanjem jednačina ravnoteže dobija se:

$$S_{BC} = 18\sqrt{2}\,\text{kN},\quad H_A = 18\,\text{kN},\quad V_A = -8\,\text{kN}.$$

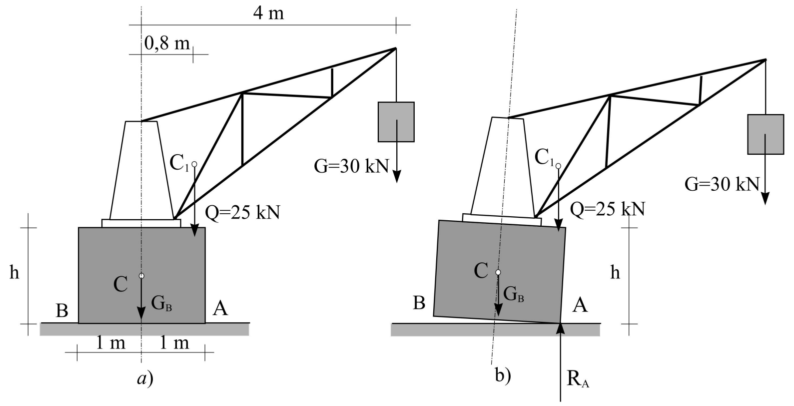
Intenzitet reakcije u A je: $R_A = \sqrt{H_A^{\,2} + V_A^{\,2}} = 19{,}68\,\text{kN}$

Isti primer je obrađen u poglavlju 4 primenom pravila ravnoteže tri sile u ravni (Primer 4.20) i dobijeni rezultati su identični.

Primer određivanja stabilne ravnoteže tela pod dejstvom ravnog sistema sila

Primer 7.4

Dizalica težine Q=25 kN učvršćena je za betonski blok, Slika 7.4. Dizalicom treba dizati teret težine G=30 kN. Blok je u osnovi kvadrat stranice 2 m, a specifična težina betona je γ=25 kN/m^3. Rastojanje između napadne linije težine Q i ose simetrije bloka je 0,8 m. Odrediti najmanju visinu h betonskog bloka, da ne bi došlo do preturanja dizalice oko ivice A.



Slika P 7.4 *a*) Dizalica vezana za betonski blok; b) granični slučaj ravnoteže.

Da bi se odredila potrebna visina betonskog bloka da ne bi došlo do preturanja dizalice pričvršćene za njega pod uticajem tereta, posmatraće se granični slučaj ravnoteže tela, koje može da se obrne oko tačke A. Pretpostaviće se da se betonski blok za beskonačno mali ugao okrenuo oko tačke A, tako da celokupna reakcija oslonca prolazi kroz tačku A i upravna je na ravan oslanjanja, Slika P 7.3 b).

Da bi telo bilo statički stabilno, potrebno je da moment stabilnosti bude veći od momenta preturanja, izraz (7.10):

$$G_B \cdot 1 > G \cdot 3 - Q \cdot 0{,}2\,,$$

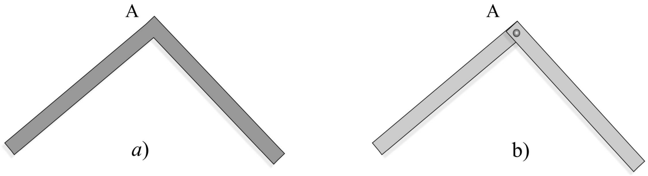
gde je G_B težina bloka: $G_B = \gamma V = 2^2 h\,\gamma$, pa je:

