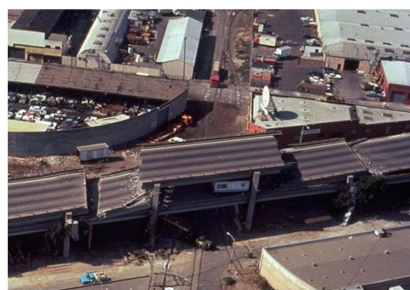


Poglavlje 12

UNUTRAŠNJE SILE

Ciljevi poglavlja

- Određivanje unutrašnjih sila u presecima elemenata konstrukcije
- Dijagrami momenta, normalne i transversalne sile linijskih nosača u ravni
- Određivanje sila u presecima prostornih linijskih nosača
- Dijagrami momenata savijanja, momenta torzije, transversalnih i aksijalnih sila linijskih nosača u prostoru



Projektovanje i analiza bilo kog konstruktivnog elementa zahteva poznavanje unutrašnjih sila koje se javljaju u njemu kao posledica delovanja spoljašnjeg opterećenja, ne samo kad je on deo konstrukcije, već i u toku izgradnje, transporta, montaže i eksploatacije. Da bi se pravilno izabrale dimenzije nosača, odnosno da bi nosači mogli da izdrže predviđena opterećenja, a deformacije koje su posledica tog opterećenja ne pređu preko granice kada bi nosač postao neupotrebljiv, potrebno je poznavati veličinu i prirodu unutrašnjih sila.

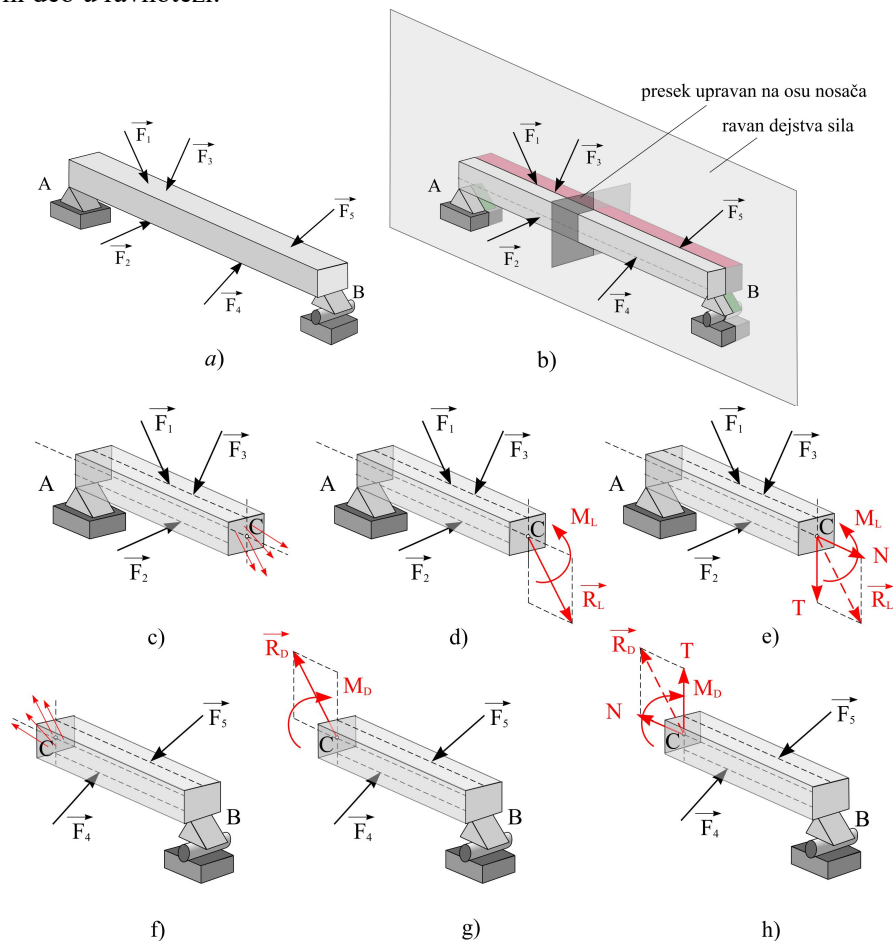
Prema rasporedu sila koje deluju na gredne nosače, oni mogu biti ravni i prostorni. Ako osa nosača i sile – opterećenja, leže u jednoj ravni, nosač je ravan (ravanski), u protivnom nosač je prostoran. U ovom poglavlju se govori o tome kako se određuju unutrašnje sile u grednim ravnim nosačima, kao i u grednim prostornim nosačima.

12.1 Unutrašnje sile u poprečnom preseku nosača u ravni

12.1.1 Definicije sila u preseku

Greda ili gredni nosač je telo kod koga je jedna dimenzija – dužina izraženija u odnosu na druge dve. Gredni nosač je osnovni konstruktivni element u najvećem broju konstruktivnih sistema. Projektovanje bilo kog konstruktivnog elementa podrazumeva određivanje *unutrašnjih sila* u tom elementu.

Unutrašnje sile se mogu odrediti primenom *metode preseka*. Da bi se ilustrovao ovaj postupak, posmatra se gredni nosač opterećen ravnim sistemom sila \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 , \vec{F}_4 i \vec{F}_5 , Slika 12.1 a). Ako je potrebno odrediti unutrašnje sile koje deluju na poprečni presek u tački C, zamisli se presek upravan na osu štapa, tj. upravan na tangentu na mestu preseka, kojim se nosač podeli na dva dela, Slika 12.1 b). *Osa štapa je geometrijsko mesto težišta poprečnih preseka*. Primenom ovog postupka, unutrašnje sile u preseku postaju spoljašnje na osnovu pete aksiome. Ako je gredni nosač bio u ravnoteži, onda je i svaki njegov izdvojeni deo u ravnoteži.



Slika 12.1 a) Prosta greda opterećena ravnim sistemom sila; b) ravan dejstva sila i ravan upravna na osu nosača koja deli gredu na dva dela; c) deo grede AC sa unutrašnjim silama u poprečnom preseku; d) redukciona rezultanta i redukcioni spreg sila; e) komponente N i T redukcione rezultante i moment redukcionog sprega M_L ; f) deo grede CB sa unutrašnjim silama u poprečnom preseku; g) redukciona rezultanta i redukcioni spreg sila; h) komponente N i T redukcione rezultante i moment redukcionog sprega M_D .

Ako se zamisli da je deo CB grede uklonjen, na mestu preseka će se pojaviti uticaj izdvojenog dela CB na deo AC u vidu unutrašnjih sila, Slika 12.1 c). Kako je gredni nosač opterećen ravanskim sistemom sila, unutrašnje sile u poprečnom preseku predstavljaju proizvoljni sistem sila u istoj ravni. Ako se unutrašnje sile redukuju u težište poprečnog preseka, tačku C, dobija se *redukciona rezultanta* – glavni vektor \vec{R}_L i *redukcioni spreg sila* – glavni moment M_L , Slika 12.1 d). Takođe, deo AC deluje na deo CB unutrašnjim silama, Slika 12.1 f), koje se redukcijom svode na \vec{R}_D i M_D , Slika 12.1 g). Na osnovu šeste aksiome oni su istog pravca i intenziteta, a suprotnog smera:

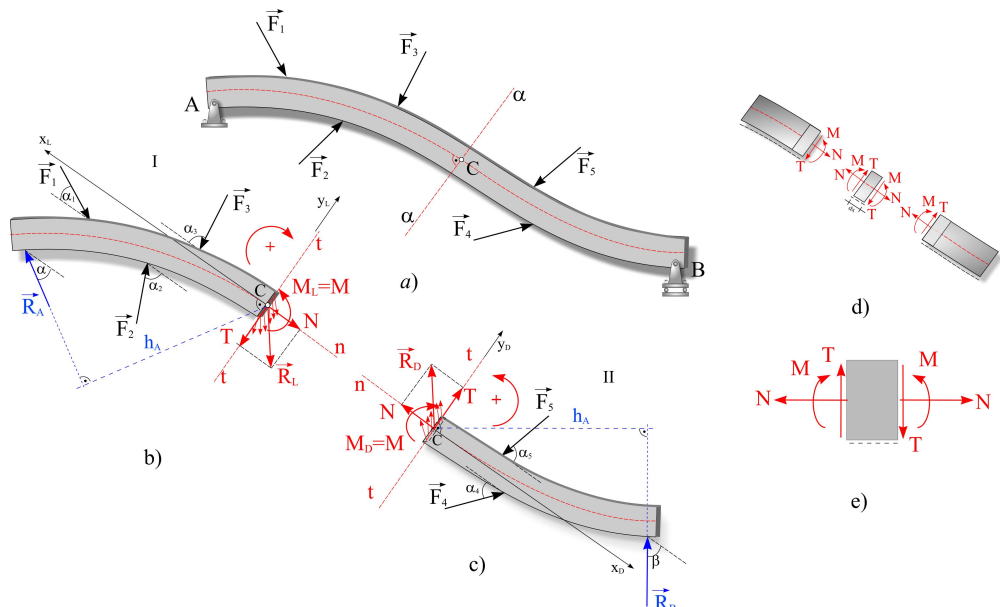
$$\vec{R}_D = -\vec{R}_L, \quad R_L = R_D, \quad M_L = M_D. \quad (12.1)$$

Redukciona rezultanta \vec{R}_L , odnosno \vec{R}_D , može se razložiti na komponente u pravcu normale preseka (osa štapa) i u pravcu upravnom na normalu preseka, Slika 12.1 e) i h). Komponenta redukcionog rezultante N, koja je u pravcu normale preseka, i komponenta T, koja je u pravcu upravnom na normalu preseka, nazivaju se *normalna ili aksijalna sila* i *transverzalna ili poprečna sila*. Moment redukcionog sprega M je moment unutrašnjih sila u odnosu na težište preseka i naziva se *moment savijanja*.

Normalna sila N i transverzalna sila T su komponente redukcionog rezultante unutrašnjih sila u pravcu ose štapa i upravno na pravac ose štapa, a moment savijanja M je moment redukcionog sprega unutrašnjih sila kada se težište preseka uzme za redukcionu tačku.

12.1.2 Proračun sila u preseku

Vrednosti momenta savijanja, transverzalne i normalne sile u preseku nosača određuju se iz uslova ravnoteže odsečenog dela nosača. Posmatra se nosač čija je osa krivolinijska, Slika 12.2 a). Napadne linije sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ i \vec{F}_5 koje deluju na nosač su u ravni nosača i seku osu nosača (prolaze kroz težišta poprečnih preseka štapa). Reakcije veza u A i B su u istoj ravni i određene su na osnovu jednačina ravnoteže tela.



Slika 12.2 a) Prosta greda opterećena ravnim sistemom sila; b) deo grede AC sa silama u preseku; c) deo grede CB sa silama u preseku; d) elementarni deo sa silama u presecima; e) šablon za pozitivan znak – usvojeni pozitivni smerovi sila u presecima.

Zamišljenim presekom α - α , upravnim na težišnu osu, nosač je podeljen na dva dela, Slika 12.2 b) i c).

