PLOČE NAPREGNUTE U SVOJOJ RAVNI

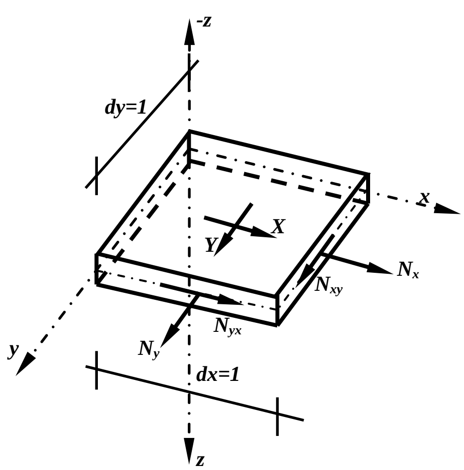
Za ploče opterećene zapreminskim ili površinskim silama ravnomerno raspoređenim po debljini ploče i paralelnim srednjoj ravni, kažemo da su ploče napregnute u svojoj ravni.

Ova vrsta naprezanja naziva se ***ravnim naprezanjem***.

Srednja ravan ploče, za ovu vrstu naprezanja, ostaje ravna i posle deformacije. Deformacija se odvija bez krivljenja ploče.

1. Osnovne jednačine ploče u dekartovim koordinatama

Ravno naprezanje karakterišu u Dekartovom sistemu Oxyz, sile u presecima N_x, N_y i N_{xy} (Sl.1).



Sl.1 Sile u presecima pri ravnom naprezanju

Naponi i sile u presecima

Kako je opterećenje po pretpostavci ravnomerno raspoređeno po debljini ploče, to su i naponi koji se javljaju u teoriji ploča napregnutih u svojoj ravni, σ_x, σ_x i τ_{xy} , ravnomerno raspoređeni po debljini ploče.

U skladu sa ovom pretpostavkom, sile u presecima date su izrazima:

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz = \sigma_x \int_{-h/2}^{+h/2} dz = \sigma_x h \; ; \qquad (1.a)$$

$$N_y = h\sigma_y \qquad (1.b)$$

$$N_{xy} = h\tau_{xy} \; ; \qquad (1.c)$$

Isto tako pretpostavlja se da su naponi $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ u celoj oblasti identički jednaki nuli. Ovi naponi su, s'obzirom na to da osnove ploče nisu opterećene, za $z = \pm\frac{h}{2}$ jednaki nuli. Kako je debljina ploče mala, može se sa razlogom smatrati da ti naponi između osnova mogu imati male vrednosti u poređenju sa ostalim komponenetalnim naponima i da se mogu zanemariti, tj.

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

Opterećenje

Zapreminsku silu $\vec{\overline{F}}$, čije ćemo komponente u pravcu x i y ose obeležiti sa $\overline{X}$ i $\overline{Y}$, možemo zameniti površinskim opterećenjem $\vec{F}$. Pri učinjenoj pretpostavci o rasporedu i pravcu zapreminskih sila nalazimo:

$$\vec{F} = h\vec{\overline{F}} .$$

Komponente površinskog opterećenja, koje deluju u srednjoj ravni ploče, u pravcima x i y ose, jednaki su:

$$X = h\overline{X}$$

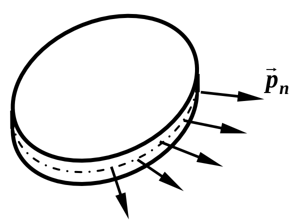
$$Y = h\overline{Y} .$$

Površinsko opterećenje $\vec{\overline{p}}_n$, sa komponentama $\overline{p}_{nx}$ i $\overline{p}_{ny}$ zamenjuje se linijskim opterećenjem $\vec{p}_n$ (Sl.2).

$$\vec{p}_n = h\vec{\overline{p}}_n ,$$

odnosno:

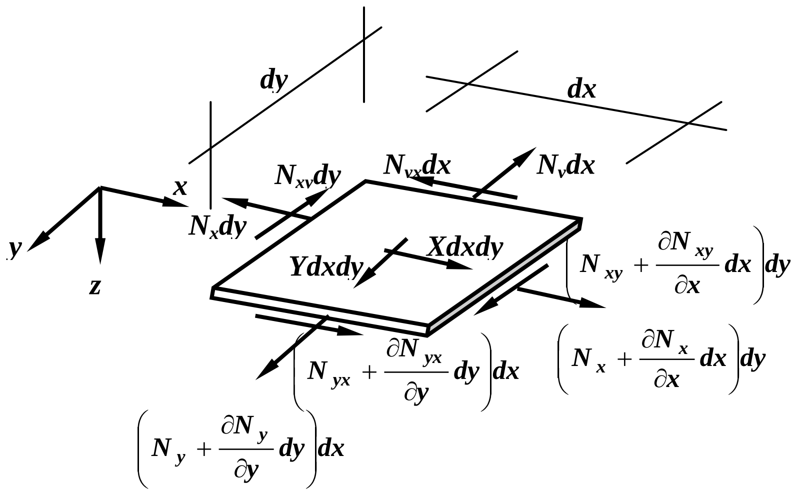
$$p_{nx} = h\overline{p}_{nx} ; \; p_{ny} = h\overline{p}_{ny} .$$



Sl.2 Linijsko opterećenje

Uslovi ravnoteže

Vezu između presečnih sila i površinskog opterećenja dobićemo iz uslova ravnoteže sila koje napadaju elementarnu prizmu isečenu iz ploče sa dve ravni paralelne sa *xz* ravni na rastojanju *dy* i dve ravni paralelne sa *yz* ravni na rastojanju *dx* (videti Sl.3).



