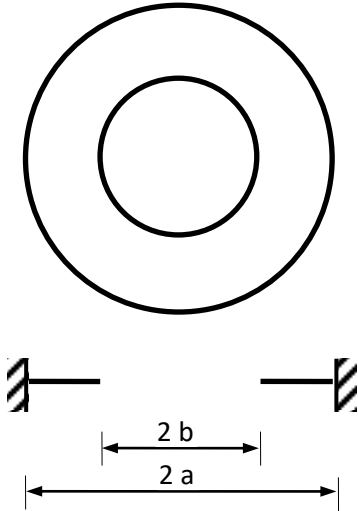


# PRSTENASTE PLOČE SA ROTACIONO SIMETRIČNIM OPTEREĆENJEM

## POSTUPAK REŠAVANJA ZADATAKA



- Potrebno je odabrati uporedni poluprečnik. Ako je to poluprečnik  $a$ , biće  $\rho = \frac{r}{a}$ .
- Bira se funkcija ugiba  $W$ , koja predstavlja rešenje diferencijalne jednačine, u zavisnosti od površinskog opterećenja na ploči.

1) Ako na ploči **nema površinskog opterećenja** onda je to funkcija:

$$W = C_1 + C_2 \rho^2 + C_3 \ln \rho + C_4 \rho^2 \ln \rho.$$

Izvodi ove funkcije po  $r$  koji će nam biti potrebni:

$$\frac{dW}{dr} = \frac{1}{a} \left( 2C_2 \rho + C_3 \frac{1}{\rho} + 2C_4 \rho \ln \rho + C_4 \rho^2 \frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{a} \left( 2C_2 \rho + \frac{C_3}{\rho} + 2C_4 \rho \ln \rho + C_4 \rho \right)$$

$$\frac{d^2W}{dr^2} = \frac{1}{a^2} \left( 2C_2 - C_3 \rho^{-2} + 2C_4 \ln \rho + 2C_4 \rho \frac{1}{\rho} + C_4 \right) = \frac{1}{a^2} \left( 2C_2 - \frac{C_3}{\rho^2} + 2C_4 \ln \rho + 3C_4 \right)$$

$$\frac{d^3W}{dr^3} = \frac{1}{a^3} \left( -(-2)C_3 \rho^{-3} + 2C_4 \frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{a^3} \left( \frac{2C_3}{\rho^3} + \frac{2C_4}{\rho} \right).$$

2) Ako na ploči **ima ravnomernog površinskog opterećenja**  $p = \text{const}$ , funkcija će biti:

$$W = \frac{pa^4}{64K} \left( \rho^4 + C_1 + C_2 \rho^2 + C_3 \ln \rho + C_4 \rho^2 \ln \rho \right),$$

a njeni izvodi po  $r$  su:

$$\frac{dW}{dr} = \frac{pa^4}{64k} \frac{1}{a} \left( 4\rho^3 + 2C_2\rho + C_3 \frac{1}{\rho} + 2C_4\rho \ln \rho + C_4\rho^2 \frac{1}{\rho} \right) = \frac{pa^3}{64k} \left( 4\rho^3 + 2C_2\rho + \frac{C_3}{\rho} + 2C_4\rho \ln \rho + C_4\rho \right)$$

$$\frac{d^2W}{dr^2} = \frac{pa^4}{64k} \frac{1}{a^2} \left( 12\rho^2 + 2C_2 - C_3\rho^{-2} + 2C_4 \ln \rho + 2C_4\rho \frac{1}{\rho} + C_4 \right) = \frac{pa^2}{64k} \left( 12\rho^2 + 2C_2 - \frac{C_3}{\rho^2} + 2C_4 \ln \rho + 3C_4 \right)$$

$$\frac{d^3W}{dr^3} = \frac{pa^4}{64k} \frac{1}{a^3} \left( 24\rho - (-2)C_3\rho^{-3} + 2C_4 \frac{1}{\rho} \right) = \frac{pa}{64k} \left( 24\rho + \frac{2C_3}{\rho^3} + \frac{2C_4}{\rho} \right).$$

Ako na ploči deluje proizvoljno površinsko opterećenje, potrebno je prvo izvesti izraz za funkciju ugiba W, a zatim odrediti i njene izvode.