Posmatra se deo I (levi deo štapa) i postavi koordinatni sistem u težište poprečnog preseka, tačku C, tako da osa x_L bude u pravcu ose štapa, odnosno da tangira osu štapa, a osa y_L bude upravna na nju, Slika 12.2 b). Pošto sve sile leže u ravni nosača $x_L C y_L$, algebarski zbir projekcija svih spoljašnjih sila i reakcija veza, koje deluju na deo I, na ose x_L i y_L , je:

$$\begin{aligned}\sum X_L &= -F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 - F_3 \cos \alpha_3 + R_A \cos \alpha, \\ \sum Y_L &= -F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 - F_3 \sin \alpha_3 + R_A \sin \alpha,\end{aligned}\quad (12.2)$$

a algebarski zbir momenata svih spoljašnjih sila koje deluju na deo I, u odnosu na tačku C je:

$$\sum M_{C,L} = -F_1 \cdot r_1 + F_2 \cdot r_2 - F_3 \cdot r_3 + R_A \cdot r_A, \quad (12.3)$$

gde su r_1, r_2, r_3 normalna rastojanja između sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ i momentne tačke C, a r_A normalno rastojanje između reakcije \vec{R}_A i momentne tačke C, Slika 12.2 b).

Na osnovu izraza (12.2) i (12.3) i Slike 12.2 b), za levi deo nosača je:

$$\begin{aligned}\sum X = 0 &\rightarrow \sum X_L - N = 0 & N &= \sum X_L, \\ \sum Y = 0 &\rightarrow \sum Y_L - T = 0 & \Rightarrow T &= \sum Y_L, \\ \sum M = 0 &\rightarrow \sum M_L - M = 0 & M &= \sum M_{C,L}.\end{aligned}\quad (12.4)$$

Desni deo nosača takođe treba da bude u ravnoteži. Koordinatni sistem $x_D C y_D$ postavljen je kao na Slici 12.2 c). Algebarski zbir projekcija svih spoljašnjih sila i reakcija veza, koje deluju na ovaj deo, na ose x_D i y_D , je:

$$\begin{aligned}\sum X_D &= F_4 \cos \alpha_4 - F_5 \cos \alpha_5 - R_B \cos \beta, \\ \sum Y_D &= F_4 \sin \alpha_4 - F_5 \sin \alpha_5 + R_B \sin \beta,\end{aligned}\quad (12.5)$$

a algebarski zbir momenata svih spoljašnjih sila, koje deluju na deo II, u odnosu na tačku C je:

$$\sum M_{C,D} = F_4 \cdot r_4 - F_5 \cdot r_5 + R_B \cdot r_B. \quad (12.6)$$

Za desni deo nosača, na osnovu izraza (12.5) i (12.6) i Slike 12.2 c) je:

$$\begin{aligned}\sum X = 0 &\rightarrow \sum X_D - N = 0 & N &= \sum X_D, \\ \sum Y = 0 &\rightarrow \sum Y_D - T = 0 & \Rightarrow T &= \sum Y_D, \\ \sum M = 0 &\rightarrow \sum M_{C,D} - M = 0 & M &= \sum M_{C,D}.\end{aligned}\quad (12.7)$$

Iz izraza (12.4) i (12.7) sledi:

$$\begin{aligned}N &= \sum X_L = \sum X_D, \\ T &= \sum Y_L = \sum Y_D, \\ M &= \sum M_{C,L} = \sum M_{C,D}.\end{aligned}\quad (12.8)$$

Na osnovu sprovedene analize zaključuje se:

Normalna ili aksijalna sila N u proizvoljnom preseku ravanskog nosača jednaka je algebarskom zbiru projekcija svih sila na osu normalnu na presek bilo s leve, bilo s desne strane preseka.

Transverzalna ili poprečna sila T u proizvoljnom preseku ravanskog nosača jednaka je algebarskom zbiru projekcija svih sila s jedne ili druge strane preseka na osu upravnu na normalu preseka.

Moment savijanja M u proizvoljnom preseku ravanskog nosača jednak je algebarskom zbiru momenata svih sila s jedne ili druge strane preseka u odnosu na težište poprečnog preseka.

12.1.3 Konvencija o znaku sila u preseku

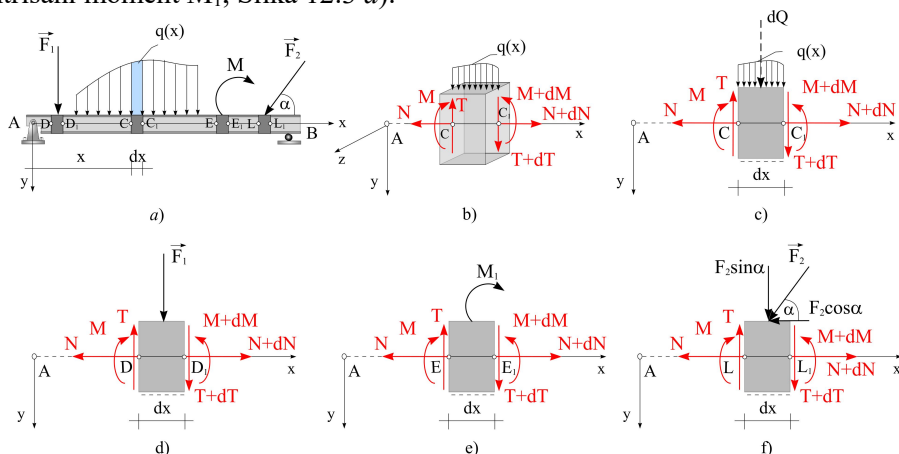
Za moment savijanja, normalnu i transverzalnu silu usvojena je sledeća konvencija o znaku, Slika 12.2 e):

- Normalna sila je pozitivna ako je usmerena od preseka, posmatrano bilo s leve, bilo s desne strane, tj. ako zateže element štapa, a negativna ako ga pritiska;
- Transverzalna sila je pozitivna ako nastoji da obrne element grede u smeru kretanja kazaljke na satu, tj. ako posmatrano s leve strane ima smer na gore, a posmatrano s desne strane ima smer na dole;
- Moment savijanja je pozitivan ako posmatrano s leve strane preseka ima smer kretanja kazaljke na satu, odnosno posmatrano s desne strane ima smer suprotan smeru kretanja kazaljke na satu, tj. ako zateže donju stranu nosača.

U praktičnim problemima treba zbog jednostavnijeg proračuna usvojiti jednu stranu nosača za donju stranu i označiti je isprekidanom linijom. Kod vertikalnih elemenata (stubova) to je leva ili desna strana. Iz nosača se izdvoji element beskonačno male dužine, čije su stranice normalne na osu nosača, Slika 12.2 d). Uticaj uklonjenih delova nosača se nadoknadi unutrašnjim silama, koje se smatraju pozitivnim ako su usmerene kao na Slici 12.2 d) i e).

12.1.4 Veza momenta savijanja, transverzalne sile i raspodeljenog linijskog opterećenja

Posmatra se pravolinijski nosač na koji deluje raspodeljeno opterećenje $q(x)$, sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 i koncentrisani moment M_1 , Slika 12.3 a).



Slika 12.3 a) Prosta greda opterećena ravanskim sistemom sila; b) deo grede elementarne dužine; c) elementarni deo grede CC₁; d) elementarni deo grede DD₁; e) elementarni deo grede EE₁; f) elementarni deo grede LL₁.

Ako se nosač preseče ravnima upravnim na osu x , koje su na međusobnom rastojanju dx , dobijaju se tri elementa grede. Na element grede male dužine dx deluje samo specifično linijsko opterećenje $q(x)$. Kako je dužina grede mala, može se smatrati da je linijsko opterećenje konstantno na dužini dx , Slika 12.3 b), c). Tada je rezultanta raspodeljenog opterećenja jednaka površini površi opterećenja, tj. površini pravougaonika:

$$dQ = q(x) dx \quad (12.9)$$

i deluje na sredini dužine dx . Na element grede deluju sa obe strane unutrašnje sile – transversalna sila i i moment savijanja. Pretpostavljeno je da su pozitivnog smera prema konvenciji o znaku sila u presecima, Slika 12.3 b) i c). Veličine sila u presecima levo i desno razlikuju se za male vrednosti dT , tj. dM , s obzirom da je veličina rezultante dQ raspodeljenog opterećenja mala.

Kako je celokupno opterećenje u ravni xOy , može se posmatrati elementarni deo na Slici 12.3 c). Ako je nosač u ravnoteži, onda i svaki njegov izdvojeni deo mora biti u ravnoteži. Uslovi ravnoteže elementa grede glase:

$$\begin{aligned} \sum Y = 0 &\rightarrow T + dT - T + q(x) dx = 0, \\ \sum M_{C_1} = 0 &\rightarrow M + dM - M - T \cdot dx - q(x) dx \cdot \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Veličina dx^2 je mala veličina višeg reda, pa se član $q(x) dx \cdot \frac{dx}{2}$ može zanemariti. Iz izraza (12.10) sledi:

$$q(x) = -\frac{dT}{dx}, \quad (12.11)$$

$$T = \frac{dM}{dx}. \quad (12.12)$$

Zamenom (12.12) u (12.11) dobija se:

$$q(x) = -\frac{dT}{dx} = -\frac{d^2M}{dx^2}. \quad (12.13)$$

Za deo nosača na koji deluje linijsko raspodeljeno opterećenje važe *diferencijalne veze*:

- Transverzalna sila jednaka je prvom izvodu momenta savijanja;
- Kontinualno opterećenje jednako je prvom izvodu transverzalne sile sa znakom minus i drugom izvodu momenta savijanja.

Na neopterećenom delu pravolinijskog nosača ($q = 0$) iz izraza (12.11) se zaključuje da je transversalna sila konstantna, a iz izraza (12.12) da je na tom delu moment savijanja funkcija prvog reda.

Iz izraza (12.12) se zaključuje da moment savijanja raste ako je transversalna sila pozitivna, opada ako je transversalna sila negativna, a konstantan je ako je transversalna sila jednaka nuli:

$$T > 0 \rightarrow M \nearrow, \quad T < 0 \rightarrow M \searrow, \quad T = 0 \rightarrow M = \text{cons.}$$

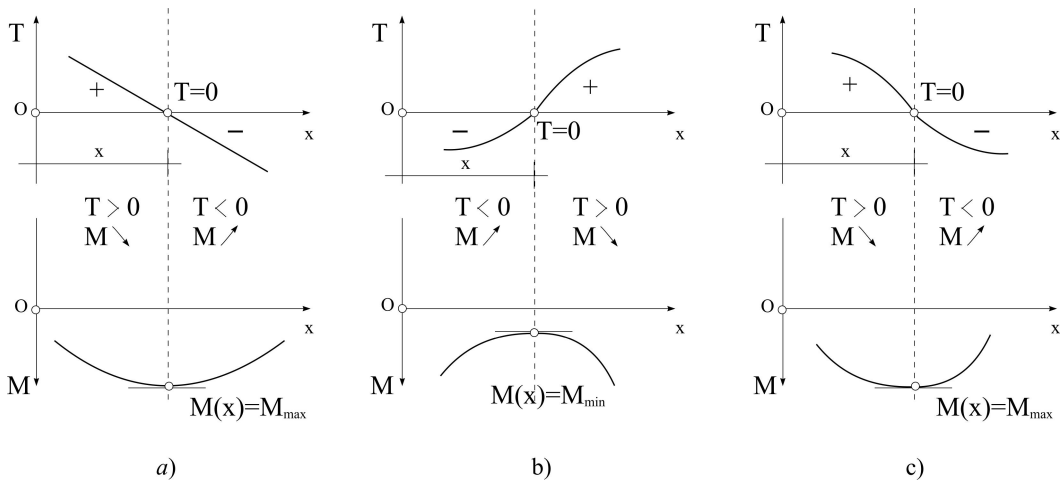
Poznato je da funkcija ima ekstremnu vrednost na mestu gde je njen izvod jednak nuli ($\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow y_{\max}$), pa se na osnovu izraza (12.12) zaključuje da moment savijanja ima

ekstremnu vrednost u preseku gde transversalna sila prolazi kroz nulu ($\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow T = 0, M_{\max}$).