$$h > \frac{G \cdot 3 - Q \cdot 0{,}2}{2^2 \gamma},\quad h > 0{,}085\text{ m}.$$

7.4 Ravnoteža sistema tela

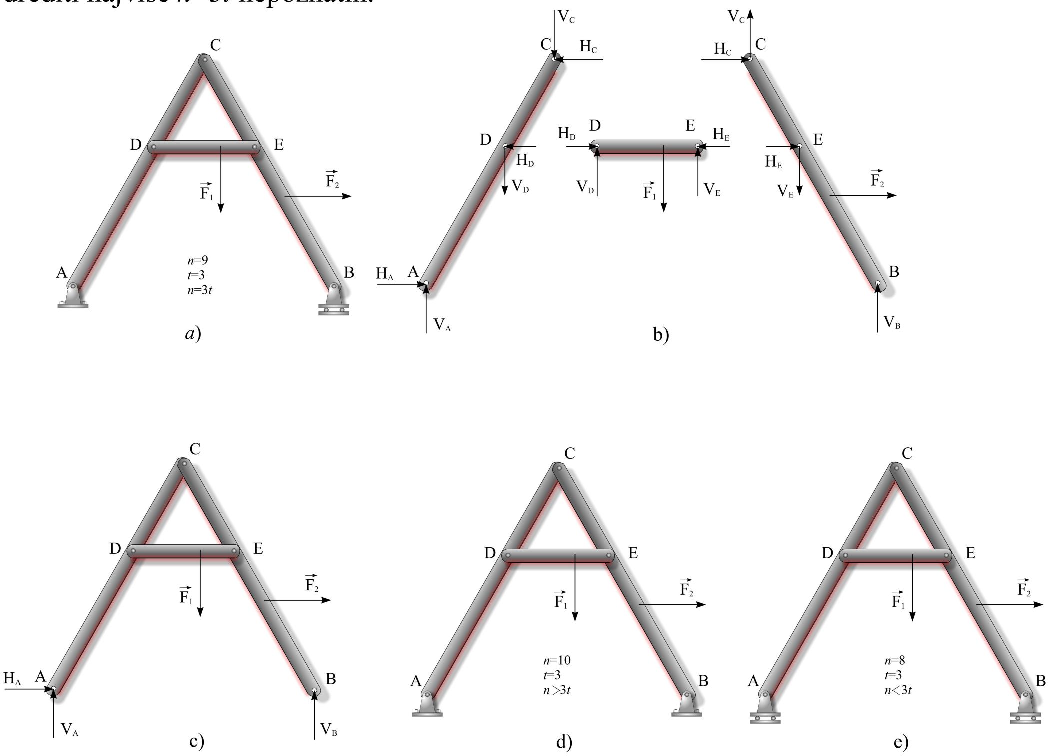
Sistem tela čini skup funkcionalno međusobno vezanih elemenata – krutih tela. Veze kojima su među sobom vezana pojedina tela nazivaju se *unutrašnje veze,* dok se veze pomoću kojih je dati sistem tela vezan za oslonce nazivaju *spoljašnje veze.* Veze između tela jednog sistema mogu biti krute i zglobne. Kruta veza stvara od dva tela jedno, Slika 7.9 *a*). Ona potpuno onemogućava pomeranje jednog tela u odnosu na drugo. Zglobna veza između dva ili više tela, (poglavlje 3.3.7) za razliku od krute, dozvoljava rotaciju jednog tela u odnosu na drugo oko ose zgloba, Slika 7.9 b).

Ako su veze između tela ostvarene pomoću zglobova, rešavanje zadataka se svodi na rastavljanje sistema na njegove sastavne delove i postavljanje uslova ravnoteže za svaki element sistema posebno, smatrajući ga slobodnim krutim telom. Prilikom oslobađanja tela od unutrašnjih veza, saglasno šestoj aksiomi, reakcije tih veza javljaju se uvek u paru, istih su intenziteta, pravaca i suprotnih smerova, Slika 7.10 b). Ako se sistem tela oslobodi samo spoljašnjih veza, Slika 7.10 c), reakcije unutrašnjih veza se ne pojavljuju u jednačinama ravnoteže, jer za sistem tela kao celinu one obrazuju uravnotežen sistem sila. Tada se na sistem tela primenjuju uslovi ravnoteže kao za jedno telo.



Slika 7.9 a) Štapovi vezani krutom vezom; b) štapovi vezani zglobnom vezom.

Ukoliko je potrebno odrediti i reakcije unutrašnjih veza, sistem tela treba osloboditi i spoljašnjih i unutrašnjih veza i sve veze zameniti odgovarajućim reakcijama veza. Tada za svako telo treba formirati jednačine ravnoteže (izrazi (7.2), (7.3) ili (7.4)). Ako se sistem tela sastoji od t tela, ukupan broj jednačina ravnoteže je $3t$, jer je za svako telo na koje deluje ravan sistem sila moguće postaviti tri jednačine ravnoteže. Iz tih jednačina može se odrediti najviše n=3t nepoznatih.



Slika 7.10 *a*) Sistem od tri tela međusobno vezana zglobovima; b) sistem tela oslobođen spoljašnjih i unutrašnjih veza; c) sistem tela oslobođen spoljašnjih veza; d) statički neodređen sistem tela; e) statički labilan sistem tela.