### • Granični uslovi

Posmatra se desni deo prikazanog preseka ploče. Kod prstenastih ploča treba ispuniti četiri granična uslova i to po dva u presecima  $r=a$  i  $r=b$ .

$$\text{Za } r = a \Rightarrow \rho = \frac{r}{a} = \frac{a}{a} = 1,0 \Rightarrow$$

$$1) \quad W = 0$$

$$2) \quad \frac{dW}{dr} = 0 \quad \text{jer je kontura uklještena.}$$

$$\text{Za } r = b \Rightarrow \rho = \frac{r}{a} = \frac{b}{a} \Rightarrow$$

$$3) \quad M_r = 0$$

$$4) \quad T_r = 0 \quad (\text{ako nema opterećenja na slobodnoj konturi}) \text{ ili}$$

$$3) \quad M_r = M$$

$$4) \quad T_r = T \quad (\text{ako na slobodnoj konturi ima opterećenja raspodeljenim momentom i}$$

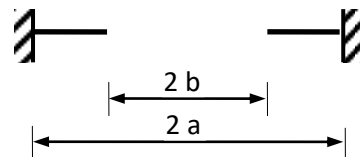
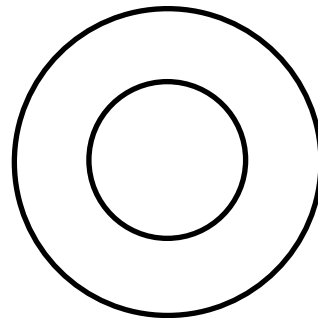
jednakoraspodeljenim opterećenjem duž konture).

Obrasci za sile u presecima su:

$$M_r = -k \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

$$M_\varphi = -k \left( v \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

$$T_r = -k \left( \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right)$$



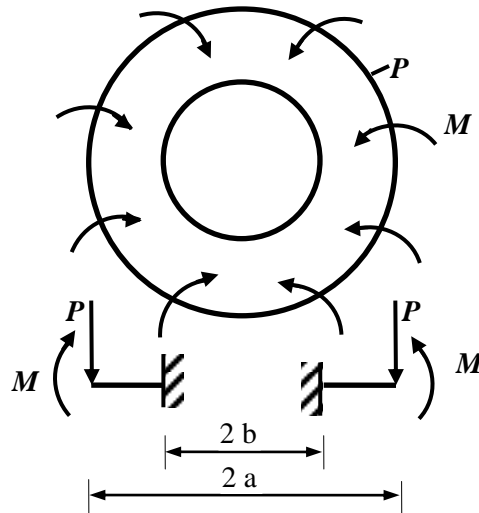
Kada sračunamo nepoznate konstante dobićemo izraz za W kao i izraze za sile u presecima.

## Primeri prstenastih ploča

### 1. Zadatak

Za prstenastu ploču i opterećenje kao na skici sračunati i nacrtati dijagrame ugiba  $W$ , momenata savijanja  $M_r$  i  $M_\varphi$  i transverzalnih sila  $T_r$ .

$a=5,0$  m;  $b=2,0$ m;  $P=20$  kN/m';  $M=15$  kNm/m';  $\nu=0$



### Rešenje:

Ploča je prstenasta bez opterećenja po površini, pa postoji samo jedna **funkcija ugiba  $W$**  oblika

$$W = C_1 + C_2 \rho^2 + C_3 \ln \rho + C_4 \rho^2 \ln \rho.$$

Ova funkcija važi za  $b < r < a$ .

Usvajamo za **uporedni poluprečnik  $a$** , pa je  $\rho = \frac{r}{a}$ .

Izvodi funkcije  $W$  po  $r$  koji će nam biti potrebni:

$$\frac{dW}{dr} = \frac{1}{a} \left( 2C_2 \rho + \frac{C_3}{\rho} + 2C_4 \rho \ln \rho + C_4 \rho \right)$$

$$\frac{d^2W}{dr^2} = \frac{1}{a} \left( 2C_2 - \frac{C_3}{\rho^2} + 2C_4 \ln \rho + 3C_4 \right)$$

$$\frac{d^3W}{dr^3} = \frac{1}{a^3} \left( \frac{2C_3}{\rho^3} + \frac{2C_4}{\rho} \right).$$