Sl.3. Uslovi ravnoteže elementa

Na strani x=const delovaće sile $N_x dy$ i $N_{xy} dy$, a na naspramnoj strani $x+dx$=const, sile koje će se razlikovati od prethodnih za priraštaje $\frac{\partial N_x}{\partial x} dxdy$ odnosno $\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dxdy$.

Isto tako imaćemo za y=const, sile $N_y dx$ i $N_{yx} dx$, a za $y+dy$=const, sile:

$$\left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy\right) dx \text{ i } \left(N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} dy\right) dx .$$

Postavljajući uslov da je zbir svih sila u pravcu težišne ose paralelne x-osi jednak nuli i posle kraćenja sa $dxdy$:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + X = 0 . \tag{2.a}$$

Analogno ovome, uslov ravnoteže projekcija svih sila na pravac paralelan y-osi daje:

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial x} + Y = 0 . \tag{2.b}$$

Izjednačujući zbir momenata svih sila oko z-ose dobijamo:

$$N_{yx} = N_{xy} .$$

Ustvari, s obzirom da je $N_{yx} = h\tau_{yx}$ i $N_{xy} = h\tau_{xy}$, ovaj izraz je dobro poznat kao **stav o konjugovanosti smičućih napona**.

Ostala dva uslova ravnoteže: zbir momenata oko osovina paralelnih *x* i *y* osi identički su zadovoljena jer sile deluju u srednjoj ravni ploče.

Treba primetiti da su jednačine (2) ustvari Navier-ove jednačine, samo sa drugim oznakama. Pod pretpostavkom da je

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

množeći Navier-ove jednačine sa *h* dobijamo jednačine (2).

I ovde, kao i kod ploča napregnutih na svijanje, **uslovi ravnoteže uz odgovarajuće konturne uslove <u>nisu dovoljni</u>** za rešenje zadatka. Broj presečnih sila veći je za jedan od uslova ravnoteže. **Zadatak je statički neodređen** i za njegovo rešenje treba da razmotrimo i deformaciju ploče.

Deformacija ploče. Veze između statičkih i deformacijskih veličina.

Prema učinjenim pretpostavkama i napomenama, komponentalne deformacije shodno Hook-ovom zakonu date su izrazima:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)\\
\varepsilon_z &= -\nu\frac{1}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\\
\gamma_{zx} &= \gamma_{zy} = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

Odnosno, preko sila u presecima:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{Eh}\left(N_x - \nu N_y\right)\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{Eh}\left(N_y - \nu N_x\right)\\
\varepsilon_z &= -\nu\frac{1}{Eh}\left(N_x + N_y\right)\\
\gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{Eh}N_{xy}
\end{aligned} \tag{4}$$

Sa druge strane, komponentalne deformacije možemo izraziti preko pomeranja *u*, *v* i *w* u pravcima *x*, *y* i *z* ose:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \tag{5.a}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \tag{5.b}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \tag{5.c}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5.d}$$

Funkcije ε_x, ε_y i γ_{xy} nisu, kao što se vidi iz jednačina (5) potpuno nezavisne, već moraju zadovoljiti tzv. uslov o poklapanju deformacija. Naime, diferencirajući jednačinu (5.a) dva puta po y a jednačinu (5.b) dva puta po x i sabirajući, nalazimo:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}. \tag{6}$$

Sa druge strane, diferencirajući jednačinu (5.d) po x i y dobijamo:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}. \tag{7}$$

S obzirom da su desne strane jednačina (6) i (7) jednake, moraju biti i leve, pa dobijamo:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad \textbf{(uslov kompatibilnosti).} \tag{8}$$

Od ukupno šest uslova o poklapanju deformacija u opštem slučaju za slučaj ravnog naprezanja ostaje samo uslov (8).

Sile u presecima ploče možemo, slično kao i kod ploče napregnute na savijanje, izraziti preko pomeranja, Rešavajući jednačine (4a,b,c) po presečnim silama i unoseći za komponentalne deformacije izraze (5a,b,c), pa nalazimo:

$$\begin{aligned} N_x &= D\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ N_y &= D\left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ N_{xy} &= \frac{1}{2} D(1-\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

gde je sa $D = \frac{E}{1-\nu^2} h$ obeležena krutost ploče na zatezanje.