Iz izraza (12.11) sledi da transverzalna sila ima ekstremnu vrednost na mestu gde funkcija opterećenja q ima vrednost nula. Ovo je ilustrovano na Slici 12.4.

Dakle, posledica uslova ekstremuma funkcije i diferencijalnih zavisnosti (12.11) i (12.12) je:

Moment savijanja ima ekstremnu vrednost u preseku u kome je transverzalna sila jednaka nuli, a transverzalna sila ima ekstremnu vrednost u preseku u kome funkcija opterećenja q ima vrednost jednaku nuli.



Slika 12.4 Ekstremumi momenta savijanja

Diferencijalne veze (12.11), (12.12), odnosno (12.13), ne važe za preseke u kojima deluje koncentrisana sila ili moment. Ova dva slučaja izazivaju diskontinuitet u dijagramu transverzalnih sila, momenata savijanja i normalnih sila.

Elementarni deo grede DD_1 na koji deluje sila \vec{F}_1 prikazan je na Slici 12.3 d). Iz jednačine ravnoteže:

$$\sum Y = 0 \rightarrow T + dT - T + F_1 = 0 \Rightarrow T + dT = T - F_1, \quad dT = -F_1,$$

se zaključuje da se vrednosti transverzalne sile u D i transverzalne sile u D_1 razlikuju za veličinu sile \vec{F}_1 . Dakle, koncentrisana sila u nekom preseku izaziva prekid – skok u dijagramu transverzalnih sila za veličinu sile. Takođe, u preseku u kome deluje sila dolazi do promene nagiba dijagrama momenta savijanja (videti primere 12.2 i 12.1).

Ako se iz grede izdvoji element EE_1 na koji deluje koncentrisani moment M_1 , Slika 12.3 e), momentna jednačina ravnoteže glasi:

$$\sum M_{E_1} = 0 \rightarrow M + dM - M - M_1 - T \cdot dx = 0 \Rightarrow dM = M_1.$$

Kako je dx mala veličina ($dx \rightarrow 0$), član $T \cdot dx$ se može zanemariti, pa se zaključuje da se vrednosti momenta savijanja u E i u E_1 razlikuju za veličinu momenta M_1 . Koncentrisani moment izaziva prekid – skok funkcije momenta savijanja. Pri tome koncentrisani spreg – moment nema uticaja na promenu transverzalne sile (videti primer 12.3).

Sila \vec{F}_2 deluje na nosač na Slici 12.3 a) u preseku L pod uglom α . Sila se predstavlja svojim ortogonalnim komponentama, Slika 12.3 f), a jednačine ravnoteže elementarnog dela LL_1 glase:

$$\sum X = 0 \rightarrow N + dN - N - F_2 \cos \alpha = 0 \Rightarrow dN = F_2 \cos \alpha,$$

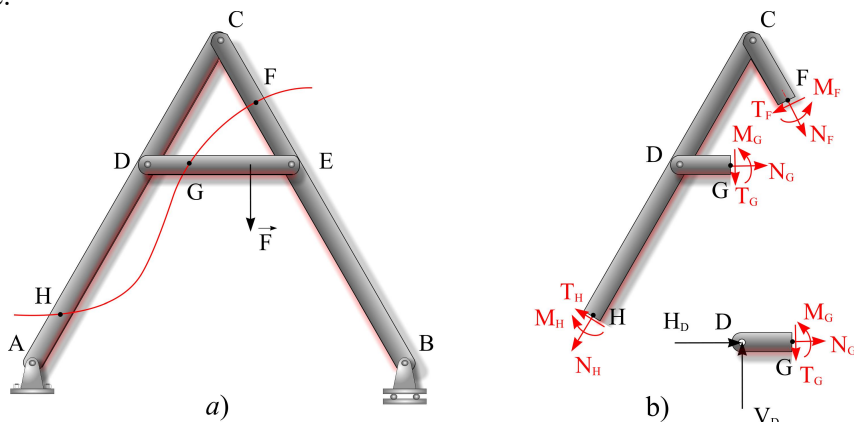
$$\sum Y = 0 \rightarrow T + dT - T + F_2 \sin \alpha = 0 \Rightarrow dT = -F_2 \sin \alpha.$$

Iz ovih jednačina sledi da *do skoka u dijagramu normalnih sila dolazi u preseku u kome deluje sila u pravcu ose nosača, odnosno sila koja ima projekciju na pravac ose nosača* (videti primer 12.1).

Na osnovu svega izloženog zaključuje se da na nosaču treba uočiti *polja opterećenja*. Koncentrisne sile i spregovi izazivaju prekide (skokove) domena neprekidnosti unutrašnjih sila stvarajući polja opterećenja. Primeri podele nosača u polja opterećenja dati su na Slici 12.6.

12.1.5 Dijagrami sila u preseku

Konstrukcije su u opštem slučaju izložene raznim spoljašnjim opterećenjima, čija su posledica unutrašnje sile – normalne, transversalne i momenti savijanja. Na primer, ako se preseče ram, u tačkama H, G i F pojavljuju se unutrašnje sile, kao posledica uklonjenih delova rama, Slika 2.5 a). Sile u ovim presecima se ne mogu odrediti primenom uslova ravnoteže. Da bi se rešio problem potrebno je osloboditi se veza, raščlaniti sistem na tela i odrediti sve reakcije veza. Tada je moguće primeniti metodu preseka u odgovarajućim tačkama i primenom izraza (12.4), tj. (12.7), odrediti N, T i M. U preseku G unutrašnje sile se određuju posmatrajući deo DG, Slika 12.5 b), pod uslovom da su reakcije H_D i V_D već određene.



Slika 12.5 a) Ram u ravni; b) preseci i sile u presecima.

Unutrašnje sile sračunate analitičkim putem mogu se grafički predstaviti u obliku *dijagrama momenata savijanja, dijagrama transversalnih sila i dijagrama normalnih sila*.

Postupak određivanja dijagrama M, T i N:

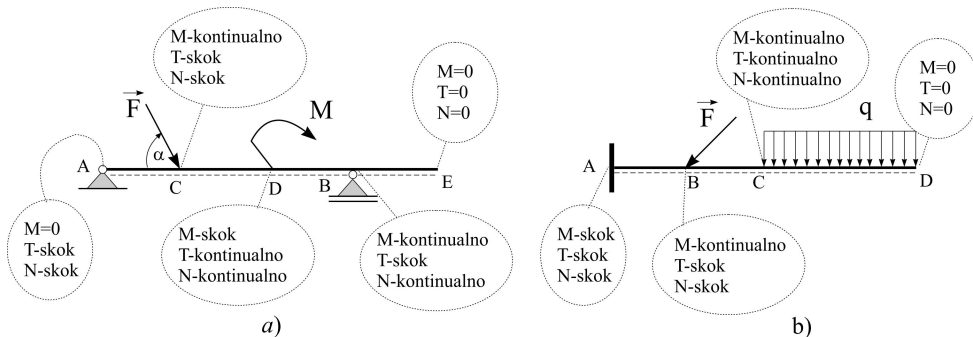
- Odrede se reakcije veza i razlože sve sile na komponente u pravcu ose štapa i u pravcu upravnom na pravac ose štapa;
- Sastave se analitički izrazi, kao zakoni promene momenta savijanja, transversalne i normalne sile u zavisnosti od apscise preseka, $M=M(x)$, $T=T(x)$ i $N=N(x)$, definišući početak ose x na levom kraju štapa, uzimajući pozitivan smer ose x s leva na desno, a kraj na delu između koncentrisanih sila i/ili koncentrisanih momenata, odnosno na delu na kome nema diskontinuiteta u kontinualnom opterećenju;

- U karakterističnim presecima (seče se štap upravno na osu) sračunaju se vrednosti M , T i N . Karakterističnim presecima smatraju se preseci u kojima deluje sila, koncentrisani moment, početak i kraj raspodeljenog opterećenja itd, odnosno preseci u kojima se menja zakonitost promene spoljašnjeg opterećenja, kao i preseci u kojima se javljaju ekstremne vrednosti sila u presecima. Zatim se u odabranoj razmeri dobijene vrednosti nanese upravno na osu grede, vodeći računa o znaku (konvencija o pozitivnom znaku). Pozitivne vrednosti momenta savijanja se crtaju na strani zategnutog dela grede, a negativne na strani pritisnutog dela grede, dok se dijagrami aksijalnih i transverzalnih sila crtaju najčešće tako da se pozitivne vrednosti nanose iznad, a negativne ispod ose nosača;
- Nanesene ordinate, koje predstavljaju vrednosti M , T i N u karakterističnim presecima, linijski se povežu, imajući u vidu $M=M(x)$, $T=T(x)$ i $N=N(x)$. Dobijeni grafici se nazivaju dijagrami momenata, transverzalnih i normalnih sila. Zbog bolje preglednosti je dobro da se dijagrami crtaju ispod štapa.

Pri crtanju dijagrama sila u presecima potrebno je pored zaključaka izloženih u 12.1.4, imati u vidu i sledeće:

- U dijagramu transverzalnih sila postoji skok u preseku u kome deluje koncentrisana sila;
- U dijagramu momenata savijanja postoji skok na mestu delovanja koncentrisanog sprega.

Ovo je ilustrovano primerima na Slici 12.6 a) i b). Polja opterećenja na nosaču na Slici 12.6 a) su AC, CD, DB i BE, a na nosaču na Slici 12.6 b) su AB, BC i CD. Oblici dijagrama između karakterističnih preseka su u skladu sa diferencijalnim vezama i prikazani su u tabeli na Slici 12.7.



Slika 12.6 a) Karakteristični preseci grede s prepustom opterećene silom i spregom, polja opterećenja; b) karakteristični preseci ukleštene grede opterećene silom i raspodeljenim opterećenjem, polja opterećenja.

$q(x)$	$T(x)$	$M(x)$
nula	konstantna f-ja	linearna f-ja
konstantna f-ja	linearna f-ja	funkcija II reda
linearna f-ja	funkcija II reda	funkcija III reda

Slika 12.7 Oblici dijagrama T i M u zavisnosti od opterećenja q

12.1.6 Rešavanje statički određenih linijskih nosača

Rešiti jedan linijski nosač znači:

1. Odrediti reakcije veza u osloncima, tj. zglobovima, kojima je nosač vezan za tlo ili druge nosače i konstrukcije;
2. Odrediti sile u presecima i nacrtati dijagrame sila u presecima.