Izrazi za sile u preseccima su:

$$M_r = -K \left( \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{v}{r} \frac{dW}{dr} \right) = -\frac{K}{a^2} \left( 2C_2 - \frac{C_3}{\rho^2} + 2C_4 \ln \rho + 3C_4 \right)$$

$$M_\varphi = -K \left( v \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \right) = -\frac{K}{a^2} \left( 2C_2 + \frac{C_3}{\rho^2} + 2C_4 \ln \rho + C_4 \right)$$

$$T_r = -K \left( \frac{d^3 W}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 W}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dW}{dr} \right) = -\frac{K}{a^3} \cdot \frac{4C_4}{\rho}$$

**Granični uslovi su:**

$$\text{Za } r = b \Rightarrow \rho = \frac{r}{a} = \frac{b}{a} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$1) \quad w = 0$$

$$2) \quad \frac{dw}{dr} = 0, \text{ jer je ploča duž unutrašnje konture, gde je } r = b, \text{ uklještena.}$$

$$\text{Za } r = a \Rightarrow \rho = \frac{r}{a} = \frac{a}{a} = 1,0$$

$$3) \quad M_r = M$$

$$4) \quad T_r = P, \text{ jer ploča ima slobodan kraj duž spoljašnje konture, gde je } r = a.$$

**Konstante** određujemo iz graničnih uslova:

$$\rho = 0,4 \Rightarrow 1) \quad W = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 0,4^2 + C_3 \ln 0,4 + C_4 0,4^2 \ln 0,4$$

$$\rho = 0,4 \Rightarrow 2) \quad \frac{dW}{dr} = 0 \Rightarrow 2C_2 0,4 + \frac{C_3}{0,4} + 2C_4 0,4 \ln 0,4 + C_4 0,4$$

$$\rho = 1,0 \Rightarrow 3) \quad M_r = M \Rightarrow -\frac{k}{a^2} \left( 2C_2 - \frac{C_3}{1,0^2} + 2C_4 \ln 1,0 + 3C_4 \right) = 15 \Rightarrow -\frac{k}{5,0^2} (2C_2 - C_3 + 3C_4) = 15$$

$$\rho = 1,0 \Rightarrow 4) \quad T_r = P \Rightarrow -\frac{k}{a^3} \cdot \frac{4C_4}{1,0} = 20 \Rightarrow -\frac{k}{5,0^3} \cdot 4C_4 = 20$$

Vrednosti konstanti se dobijaju rešavanjem sistema jednačina:

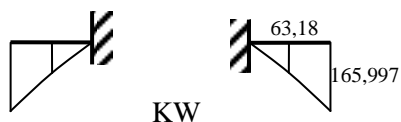
$$C_1 = -\frac{444,6715}{k}, \quad C_2 = \frac{610,668}{k}, \quad C_3 = -\frac{278,664}{k}, \quad C_4 = -\frac{625}{k}.$$

### Izraz za ugib je:

$$K \cdot W = -444,6715 + 610,668\rho^2 - 278,664 \ln \rho - 625\rho^2 \ln \rho,$$

pa su vrednosti u izabranim preseccima

$$W_{\rho=0,4} = 0; W_{\rho=0,7} = \frac{63,18}{k}; W_{\rho=1,0} = \frac{165,997}{k}$$

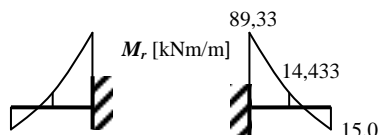


### Izraz za moment savijanja $M_r$ je:

$$M_r = -\left(48,853 + \frac{11,146}{\rho^2} - 50,0 \ln \rho - 75,0\right),$$

pa su vrednosti u izabranim preseccima

$$M_{r,\rho=0,4} = -89,330 \text{ kNm/m}'; M_{r,\rho=0,7} = -14,433 \text{ kNm/m}'; M_{r,\rho=1,0} = 15 \text{ kNm/m}'$$

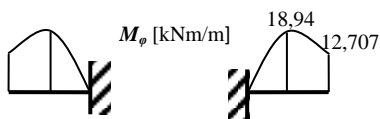


### Izraz za moment savijanja $M_\varphi$ je:

$$M_\varphi = -\left(48,853 - \frac{11,146}{\rho^2} - 50,0 \ln \rho - 25,0\right)$$

pa su vrednosti u izabranim preseccima

$$M_{\varphi,\rho=0,4} = -0,005 \text{ kNm/m}'; M_{\varphi,\rho=0,7} = -18,940 \text{ kNm/m}'; M_{\varphi,\rho=1,0} = -12,707 \text{ kNm/m}'$$