Sistem tela pod dejstvom ravnog sistema sila, kod koga je ukupan broj nepoznatih reakcija veza jednak broju jednačina ravnoteže ($n = 3t$), je *statički određen*. Sistem tela na koji deluje ravan sistem sila je *statički neodređen*, ukoliko je broj nepoznatih reakcija veza veći od broja jednačina ravnoteže ($n > 3t$), Slika 7.10 d). Ukoliko je broj reakcija veza manji od

broja jednačina ravnoteže ($n < 3t$), sistem tela je *preodređen, labilan* ili *pomerljiv*, Slika 7.10 e).
Na Slici 7.10 *a*) prikazan je sistem tela koji čine tri kruta tela u ravni, koja su vezana za podlogu nepokretnim osloncem u A i pokretnim osloncem u B, a međusobno zglobnim vezama u C, D i E. Sistem je opterećen silama $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, a tela su zanemarljive težine. Kada se sistem tela oslobodi spoljašnjih veza, Slika 7.10 c), na njega, pored sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, deluju i reakcije V_A i H_A nepokretnog oslonca, kao i reakcija V_B pokretnog oslonca. Pošto se sistem tela oslobođen spoljašnjih veza ponaša kao jedno kruto telo, mogu da se postave tri jednačine ravnoteže za sistem tela kao celinu, na primer: $\sum X = 0,\ \sum Y = 0,\ \sum M_A = 0$, iz kojih se određuju sve tri nepoznate reakcije spoljašnjih veza. Da bi se odredile reakcije unutrašnjih veza treba rastaviti sistem tela na tri posebna tela, Slika 7.10 b). Horizontalne i vertikalne komponente reakcija veza u C, D i E na jedno telo deluju u jednom smeru, a na drugo telo u suprotnom smeru, shodno aksiomi šest. Kako je ukupan broj nepoznatih reakcija unutrašnjih veza šest ($V_C, H_C, V_D, H_D, V_E, H_E$), treba formirati šest jednačina ravnoteže, za dva tela po tri jednačine. Za telo AC jednačine ravnoteže mogu biti: $\sum X = 0,\ \sum Y = 0,\ \sum M_D = 0$ i za telo BC: $\sum X = 0,\ \sum Y = 0,\ \sum M_E = 0$. Iz ovih jednačina moguće je odrediti svih šest komponenata unutrašnjih reakcija veza. Dakle, u ovom sistemu tela ima ukupno devet nepoznatih reakcija veza, od kojih su tri spoljašnje i šest unutrašnje. Formiranjem devet jednačina ravnoteže (tri za sistem kao celinu, tri za telo AC i tri za telo BC) dobijaju se sve reakcije veza.
Zadatak može da se reši postavljanjem jednačina ravnoteže za svako telo posebno (tri za telo AC, tri za telo BC i tri za telo DE), čime se dobija devet jednačina iz kojih se mogu odrediti sve nepoznate spoljašnje i unutrašnje reakcije veza.
Ako bi umesto pokretnog oslonca u B bio nepokretan, Slika 7.10 d), ukupan broj nepoznatih reakcija bio bi 10, ($V_A, H_A, V_B, H_B, V_C, H_C, V_D, H_D, V_E, H_E$), što je više od broja jednačina ravnoteže, pa je takav sistem statički neodređen. A ako bi umesto nepokretnog oslonca u A bio pokretan, Slika 7.10 e), očigledno je da bi sistem postao translatorno pomerljiv. U tom slučaju broj nepoznatih veličina je 8, ($V_A, V_B, V_C, H_C, V_D, H_D, V_E, H_E$), što je manje od broja jednačina ravnoteže, čime je i analitički dokazano da je ovaj sistem statički preodređen.
Pri rešavanju zadataka ravnoteže sistema tela treba se pridržavati postupka za rešavanje i napomena datih u poglavlju 7.3. Osim toga, veoma je važno uočiti proste štapove u sistemu tela, koji su opisani u poglavlju 3.3.7 (Slika 3.32, Slika 3.34). Njih treba izdvojiti iz sistema tela oslobađanjem od zglobnih veza na krajevima, naneti sile veze koje moraju biti kolinearne, istog intenziteta i suprotnih smerova, čime se izbegava postavljanje i rešavanje nepotrebnih jednačina ravnoteže. Ovo je pokazano u primeru 7.5.
Iz prethodnog razmatranja vidi se da postoje tri vrste statičkih sistema:

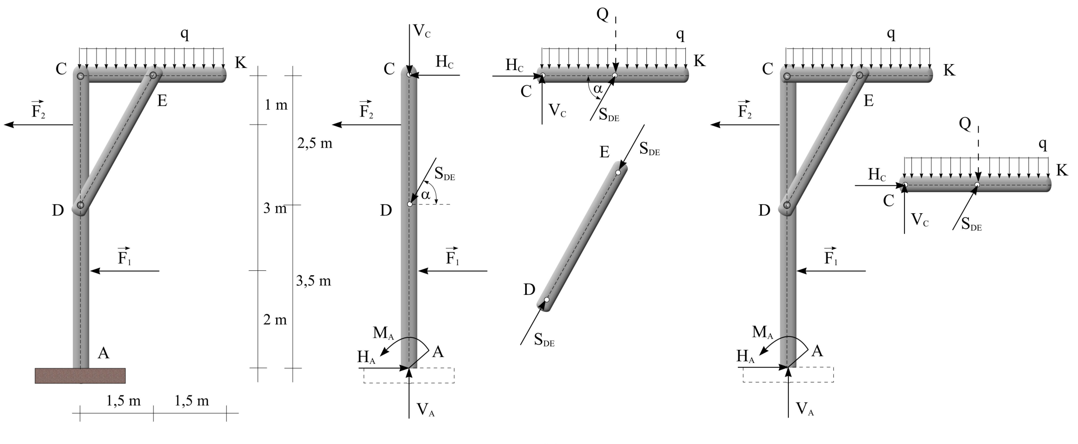
1. **statički određeni sistemi**, kod kojih je broj nepoznatih veličina jednak broju jednačina ravnoteže, $n = 3t$;
2. **statički neodređeni sistemi**, kod kojih je broj nepoznatih veći od broja jednačina ravnoteže, $n > 3t$;
3. **statički preodređeni sistemi**, kod kojih je broj nepoznatih manji od broja jednačina ravnoteže, $n < 3t$.

Ovo znači da je neophodno da se proveri statička određenost sistema tela. U ovoj knjizi se, kao što je već rečeno, izučavaju samo statički određeni sistemi.

Primer ravnoteže sistema tela pod dejstvom ravnog sistema sila

Primer 7.5

Tela AC i CK, čije se težine mogu zanemariti, međusobno su vezana zglobom C i štapom DE bez težine. Sistem tela je uklješten u A. Spoljašnje opterećenje čine horizontalne sile F_1=5 kN, F_2=8 kN i raspodeljeno opterećenje q=2 kN/m. Odrediti reakcije veza.



Slika P 7.5 a) Sistem od dva tela međusobno vezana zglobom i prostim štapom; b) sistem tela oslobođen spoljašnjih i unutrašnjih veza.

Zadatak može da se reši na dva načina. Postavljanjem uslova ravnoteže za svaki element sistema posebno, smatrajući ga slobodnim krutim telom, dobija se šest jednačina ravnoteže u kojima figurišu i spoljašnje i unutrašnje reakcije veza. Svih šest reakcija veza mogu se odrediti iz šest jednačina ravnoteže. Reakcije veza mogu da se odrede oslobađanjem sistema tela samo spoljašnjih veza i formiranjem jednačina ravnoteže za sistem kao celinu, čime se dobijaju tri jednačine ravnoteže iz kojih mogu da se odrede sve tri reakcije spoljašnje veze i formiranjem jednačina ravnoteže za jedno od tela sistema oslobođeno unutrašnjih veza, čime se dobijaju još tri jednačine iz kojih mogu da se odrede sve reakcije unutrašnjih veza.