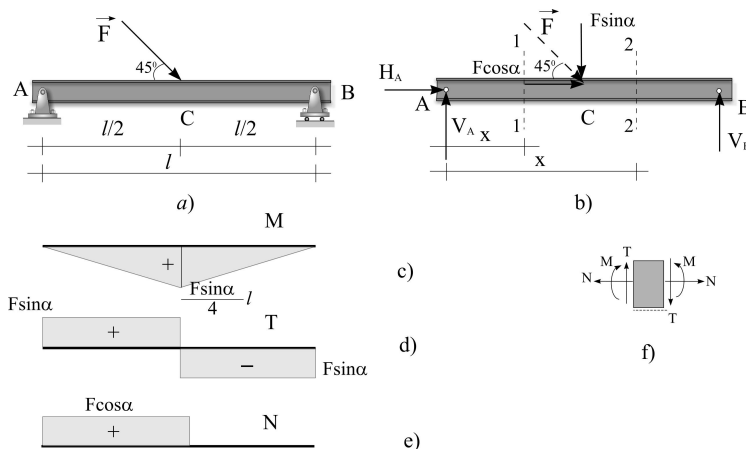
Pri rešavanju nosača često se primenjuje princip superpozicije. Delovanje jednog opterećenja, kao što je koncentrisana sila, moment ili kontinualno opterećenje ne zavisi od delovanja ostalog opterećenja, pa se delovanje svakog opterećenja može posmatrati posebno. Reakcije veza i sile u presecima od delovanja ukupnog opterećenja dobijaju se sabiranjem rezultata dobijenih za svako pojedinačno razmatrano opterećenje.

U ovom poglavlju obrađeni su karakteristični primeri nosača i opterećenja. Prema njihovoj geometriji i podeli (poglavljje 10), određivanje sila u presecima je pokazano na primerima pravolinijskih greda, okvirnih nosača i složenih nosača.

Primeri određivanja sila u preseku linijskih nosača u ravni

Primer 12.1

Prosta greda, prikazana na Slici P 12.1, opterećena je silom \vec{F} koja deluje pod uglom α u odnosu na osu nosača. Odrediti veličine sila u presecima i nacrtati dijagrame.



Slika P 12.1 a) Prosta greda opterećena silom; b) greda oslobođena veza; c) dijagram momenata savijanja; d) dijagram transverzalnih sila; e) dijagram normalnih sila; f) šablon za pozitivan znak.

Iz jednačina ravnoteže:

$$\sum X = 0 \rightarrow H_A + F \cos \alpha = 0,$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow V_A + V_B - F \sin \alpha = 0,$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_B \cdot l - F \sin \alpha \cdot \frac{l}{2} = 0,$$

dobijaju se reakcije veza: $H_A = -F \cos \alpha$, $V_B = \frac{F \sin \alpha}{2}$, $V_A = \frac{F \sin \alpha}{2}$.

Analiza sila u presecima vršiće se po poljima opterećenja formiranjem analitičkih izraza, kao zakona promene momenta savijanja, transverzalne i normalne sile u zavisnosti od x , $M=M(x)$, $T=T(x)$ i $N=N(x)$, definišući početak ose x na levom kraju štapa, uzimajući pozitivan smer ose x s leva na desno, Slika P 12.1 b).

Ovde postoje dva polja opterećenja, polje AC i polje CB. Za nosač u ravni, na osnovu izraza (12.8), normalna sila u nekom preseku jednaka je algebarskom zbiru svih sila u pravcu ose nosača levo ili desno od preseka, transverzalna sila jednaka je algebarskom zbiru svih sila u pravcu upravnom na pravac ose nosača levo ili desno od preseka, a moment savijanja jednak je algebarskom zbiru momenata svih sila levo ili desno od preseka u odnosu na težište poprečnog preseka.

Deo grede AC je polje na kome nema kontinualnog opterećenja. Presek 1-1 je na rastojanju x od početka tog polja. Analitički izrazi sila u preseku, vodeći računa o konvenciji za pozitivan znak, Slika P 12.1 f), za polje AC glase:

$$N_{1-1} = -H_A = F \cos \alpha, \quad T_{1-1} = V_A = \frac{F \sin \alpha}{2}, \quad M_{1-1} = V_A \cdot x = \frac{F \sin \alpha}{2} x,$$

gde je x u granicama $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$. Očigledno je da izrazi za normalnu i transverzalnu silu ne zavise od x – konstantne su vrednosti N i T na celom polju, dok je moment savijanja funkcija prvog reda. Na početku polja, u preseku A, gde je $x = 0$, vrednost momenta savijanja je $M_A = 0$, dok je na kraju polja, za $x = \frac{l}{2}$, tj. u preseku C, vrednost momenta

$$M_C = \frac{F \sin \alpha}{2} \frac{l}{2} = \frac{F \sin \alpha}{4} l.$$

Za polje CB, koje je definisano presekom 2-2, analitički izrazi sila u preseku glase:

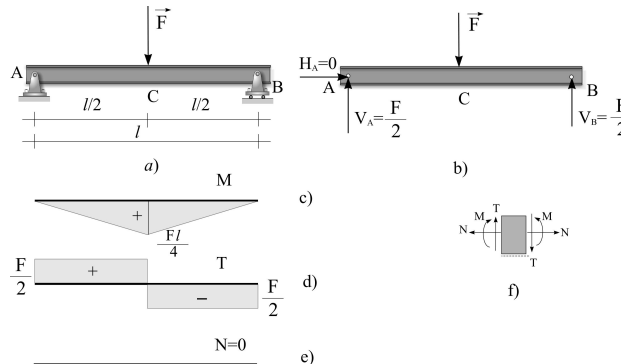
$$N_{2-2} = 0, \quad T_{2-2} = V_A - F \sin \alpha = -\frac{F \sin \alpha}{2}, \quad M_{2-2} = V_A \cdot x - F \left(x - \frac{l}{2} \right) = \frac{F \sin \alpha}{2} x - F \left(x - \frac{l}{2} \right)$$

gde je $\frac{l}{2} \leq x \leq l$. I na ovom polju normalna i transverzalna sila imaju konstantne vrednosti, dok je izraz za moment savijanja funkcija prvog reda. Na početku polja, u tački C, za $x = \frac{l}{2}$, vrednost momenta savijanja je $M_C = \frac{F \sin \alpha}{2} \frac{l}{2} = \frac{F \sin \alpha}{4} l$, dok je na kraju polja ($x = l$), u preseku B, vrednost momenta savijanja $M_B = 0$.

Na osnovu sprovedene analize korišćenjem pravila iz poglavlja 12.1.5, nacrtani su dijagrami sila u presecima, Slika P 12.1 c), d) i e).

Primer 12.2

Prosta greda, Slika P 12.2, opterećena je vertikalnom silom \vec{F} na sredini. Odrediti veličine sila u presecima i nacrtati dijagrame.

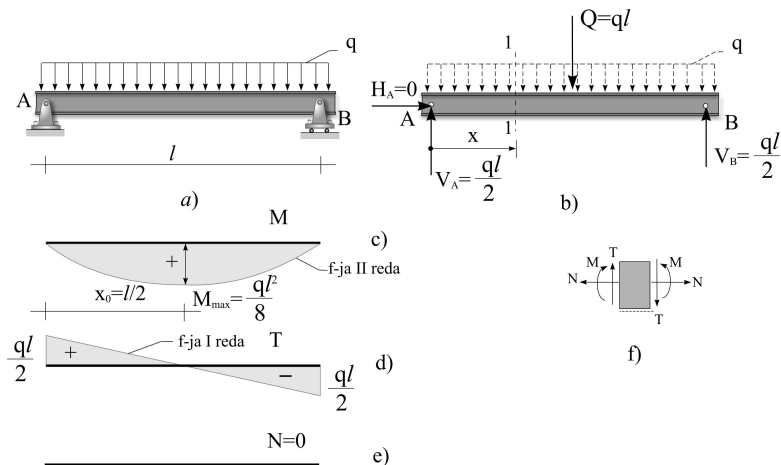


Slika P 12.2 a) Prosta greda opterećena vertikalnom silom; b) greda oslobođena veza; c) dijagram momenata savijanja; d) dijagram transverzalnih sila; e) dijagram normalnih sila; f) šablon za pozitivan znak.

Ako je sila vertikalna i deluje na sredini grede ($x=0$), reakcije veza su $H_A = 0$, $V_A = V_B = \frac{F}{2}$, maksimalna vrednost momenta savijanja je $M_C = \frac{Fl}{4}$, a dijagrami su predstavljeni na Slici P 12.2 c), d) i e). Ovo je specijalan slučaj primera 12.1.

Primer 12.3

Prosta greda, Slika P 12.3, opterećena je jednako podeljenim opterećenjem q duž celog raspona l . Odrediti veličine sila u presecima i nacrtati dijagrame.



Slika P 12.3 a) Prosta greda opterećena jednako podeljenim opterećenjem q duž celog raspona; b) greda oslobođena veza; c) dijagram momenata savijanja; d) dijagram transverzalnih sila; e) dijagram normalnih sila; f) šablon za pozitivan znak.

Specifično opterećenje q je konstantno. Rezultanta raspodeljenog opterećenja jednaka je površini pravougaonika, Slika P 12.3 b), koji predstavlja to opterećenje $Q = ql$, i deluje u težištu pravougaonika. Reakcije oslonaca su:

$$V_A = V_B = \frac{ql}{2}.$$

Ovde postoji jedno polje opterećenja AB, s obzirom da je greda opterećena jednako podeljenim opterećenjem q duž celog raspona. Analitički izrazi za moment savijanja i transverzalnu silu (normalna sila je jednaka nuli) formiraće se tako što se za presek 1-1, na rastojanju x od oslonca A, primene izrazi (12.8). Pri tome treba voditi računa o konvenciji o znaku M , T i N , Slika P 12.3 f). Levo od uočenog preseka 1-1, na gredu deluje reakcija V_A i rezultanta kontinualnog opterećenja, koja je jednaka površini pravougaonika dužine x i visine q i deluje u težištu tog pravougaonika, tj. na rastojanju $\frac{x}{2}$ od oslonca A. Izrazi za moment savijanja, transverzalnu i normalnu silu glase:

$$M_{1-1} = V_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{ql}{2}x - q \frac{x^2}{2}, \quad T_{1-1} = V_A - qx = \frac{ql}{2} - qx, \quad N_{1-1} = 0.$$

Iz ovih izraza je očigledno da je transverzalna sila linearna funkcija (funkcija prvog reda) rastojanja x , a moment savijanja funkcija drugog reda.

Vrednosti momenata savijanja, transverzalnih i normalnih sila na početku i kraju polja, u tačkama A i B, su:

$$\text{za } x=0 \rightarrow M_A = 0, \quad T_A = \frac{ql}{2}, \quad N_A = 0, \quad \text{za } x=l \rightarrow M_B = 0, \quad T_B = -\frac{ql}{2}, \quad N_B = 0.$$

Dakle, moment savijanja se menja po zakonu kvadratne parabole, čija strela f može da se odredi iz uslova ekstremuma funkcije. Imajući u vidu diferencijalnu zavisnost između momenta savijanja i transverzalne sile, izraz (12.12), maksimalni moment savijanja se nalazi u preseku u kome je transverzalna sila jednaka nuli:

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{q}{2}(l - 2x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{l}{2}.$$

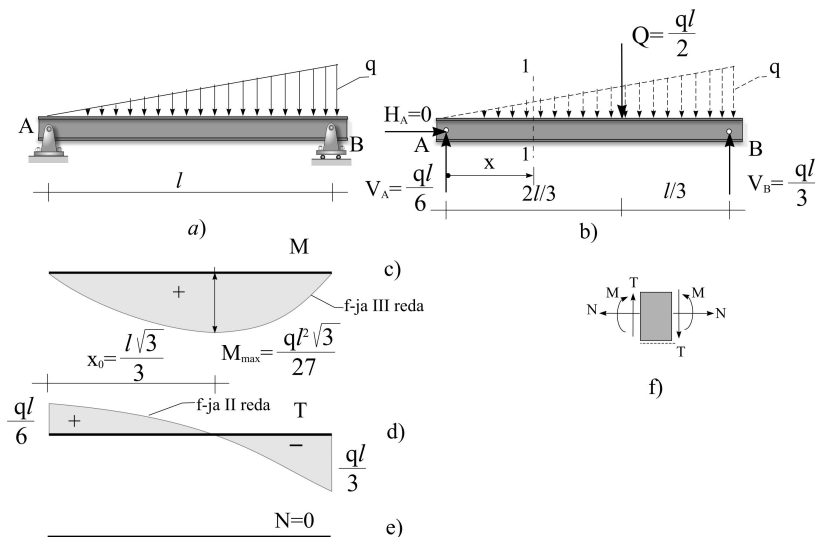
Veličina momenta savijanja u tom preseku je:

$$M_{\max} = M\left(x_0 = \frac{l}{2}\right) = \frac{ql}{2} \frac{l}{2} - q \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = \frac{ql^2}{8}.$$

Dujagrami momenata savijanja, transverzalnih i normalnih sila za prostu gredu raspona l , opterećenu jednako podeljenim opterećenjem q duž celog raspona, predstavljeni su na Slici 12.3 c), d) i e).