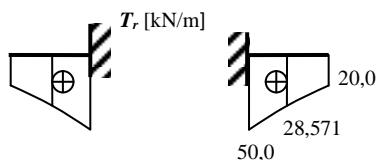


### Izraz za $T_r$ je:

$$T_r = \frac{20}{\rho},$$

pa su vrednosti u izabranim preseccima

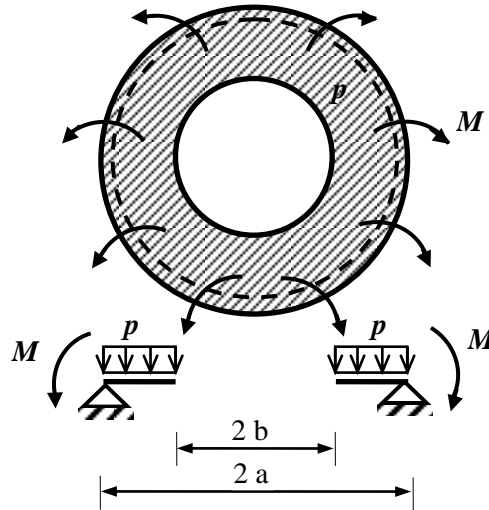
$$T_{r,\rho=0,4} = 50 \text{ kN/m}'; T_{r,\rho=0,7} = 28,571 \text{ kN/m}'; T_{r,\rho=1,0} = 20 \text{ kN/m}'.$$



## 2. Zadatak

Za prstenastu ploču i opterećenje kao na skici sračunati i nacrtati dijagrame ugiba  $W$ , momenata savijanja  $M_r$  i  $M_\phi$  i transverzalnih sila  $T_r$ .

$a=4,0$  m;  $b=2,0$ m;  $p=8$  kN/m<sup>2</sup>;  $M=30$  kNm/m<sup>2</sup>;  $v=0$



### Rešenje:

Ploča je prstenasta opterećena ravnomernim površinskim opterećenjem, pa postoji samo jedna **funkcija ugiba  $W$**  oblika

$$W = \frac{pa^4}{64K} \left( \rho^4 + C_1 + C_2 \rho^2 + C_3 \ln \rho + C_4 \rho^2 \ln \rho \right)$$

Ova funkcija važi za  $b < r < a$ .

Usvajamo za **uporedni poluprečnik  $a$** , pa je  $\rho = \frac{r}{a}$ .

Izvodi funkcije  $W$  po  $r$  koji će biti potrebni:

$$\frac{dW}{dr} = \frac{pa^3}{64K} \left( 4\rho^3 + 2C_2\rho + \frac{C_3}{\rho} + 2C_4\rho \ln \rho + C_4\rho \right)$$

$$\frac{d^2W}{dr^2} = \frac{pa^2}{64K} \left( 12\rho^2 + 2C_2 - \frac{C_3}{\rho^2} + 2C_4 \ln \rho + 3C_4 \right)$$

$$\frac{d^3W}{dr^3} = \frac{pa^4}{64K} \frac{1}{a^3} \left( 24\rho - (-2)C_3\rho^{-3} + 2C_4 \frac{1}{\rho} \right) = \frac{pa}{64K} \left( 24\rho + \frac{2C_3}{\rho^3} + \frac{2C_4}{\rho} \right).$$

Izrazi za sile u preseccima su:

$$M_r = -K \left( \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{v}{r} \frac{dW}{dr} \right) = -\frac{pa^2}{64} \left( 12\rho^2 + 2C_2 - \frac{C_3}{\rho^2} + 2C_4 \ln \rho + 3C_4 \right)$$

$$M_\varphi = -K \left( v \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \right) = -\frac{pa^2}{64} \left( 4\rho^2 + 2C_2 + \frac{C_3}{\rho^2} + 2C_4 \ln \rho + C_4 \right)$$

$$T_r = -K \left( \frac{d^3 W}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 W}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dW}{dr} \right) = -\frac{pa}{64} \left( 32\rho + \frac{4C_4}{\rho} \right)$$

Granični uslovi su:

$$\text{Za } r = b \Rightarrow \rho = \frac{r}{a} = \frac{b}{a} = \frac{2}{4} = 0,5$$

- 1)  $M_r = 0$
- 2)  $T_r = 0$ , jer ploča ima slobodan kraj duž unutrašnje konture, gde je  $r = b$ .

$$\text{Za } r = a \Rightarrow \rho = \frac{r}{a} = \frac{a}{a} = 1,0$$

- 3)  $W = 0$
- 4)  $M_r = -M = -30$ , jer je ploča duž spoljašnje konture, gde je  $r = a$ , slobodno oslonjena opterećena jednakoraspodeljenim momentom.