Prvi način

Sistem tela sastoji se od tela AC, koje je uklještenjem vezano za podlogu, tela CK, koje je cilindričnim zglobom vezano za telo AC, i štapa DE, koji je cilindričnim zglobovima u D i E vezan za ostala tela sistema. Štap DE je bez težine, nije opterećen spoljašnjim opterećenjem, što znači da se radi o prostom štapu. Dijagrami slobodnih pojedinačnih tela prikazani su na Slici P 7.5 b). Reakcije veza u D i E moraju da budu u pravcu DE, istog intenziteta i suprotnih smerova. Ovde je pretpostavljeno da su reakcije usmerene prema štapu, tj. da je štap DE pritisnut. Na tela AC i CK se u D, odnosno E nanose reakcija S_{DE} suprotnih smerova od pretpostavljenih reakcija prostog štapa. Reakcije unutrašnje veze u C su pretpostavljene u paru, kao na Slici P 7.5 b), istih su intenziteta, pravaca i suprotnih smerova. Spoljašnje reakcije veze su reakcije uklještenja u A. Ukupan broj nepoznatih je n=6 ($V_A, H_A, M_A, H_C, V_C, S_{DE}$). Kako sistem čine dva tela (t=2), a za svako telo koje je opterećeno ravnim sistemom sila mogu se postaviti po tri jednačine ravnoteže, to je ukupno šest jednačina ravnoteže ($3t$=6). Pošto je broj nepoznatih reakcija veza jednak broju jednačina ravnoteže, sistem tela je statički određen i sve nepoznate se mogu odrediti iz jednačina ravnoteže, koje za telo AC glase:

$$\sum X = 0 \;\rightarrow\; H_A - H_C - S_{DE}\cos\alpha - F_1 - F_2 = 0,$$
$$\sum Y = 0 \;\rightarrow\; V_A - V_C - S_{DE}\sin\alpha = 0,$$
$$\sum M_A = 0 \;\rightarrow\; M_A + H_C\cdot 6 + S_{DE}\cos\alpha\cdot 3,5 + F_1\cdot 2 + F_2\cdot 5 = 0,$$

gde je ugao α određen iz trougla DEC:

$$\cos\alpha = \frac{1,5}{\sqrt{1,5^2 + 2,5^2}} = 0,5145, \quad \sin\alpha = \frac{2,5}{\sqrt{1,5^2 + 2,5^2}} = 0,8575.$$

Jednačine ravnoteže za telo CK su:

$$\sum X = 0 \;\rightarrow\; H_C + S_{DE}\cos\alpha = 0,$$
$$\sum Y = 0 \;\rightarrow\; V_C + S_{DE}\sin\alpha - Q = 0,$$
$$\sum M_C = 0 \;\rightarrow\; S_{DE}\sin\alpha\cdot 1,5 - Q\cdot 1,5 = 0.$$

Reakcije veza su:

$$H_A = 13\,\text{kN}, V_A = 6\,\text{kN},\; M_A = -41\,\text{kNm},\; H_C = -3,6\,\text{kN}, V_C = 0,\; S_{DE} = 7\,\text{kN}.$$

Drugi način

Zadatak može da se reši i formiranjem jednačina ravnoteže za sistem tela oslobođen spoljašnje veze – uklještenja u A, Slika P 7.5 c), jer se sistem tela oslobođen spoljašnjih veza ponaša kao jedno kruto telo. Iz jednačina ravnoteže za sistem tela:

$$\sum X = 0 \;\rightarrow\; H_A - F_1 - F_2 = 0,$$
$$\sum Y = 0 \;\rightarrow\; V_A - Q = 0,$$
$$\sum M_A = 0 \;\rightarrow\; M_A + F_1\cdot 2 + F_2\cdot 5 - Q\cdot 1,5 = 0,$$

dobijaju se reakcije uklještenja:

$$V_A = 6\,\text{kN}, \quad H_A = 13\,\text{kN}, \quad M_A = -41\,\text{kN}.$$

Unutrašnje reakcije veza dobijaju se iz uslova ravnoteže tela AC ili tela CK. Jednostavnije je posmatrati telo CK na koje deluje manji broj sila. Jednačine ravnoteže za telo CK su već formirane u prvom delu zadatka. Iz njih se dobijaju reakcije unutrašnjih veza:

$$H_C = -3,6\,\text{kN}, \quad V_C = 0, \quad S_{DE} = 7\,\text{kN}.$$

Napomena

Značaj uočavanja prostih štapova u sistemu tela je u ovom primeru očigledan. Umesto šest jednačina ravnoteže, bilo bi potrebno formirati devet jednačina ravnoteže da se odredi devet nepoznatih reakcija veza ($V_A, H_A, M_A, H_C, V_C,\; H_D, V_D, H_E, V_E$) da nije uočeno da je telo DE prost štap.

Najvažnije u ovom poglavlju

- Koji su uslovi ravnoteže proizvoljnog sistema sila u ravni
- Koji su uslovi ravnoteže sistema paralelnih sila u ravni
- Kako se rešavaju problemi ravnoteže tela opterećenih sistemima sila u ravni
- Određivanje položaja stabilne ravnoteže tela
- Kako se rešavaju problemi ravnoteže sistema tela