Primer 12.4

Prosta greda, prikazana na Slici P 12.4, opterećena je raspodeljenim trougaonim opterećenjem q duž celog raspona l . Odrediti veličine sila u presecima i nacrtati dijagrame.



Slika P 12.4 a) Prosta greda opterećena trougaonim podeljenim opterećenjem duž celog raspona; b) greda oslobođena veza; c) dijagram momenata savijanja; d) dijagram transverzalnih sila; e) dijagram normalnih sila; f) šablon za pozitiviranje znakova.

U ovom slučaju kontinualno opterećenje je raspodeljenim trougaonim opterećenjem duž celog raspona. Specifično opterećenje q menja se linearno od vrednosti 0 na levom kraju grede, do vrednosti q na desnom kraju grede, Slika P 12.4 a). Rezultanta Q kontinualnog opterećenja jednaka je površini trougla, Slika P 12.4 b).

Rakcije veza su:

$$H_A = 0, \quad V_B = \frac{2Q}{3} = \frac{ql}{3}, \quad V_A = \frac{Q}{3} = \frac{ql}{6}.$$

Zakon promene specifičnog opterećenja $q=q(x)$ dobiće se ako se uoči bilo koji presek (na primer 1-1) na rastojanju x od oslonca A, Slika P 12.4 b). Iz sličnosti trougla opterećenja, osnovice l i visine q , i trougla osnovice x i visine $q(x)$ dobija se:

$$q : q_{1-1} = l : x \Rightarrow q_{1-1} = \frac{qx}{l}.$$

Rezultanta trougaonog opterećenja je $\frac{q_{1-1}x}{2}$ i deluje u težištu trougla dužine x , tj. na rastojanju $\frac{2}{3}x$ od oslonca A.

Analitički izrazi za moment savijanja, transverzalnu i normalnu silu u preseku 1-1, koji se nalazi na rastojanju x od levog oslonca A, glase:

$$M_{1-1} = V_A \cdot x - \frac{q_{1-1} \cdot x \cdot x}{2 \cdot 3} = \frac{ql}{6}x - \frac{\frac{qx}{l} \cdot x}{2 \cdot 3} = \frac{ql}{6}x - \frac{q}{6l}x^3, \quad T_{1-1} = \frac{ql}{6} - \frac{q}{2l}x^2, \quad N_{1-1} = 0.$$

Vrednosti momenta savijanja i transverzalne sile na početku i na kraju polja su:

$$\text{za } x=0 \rightarrow M_A = 0, \quad T_A = \frac{ql}{6}, \quad \text{za } x=L \rightarrow M_B = 0, \quad T_B = -\frac{ql}{3}.$$

Moment savijanja je u ovom slučaju funkcija trećeg reda, tj. kubna parabola, dok se transverzalna sila menja po zakonu kvadratne parabole.

Kako transverzalna sila na jednom delu polja ima pozitivan, a na drugom negativan znak, to ukazuje na to da u polju AB postoji presek u kome je transverzalna sila jednaka nuli. Ako je taj presek na rastojanju x_0 od oslonca A, može se napisati:

$$\frac{ql}{6} - \frac{q}{2l}x_0^2 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{l\sqrt{3}}{3}.$$

Vrednost momenta savijanja u preseku u kome je transverzalna sila jednaka nuli je:

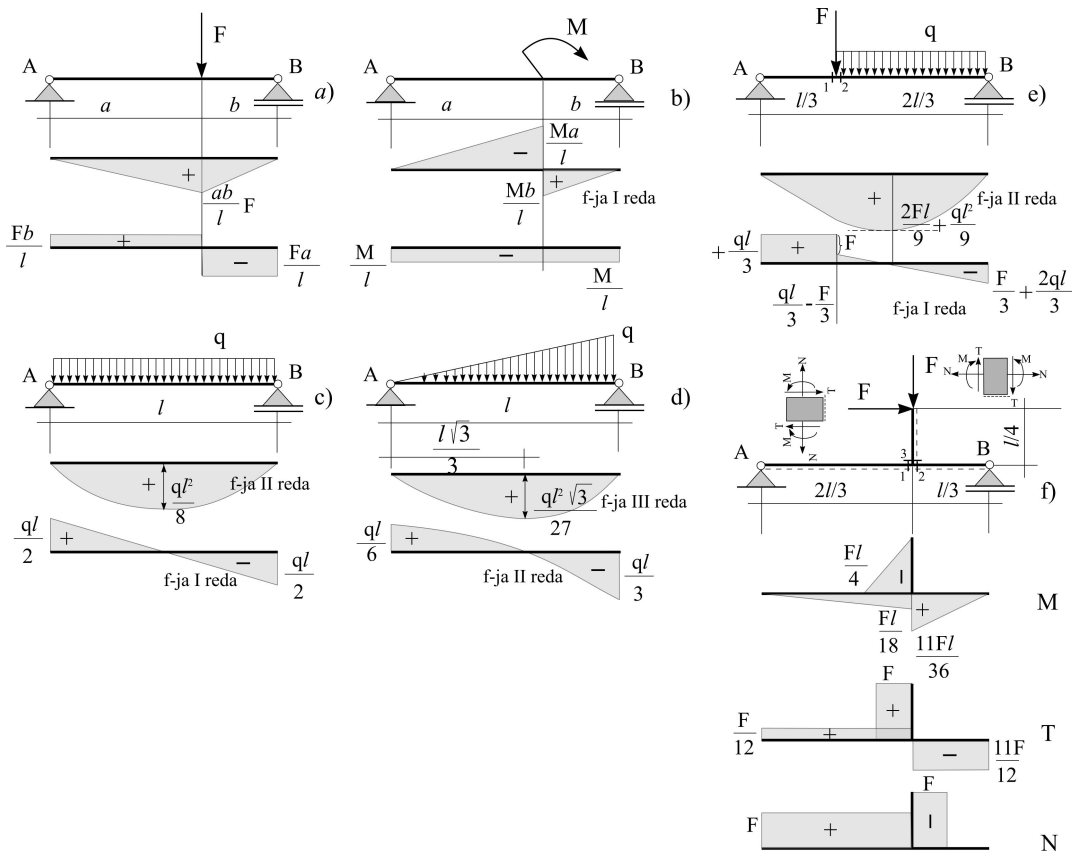
$$M_{\max} = M_{\left(x_0 = \frac{l\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{ql}{6} \frac{l\sqrt{3}}{3} - \frac{q}{6l} \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{ql^2\sqrt{3}}{27}.$$

Ovo je ujedno maksimalna vrednost momenta savijanja – strela f kvadratne parabole.

Dijagrami momenata savijanja, transverzalnih i normalnih sila za prostu gredu raspona l , opterećenu trougaonim opterećenjem duž celog raspona, predstavljeni su na Slici 12.4 c), d) i e).

Primer 12.5

Nacrtati dijagrame sila u presecima za proste grede prikazane na Slici P 12.5.



Slika P 12.5 a) Prosta greda opterećena silom, dijagram momenata savijanja i transverzalnih sila; b) prosta greda opterećena spregom – koncentrisanim momentom, dijagrami M i T; c) prosta greda opterećena jednako podeljenim opterećenjem duž celog raspona, dijagrami M i T; d) prosta greda opterećena raspodeljenim trougaonim opterećenjem duž celog raspona, dijagrami M i T; e) prosta greda opterećena silom i jednako podeljenim opterećenjem, dijagrami M i T; f) prosta greda opterećena silama, dijagrami M, T i N.

U poglavlju 10, u primeru 10.1, određene su reakcije veza za ove proste grede i prikazane su na Slici P 10.1. U primerima 12.3 i 12.4 detaljno su obrađene proste grede na Slici P 12.5 c) i d).

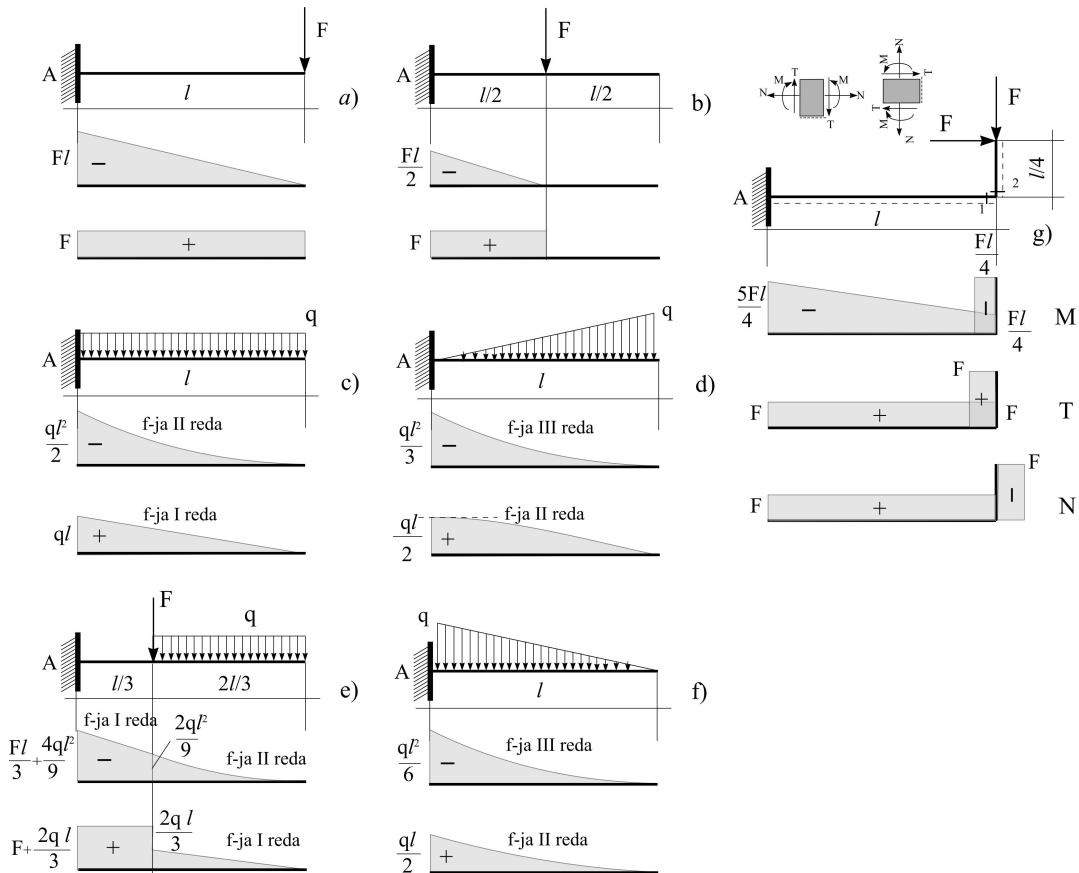
Prosta greda na Slici P 12.5 e) ima dva polja opterećenja A-1 i 2-B. Na delu A-1 proste grede nema raspodeljenog opterećenja, pa se moment savijanja na tom delu menja linearno, a transverzalna sila je konstantna. Deo grede 2-B je opterećen jednako podeljenim opterećenjem q, pa je dijagram momenata savijanja na tom delu kvadratna parabola, dok je dijagram transverzalnih sila funkcija prvog reda. Vrednosti transverzalnih sila u preseku 1 (kraj prvog polja) i preseku 2 (početak drugog polja) se razlikuju za veličinu sile, jer koncentrisana sila F izaziva skok u dijagramu transverzalnih sila, Slika 12.5 e).