Konstante određujemo iz graničnih uslova:

$$\rho = 0,5 \Rightarrow 1) \quad M_r = 0 \Rightarrow 12 \cdot 0,5^2 + 2C_2 - \frac{C_3}{0,5^2} + 2C_4 \ln 0,5 + 3C_4 = 0$$

$$\rho = 0,5 \Rightarrow 2) \quad T_r = 0 \Rightarrow -\frac{8 \cdot 4,0}{64} \left( 32 \cdot 0,5 + \frac{4C_4}{0,5} \right) = 0 \Rightarrow C_4 = -2,0$$

$$\rho = 1,0 \Rightarrow 3) \quad w = 0 \Rightarrow 1 + C_1 + C_2 = 0$$

$$\rho = 1,0 \Rightarrow 4) \quad M_r = -30 \Rightarrow -\frac{8 \cdot 4^2}{64} (12 + 2C_2 - C_3 + 3C_4) = -30 \Rightarrow -2,0(12 + 2C_2 - C_3 + 3C_4) = -30$$

Vrednosti konstanti se dobijaju rešavanjem sistema jednačina:

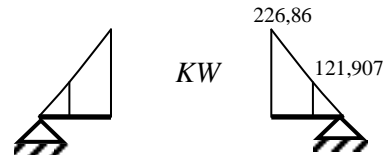
$$C_1 = -6,9621, \quad C_2 = 5,9621, \quad C_3 = 2,9241, \quad C_4 = -2,0.$$

**Izraz za ugib je:**

$$W = \frac{32}{K} (\rho^4 - 6,9621 + 5,9621\rho^2 + 2,9241\ln\rho - 2,0\rho^2 \ln\rho),$$

pa su vrednosti u izabranim preseccima

$$w_{\rho=0,5} = \frac{-226,86}{k}; w_{\rho=0,75} = \frac{-121,907}{k}; w_{\rho=1,0} = 0$$

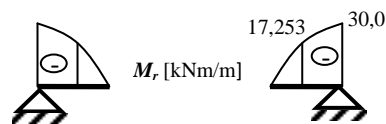


**Izraz za moment savijanja  $M_r$  je:**

$$M_r = -2,0 \left( 12\rho^2 + 11,924 - \frac{2,9241}{\rho^2} - 4,0\ln\rho - 6,0 \right),$$

pa su vrednosti u izabranim preseccima

$$M_{r,\rho=0,5} = 0; M_{r,\rho=0,75} = -17,253 \text{ kNm/m}'; M_{r,\rho=1,0} = -30 \text{ kNm/m}'$$

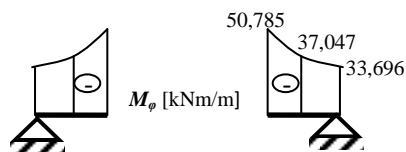


**Izraz za moment savijanja  $M_\phi$  je:**

$$M_\phi = -2,0 \left( 4\rho^2 + 11,924 + \frac{2,9241}{\rho^2} - 4,0\ln\rho - 2,0 \right)$$

pa su vrednosti u izabranim preseccima

$$M_{\phi,\rho=0,5} = -50,785 \text{ kNm/m}'; M_{\phi,\rho=0,75} = -37,047 \text{ kNm/m}'; M_{\phi,\rho=1,0} = -33,696 \text{ kNm/m}'$$



**Izraz za  $T_r$  je:**

$$T_r = -0,5 \left( 32\rho - \frac{8}{\rho} \right),$$

pa su vrednosti u izabranim preseccima

$$T_{r,\rho=0,5} = 0; T_{r,\rho=0,75} = -6,667 \text{ kN/m}'; T_{r,\rho=1,0} = -12 \text{ kN/m}'$$