2. Diferencijalna jednačina ploče

2.1 Metoda deformacije

Jednačine (2) i (9) sa odgovarajućim graničnim uslovima, o čemu će kasnije biti reči, u potpunosti definišu problem ploče napregnute u svojoj ravni. Ukupan broj nepoznatih je pet, N_x, N_y, N_{xy}, u, v, a isto toliko ima na raspolaganju diferencijalnih jednačina.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\
&\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial x} + Y = 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
N_x &= D\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
N_y &= D\left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
N_{xy} &= \frac{1}{2} D(1-\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Iz ovog sistema jednačina možemo eliminisati statičke veličine unoseći u izraze (2) njihove vrednosti iz jednačine (9).

Na taj način dobijamo:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{(1+\nu)}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{X}{D} = 0 \\
&\frac{(1+\nu)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{Y}{D} = 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

U jednačinama (10) imamo samo geometrijske nepoznate i opterećenje. Ovaj postupak svođenja problema na deformacijske nepoznate, slično kao u teoriji linijskih nosača možemo nazvati **metodom deformacije**.

Metoda deformacije kod ploča napregnutih u svojoj ravni, nije našla veću primenu u rešavanju pojedinih problema. Razlog za to leži prvenstveno u tome što metod sila, kao što ćemo videti kasnije, sa matematičkog gledišta pruža veće mogućnosti za praktičo rešenje pojedinih zadataka. Ovo dolazi do izražaja naročito ako su granični uslovi dati po silama.

2.2 Metoda sila

Isto tako, i jednačine (2) u kombinaciji sa jednačinama (4a,b,c) i uslovom kompatibilnosti (8), imajući u vidu odgovarajuće uslove na konturi, potpuno definišu problem. U šest jednačina figuriše ukupno šest nepoznatih veličina N_x, N_y, N_{xy}, ε_x, ε_y, γ_{xy}.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}+X=0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{yx}}{\partial x}+Y=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad (8)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{Eh}\left(N_x-\nu N_y\right)\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{Eh}\left(N_y-\nu N_x\right)\\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{Eh}N_{xy}\end{aligned} \qquad (4)$$

Iz sistema jednačina ((2), (4a,b,c), (8)) možemo lako eliminisati deformacijske veličine. Izrazimo li u uslovu kompatibilnosti komponentalne deformacije preko presečnih sila (jednačine 4a,b,c), dobićemo, zajedno sa jednačinama (2) sistem od tri diferencijalne jednačine u kojima će figurisati samo sile u presecima:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}+X=0\\ &\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{yx}}{\partial x}+Y=0\\ &\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\Rightarrow\frac{\partial^2\left(N_x-\nu N_y\right)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\left(N_y-\nu N_x\right)}{\partial x^2}=2(1+\nu)\frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y}\end{aligned} \qquad (11)$$

Rešenje zadatka preko jednačina (11), bilo bi u stvari **metoda sila.**

Priroda jednačina (11) je takva da se one lako uvođenjem takozvane **naponske funkcije *F*** sa osbinom:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -N_{xy} \tag{12}$$

i pod pretpostavkom da se komponente opterećenja *X* i *Y* mogu izraziti kao parcijalni izvodi neke **funkcije potencijala *U*** i mogu svesti na jednu parcijalnu diferencijalnu jednačinu četvrtog reda. Stavljajući:

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x} \text{ i } Y = -\frac{\partial U}{\partial y} \tag{13}$$

iz jednačine (11a,b) nalazimo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - U\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(N_y - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - U\right) = 0$$

Ove jednačine biće zadovoljene ako stavimo:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + U \\ N_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + U \end{aligned} \tag{14}$$

Funkcija *F* naziva se obično **Erijeva (Airy) funkcija**, prema engleskom astronomu G. B. Airy-u koji ju je 1862. godine uveo.

Konačno diferencijalna jednačina je oblika:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + (1-\nu)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{15}$$

ili kraće, obeležavajući sa:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{(Laplasov operator)},$$

diferencijalna jednačina se može zapisati u obliku:

$$\Delta\Delta F + (1-\nu)\Delta U = 0. \tag{16}$$

Kao što vidimo, problem ploče napregnute u svojoj ravni svodi se na diferencijalnu jednačinu istog oblika kao i problem ploče napregnute na savijanje.

Ako je X=Y=0 ili X= const i Y=const, jednačina (16) prelazi u biharmonijsku jednačinu:

$$\Delta\Delta F = 0. \tag{17}$$

Treba zapaziti da u tom slučaju s'obzirom da se u diferencijalnoj jednačini ne pojavljuje Poisson-ov broj υ, rešenje zadatka ne zavisi od vrednosti elastičnih konstanti. Za svaki idealno elastični materijal dobija se isto rešenje.

Da bi se rešila diferencijalna jednačina neophodno je da budu zadovoljeni **granični uslovi** koji mogu biti dati po silama, po pomeranjima ili mešovito. Za rešenje problema ploče napregnute u svojoj ravni opisanog diferencijalnim jednačina (16) ili (17), primenom Airy-eve naponske funkcije F, potrebno je i granične uslove izraziti preko funkcije F.

Kada je određena funkcija F, poznate su i sile u presecima, preko kojih pak mogu da se odrede komponentalne deformacije. **Komponentalna pomeranja *u* i *v*** mogu se odrediti pomoću komponentalnih deformacija.