Greda, prikazana na Slici P 12.5 f) ima tri polja opterećenja. Da bi se nacrtali dijagrami sila u presecima, treba usvojiti donju stranu nosača, označiti je isprekidanom linijom i postaviti šablon za pozitivan znak tako da se donja strana nosača i donja strana šablona poklapaju, kao što je na Slici 12.5 f) pokazano. Vrednosti sila u presecima mogu se odrediti i bez formiranja analitičkih izraza za moment savijanja, transverzalnu i normalnu silu.

Odrede se vrednosti sila u presecima na početku i na kraju polja opterećenja, posmatrajući nosač levo ili desno od preseka i poštujući konvenciju o znaku sila u presecima (šablon za pozitivan znak). Dobijene vrednosti se u odabranoj razmeri nanesu upravno na osu grede, a zatim se linijski povežu imajući u vidu diferencijalne zavisnosti, izrazi (12.11), (12.12) i (12.13). Na poljima A-1, 2-B i 3-F nema raspodeljenog opterećenja, pa su na sva tri polja dijagram momenta funkcija prvog reda, a transverzalne sile i normalne sile imaju konstantne vrednosti. U presecima 1, 2 i 3, gde su tri štapa kruto vezana, potrebno je sračunati vrednosti sila u presecima i naneti ih upravno na ose štapova, kao na Slici P 12.5 f).

Primer 12.6

Nacrtati dijagrame sila u presecima za konzole prikazane na Slici P 12.6.

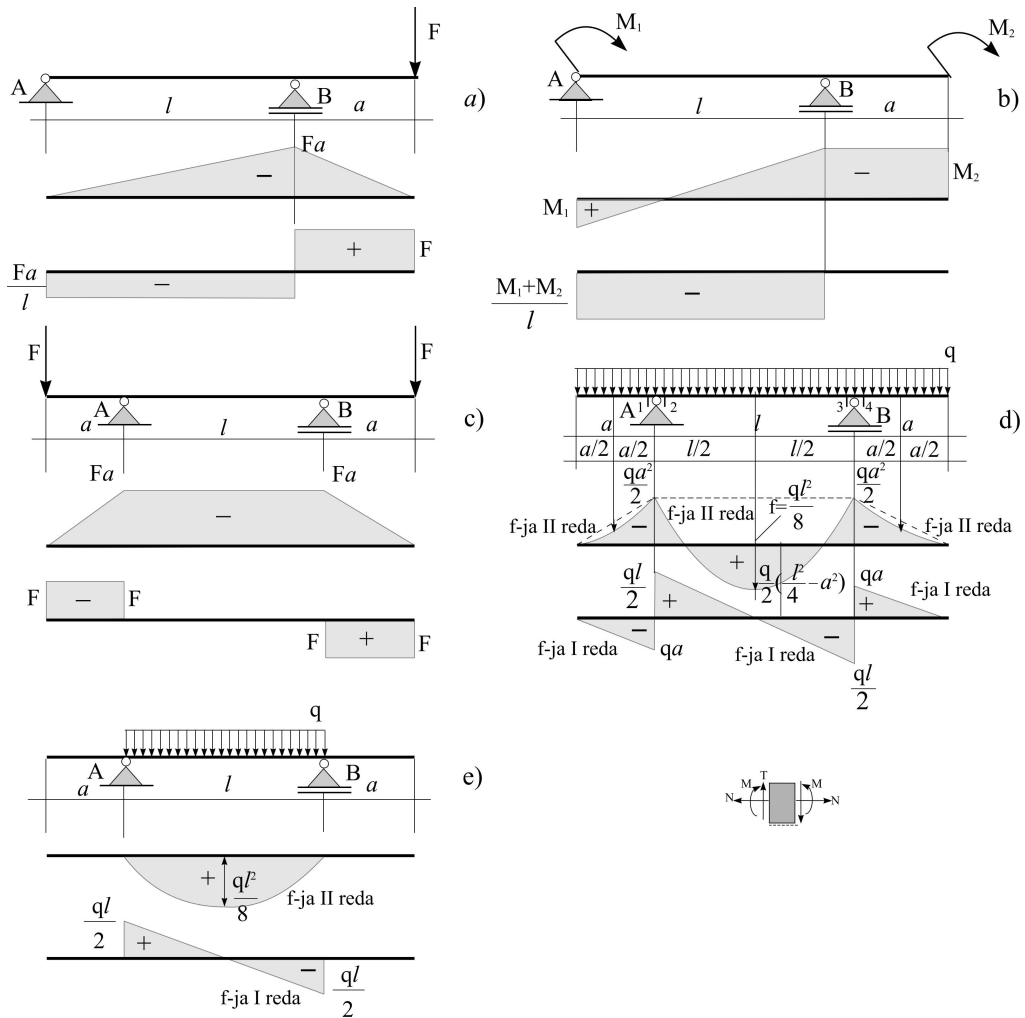


Slika P 12.6 a) Konzola opterećena silom na slobodnom kraju, dijagrami M i T; b) konzola opterećena silom na sredini raspona, dijagrami M i T; c) konzola opterećena jednako podjeljenim opterećenjem, dijagrami M i T; d) konzola opterećena raspodeljenim trougaonim opterećenjem, dijagrami M i T; e) konzola opterećena silom i jednako podjeljenim opterećenjem, dijagrami M i T; f) konzola opterećena raspodeljenim trougaonim opterećenjem; g) konzola opterećena silama, dijagrami M, T i N.

Reakcije veza za konzole, prikazane na Slici P 12.6, određene su u poglavlju 10, primer 10.2, i prikazane su na Slici P 10.2. Za određivanje sila u presecima kod konzola nije neophodno određivanje reakcija veza jer se sve vrednosti mogu odrediti gledajući od preseka prema slobodnom kraju konzole, u ovom slučaju desno od preseka.

Primer 12.7

Nacrtati dijagrame sila u presecima za grede sa prepustima prikazane na Slici P 12.7.



Slika P 12.7 a) Greda sa prepustom opterećena silom, dijagrami M i T; b) greda sa prepustom opterećena spregovima – koncentrisanim momentima na krajevima, dijagrami M i T; c) greda sa dva prepusta opterećena silama na krajevima, dijagrami M i T; d) greda sa dva prepusta opterećena jednako podeljenim opterećenjem po celoj dužini, dijagrami M i T; e) greda sa dva prepusta opterećena jednako podeljenim opterećenjem između oslonaca, dijagrami M i T.

Reakcije veza za grede sa prepustima (Slika P 12.7), određene su u poglavlju 10, primer 10.3, i prikazane su na Slici P 10.3.

Postupak crtanja dijagrama sila u presecima greda sa prepustima je isti kao kod ostalih nosača. Treba voditi računa da u preseku B, Slika P 12.7 a) i b), kao i presecima A i B, Slika P 12.7 c), d) i e), deluju reakcije veza koje izazivaju promenu vrednosti transverzalne sile.

Za gredu sa dva prepusta, Slika P 12.7 d), reakcije veza su: $V_A = V_B = \frac{q l}{2} + q a$.

Vrednosti momenata savijanja u presecima 1 i 2 su iste kao i vrednosti momenata savijanja u presecima 3 i 4 i iznose:

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = -qa \cdot \frac{a}{2} = -\frac{qa^2}{2}.$$

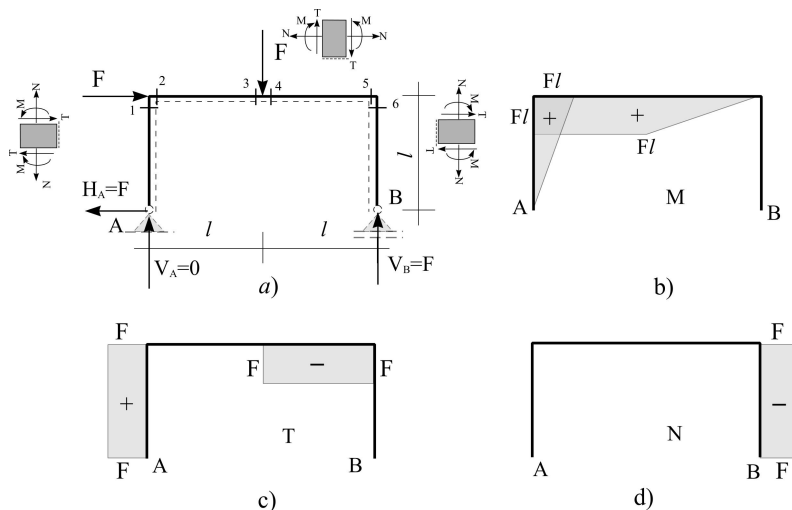
Kako su vrednosti momenata savijanja na krajevima grede jednake nuli, a oblik dijagrama funkcija drugog reda, na prepustima su dijagrami momenata kao na Slici P 12.7 d). U srednjem polju AB, dijagram momenata je kvadratna parabola. Na početku i kraju polja vrednosti momenata savijanja su iste, pa prema analogiji sa primerom 12.3, vrednost momenta savijanja u sredini raspona može se odrediti nanošenjem strele f kvadratne parabole. Tako se dobija vrednost momenta savijanja na sredini grede:

$$M_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{ql^2}{2} + \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8} \left(\frac{l^2}{4} - a^2 \right).$$

Transverzalna sila u preseku 1, gledajući levo od preseka, je: $T_1 = -qa$, a u preseku 2, gledajući takođe levo od preseka, je $T_2 = V_A - qa = \frac{ql}{2} + qa - qa = \frac{ql}{2}$. U preseku 4, gledajući desno od preseka, za transverzalnu silu dobija se $T_4 = qa$, a u preseku 3, gledajući isto desno od preseka, dobija se $T_2 = qa - V_b = qa - \frac{ql}{2} - qa = -\frac{ql}{2}$. Na osnovu dobijenih vrednosti, zaključuje se da na mestu oslonaca A i B dolazi do skoka vrednosti transverzalne sile za veličinu reakcije veze u A, tj. u B. Na početku i kraju polja AB vrednosti transverzalne sile su iste, ali suprotnog znaka. Poznato je da je oblik dijagrama na polju dejstva jednako podeljenog opterećenja linearna funkcija, koja u ovom slučaju seče osu nosača na sredini. Transverzalna sila jednaka je nuli na sredini nosača.

Primer 12.8

Za okvirni nosač, prikazan na Slici P 12.8, nacrtati dijagrame sila u presecima.



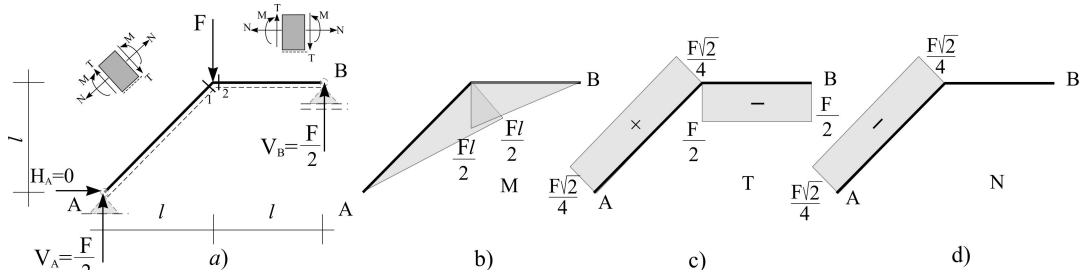
Slika P 12.8 a) Okvir; b) dijagram momenata savijanja; c) dijagram transverzalnih sila; d) dijagram normalnih sila.

Postupak određivanja sila u presecima i crtanja dijagrama sila u presecima kod okvirnih nosača je isti kao kod ostalih nosača. Da bi se uspešno nacrtali dijagrami, držeći se usvojene konvencije o znacima momenata savijanja, transverzalnih i normalnih sila, treba usvojiti donju stranu nosača, označiti je isprekidanom linijom i postaviti šablon za pozitivan znak tako da se donja strana nosača i donja strana šablona poklapaju, kao što je na Slici 12.8 a) pokazano.

Karakteristični presezi obeleženi sa A, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i B. Oni predstavljaju početak, odnosno krajeve polja opterećenja. Dijagrami su prikazani na Slici P 12.8 b), c) i d).
 Ako u čvoru nema spoljašnjih momenata, a postoje dva štapa, vrednosti momenata savijanja moraju da budu jednake, tj. $M_1=M_2=F l$, $M_5=M_6=0$.

Primer 12.9

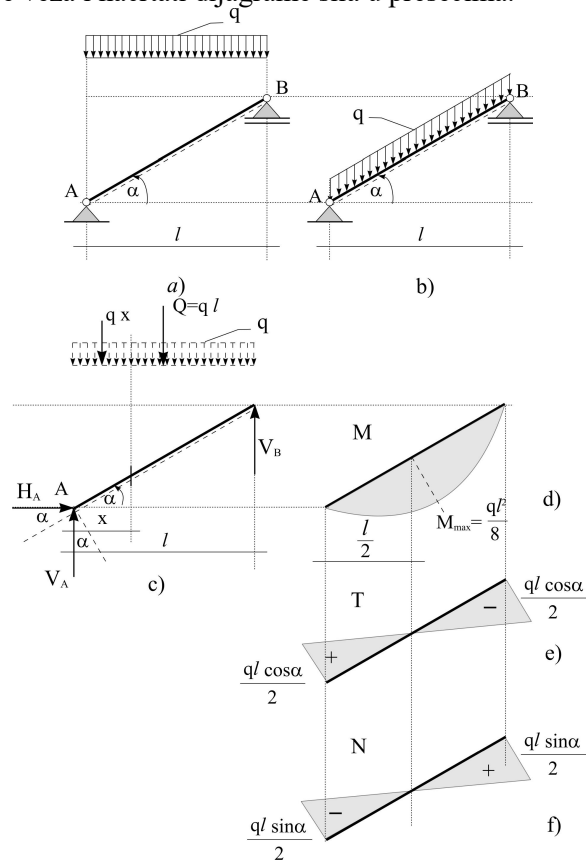
Za okvirni nosač, prikazan na Slici P 12.9, nacrtati dijagrame sila u preseccima.



Slika P 12.9 a) Okvir; b) dijagram momenata savijanja; c) dijagram transverzalnih sila; d) dijagram normalnih sila.

Primer 12.10

Proste grede opterećene su ravnomerno podeljenim opterećenjem q , kao na Slici P 12.10 a) i b). Odrediti reakcije veza i nacrtati dijagrame sila u preseccima.



Slika P 12.10 a) Prosta greda; b) prosta greda; c) greda oslobođena veza; d) dijagram momenata savijanja; e) dijagram transverzalnih sila; f) dijagram normalnih sila.

Reakcije veza proste grede na Slici P 12.10 a) su prikazane na Slici P 12.10 c).

$$\begin{aligned}\sum X &= 0 \rightarrow H_A = 0, \\ \sum Y &= 0 \rightarrow V_A + V_B - ql = 0, & V_A = V_B = \frac{ql}{2}. \\ \sum M_A &= 0 \rightarrow V_B \cdot \frac{l}{2} - ql \cdot \frac{l}{2} = 0,\end{aligned}$$

U preseku na rastojanju x od levog oslonca analitički izrazi za sile u presecima su:

$$\begin{aligned}M_{(x)} &= V_A \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}, \\ T_{(x)} &= V_A \cos \alpha - qx \cos \alpha = \frac{ql}{2} \cos \alpha - qx \cos \alpha, \\ N_{(x)} &= -V_A \sin \alpha + qx \sin \alpha = -\frac{ql}{2} \sin \alpha + qx \sin \alpha,\end{aligned}$$

a vrednosti sila u presecima na početku i na kraju polja opterećenja su:

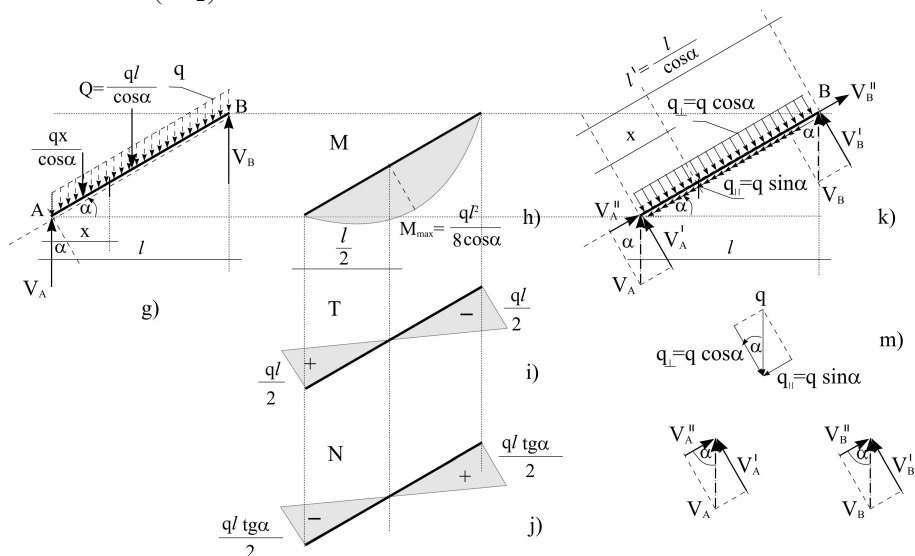
$$\begin{aligned}x = 0 &\rightarrow M_A = 0, \quad T_A = \frac{ql}{2} \cos \alpha, \quad N_A = -\frac{ql}{2} \sin \alpha, \\ x = l &\rightarrow M_B = 0, \quad T_B = -\frac{ql}{2} \cos \alpha, \quad N_B = \frac{ql}{2} \sin \alpha.\end{aligned}$$

Dijagrami sila u presecima za primer na Slici P 12.10 a) prikazani su na Slici P 12.10 d), e) i f).

Maksimalna vrednost momenta savijanja je u preseku u kome je transverzalna sila jednaka nuli:

$$T_{(x_0)} = 0 \rightarrow \frac{ql}{2} \cos \alpha - qx_0 \cos \alpha = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{l}{2},$$

$$M_{\max} = M_{\left(x_0 = \frac{l}{2}\right)} = \frac{ql}{2} \frac{l}{2} - \frac{q \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = \frac{ql^2}{8}.$$



Slika P 12.10 g) Greda oslobođena veza; h) dijagram momenata savijanja; i) dijagram transverzalnih sila; j) dijagram normalnih sila; k) greda sa opterećenjem razložnim na dve komponente; m) razlaganje opterećenja q na komponente upravno na gredu i u pravcu grede.

Na prostu gredu, Slika P 12.10 b), deluje vertikalno raspodeljeno opterećenje duž celog raspona. Dužina grede je $\frac{l}{\cos \alpha}$, pa je rezultanta kontinualnog opterećenja $Q = q \frac{l}{\cos \alpha}$, a reakcije veza, koje su prikazane na Slici P 12.10 g), dobijaju se iz jednačina ravnoteže:

$$\left. \begin{aligned} \sum X = 0 &\rightarrow H_A = 0, \\ \sum Y = 0 &\rightarrow V_A + V_B - q \frac{l}{\cos \alpha} = 0, \\ \sum M_A = 0 &\rightarrow V_B \cdot l - q \frac{l}{\cos \alpha} \cdot \frac{l}{2} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_A = V_B = \frac{ql}{2 \cos \alpha}.$$

Analički izrazi sila u preseccima su:

$$M_{(x)} = V_A \cdot x - \frac{qx}{\cos \alpha} \cdot \frac{x}{2} = \frac{ql}{2 \cos \alpha} x - \frac{qx^2}{2 \cos \alpha},$$

$$T_{(x)} = V_A \cos \alpha - \frac{qx}{\cos \alpha} \cos \alpha = \frac{ql}{2 \cos \alpha} \cos \alpha - \frac{qx}{\cos \alpha} \cos \alpha = \frac{ql}{2} - qx,$$

$$N_{(x)} = -V_A \sin \alpha + qx \sin \alpha = -\frac{ql}{2 \cos \alpha} \sin \alpha + \frac{qx}{\cos \alpha} \sin \alpha = -\frac{ql}{2} \operatorname{tg} \alpha + qx \operatorname{tg} \alpha,$$

a vrednosti sila u preseccima na početku i na kraju polja opterećenja su:

$$x = 0 \rightarrow M_A = 0, \quad T_A = \frac{ql}{2}, \quad N_A = -\frac{ql}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

$$x = l \rightarrow M_B = 0, \quad T_B = -\frac{ql}{2}, \quad N_B = \frac{ql}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Presek u kome moment savijanja ima maksimalnu vrednost određuje se iz uslova da je u tom preseku transverzalna sila jednaka nuli:

$$T_{(x_0)} = 0 \rightarrow \frac{ql}{2} - qx_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{l}{2},$$

$$M_{\max} = M_{\left(x_0 = \frac{l}{2}\right)} = \frac{ql}{2 \cos \alpha} \frac{l}{2} - \frac{q \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2 \cos \alpha} = \frac{ql^2}{8 \cos \alpha}.$$

Dijagrami sila u preseccima za primer prikazan na Slici P 12.10 b) prikazani su na Slici P 12.10 h), i) i j).

Do istih vrednosti se dolazi ako se opterećenje q razloži na dve komponente q_{\perp} – komponentu upravnu na gredu i q_{\parallel} – komponentu u pravcu grede, kao što je to prikazano na Slici P 12.10 k) i m).

Komponente opterećenja su: $q_{\perp} = q \cos \alpha$, $q_{\parallel} = q \sin \alpha$.

Jednačine ravnoteže glase:

$$\sum X' = 0 \rightarrow V_A'' + V_B'' - q_{\parallel} \cdot l' = 0,$$

$$\sum Y' = 0 \rightarrow V_A' + V_B' - q_{\perp} \cdot l' = 0,$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_A' \cdot l' - q_{\perp} \cdot l' \frac{l'}{2} = 0.$$

Reakcije veza su:

$$V_A' = V_B' = \frac{q_{\perp} l'}{2} = \frac{q l}{2}, \quad V_A'' = V_B'' = \frac{q_{\parallel} l'}{2} = \frac{q l}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

$$V_A = V_B = \sqrt{(V_A')^2 + (V_A'')^2} = \frac{q l}{2 \cos \alpha}.$$

U preseku na rastojanju x od levog oslonca, pri čemu je $0 \leq x \leq l'$, analitički izrazi za sile u presecima su:

$$M_{(x)} = V_A' \cdot x - q_{\perp} x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q l}{2} x - q \cos \alpha \cdot \frac{x^2}{2},$$

$$T_{(x)} = V_A' - q_{\perp} x = \frac{q l}{2} - q_{\perp} x = \frac{q l}{2} - q \cos \alpha \cdot x,$$

$$N_{(x)} = -V_A'' + q_{\parallel} x = -\frac{q l}{2} \operatorname{tg} \alpha + q \sin \alpha \cdot x,$$

a vrednosti sila u presecima na početku i na kraju polja opterećenja su:

$$x = 0 \rightarrow M_A = 0, \quad T_A = \frac{q l}{2}, \quad N_A = -\frac{q l}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

$$x = l' = \frac{l}{\cos \alpha} \rightarrow M_B = 0, \quad T_B = -\frac{q l}{2}, \quad N_B = \frac{q l}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

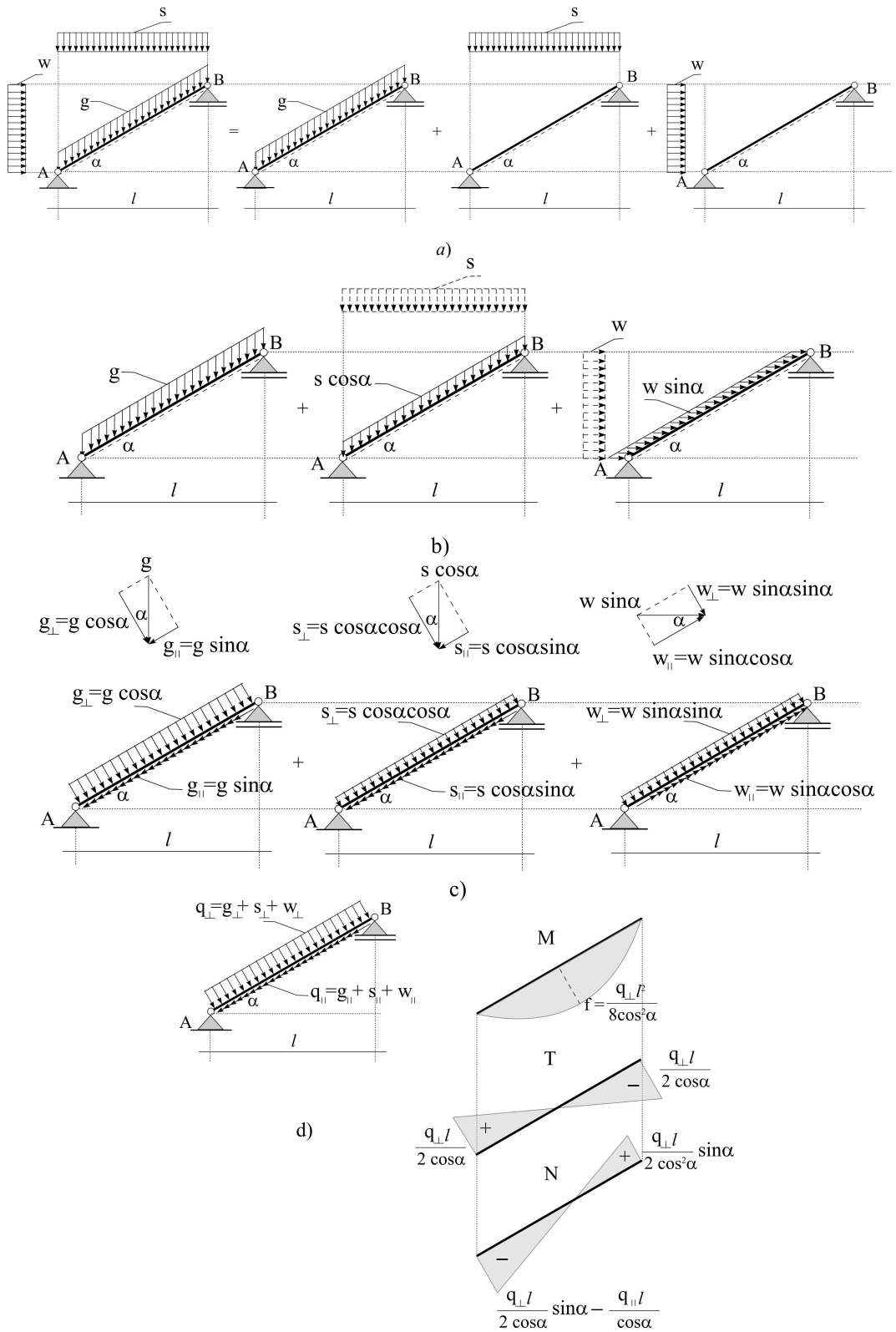
Mesto i veličina maksimalnog momenta savijanja je:

$$T_{(x_0)} = 0 \rightarrow \frac{q l}{2} - q \cos \alpha \cdot x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{l}{2 \cos \alpha},$$

$$M_{\max} = M_{\left(x_0 = \frac{l}{2 \cos \alpha}\right)} = \frac{q l}{2} \frac{l}{2 \cos \alpha} - q \cos \alpha \cdot \frac{\left(\frac{l}{2 \cos \alpha}\right)^2}{2} = \frac{q l^2}{8 \cos \alpha}.$$

Primer 12.11

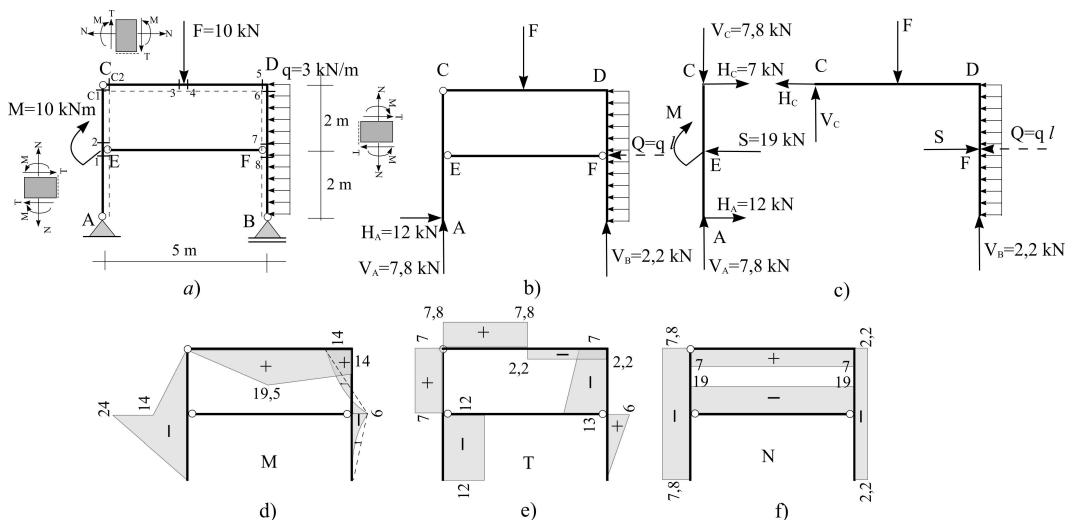
Ako na gredu deluju raspodeljena opterećenja kao na Slici P 12.11 a), delovanje svakog od opterećenja može se razmatrati posebno. Reakcije veza i sile u presecima od delovanja ukupnog opterećenja dobijaju se sabiranjem rezultata dobijenih za svako pojedinačno opterećenje – princip superpozicije. Ovde je pokazano kako se svako od opterećenja svodi na dužinu grede, zatim projektuje na komponente u pravcu grede i upravno na pravac grede, da bi se odredilo ukupno opterećenje upravno na gredu i u pravcu grede i nacrtali dijagrami sila u presecima.



P 12.11 a) Prosta greda opterećena raspodeljenim opterećenjima g , s i w ; b) opterećenja svedena na dužinu grede; c) komponente opterećenja u pravcu grede i upravno na pravac grede; d) dijagrami sila u preseccima.

Primer 12.12

Za okvirni nosač prikazan na Slici P 12.12 nacrtati dijagrame sila u preseccima.



Slika P 12.12 a) Okvirni nosač; b) sistem sa reakcijama spoljašnjih veza; c) tela sistema sa reakcijama veza; d) dijagram momenata savijanja; dijagram transverzalnih sila; e) dijagram normalnih sila.

Reakcije spoljašnjih i unutrašnjih veza datog sistema tela određene su u poglavlju 10, primer 10.8, i prikazane su na Slici P 12.12 b).

Vrednosti sila u karakterističnim preseccima A, 1, 2, C1, C2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, E, F i B (počeci i krajevi polja opterećenja) određuju se posmatrajući pojedinačna tela, levo ili desno od preseka, poštujući konvenciju o znaku sila u preseccima.

$$M_A = M_B = M_C = M_E = M_F = 0,$$

$$M_1 = -H_A \cdot 2 = -12 \cdot 2 = -24 \text{ kNm}, \quad M_2 = -H_A \cdot 2 + M = -14 \text{ kNm},$$

$$M_3 = V_C \cdot 2,5 = 19,5 \text{ kNm}, \quad M_5 = M_6 = V_C \cdot 5 - F \cdot 2,5 = 14 \text{ kNm},$$

$$M_7 = M_8 = -q \cdot 2 \cdot 1 = -6 \text{ kNm},$$

$$T_A = T_1 = -H_A = -12 \text{ kN}, \quad T_2 = -H_A + S = 7 \text{ kN}, \quad T_{C1} = H_C = 7 \text{ kN},$$

$$T_{C2} = V_C = 7,8 \text{ kN}, \quad T_3 = V_C = 7,8 \text{ kN}, \quad T_4 = V_C - F = 7,8 - 10 = -2,2 \text{ kN},$$

$$T_5 = V_C - F = -2,2 \text{ kN}, \quad T_6 = -H_C = -7 \text{ kN}, \quad T_7 = -S + q \cdot 2 = -13 \text{ kN},$$

$$T_8 = q \cdot 2 = 6 \text{ kN},$$

$$N_A = N_1 = N_2 = N_{C1} = -V_A = -7,8 \text{ kN}, \quad N_{C2} = N_3 = N_4 = N_5 = H_C = 7 \text{ kN},$$

$$N_6 = N_7 = N_8 = N_B = -V_B = -2,2 \text{ kN}, \quad N_E = N_F = -S = -19 \text{ kN}.$$

U štapu EF postoji samo aksijalna sila pritiska, intenziteta 19 kN. Na telu AC postoje dva polja opterećenja. Nema kontinualnog opterećenja, pa je dijagram momenata savijanja u oba polja funkcija prvog reda. Na mestu delovanja koncentrisanog momenta postoji skok u dijagramu momenata savijanja, Slika P 12.12 d). Transverzalna sila na oba polja ima konstantnu vrednost od 12 kN, tj. 7 kN, Slika P 12.12 e).