

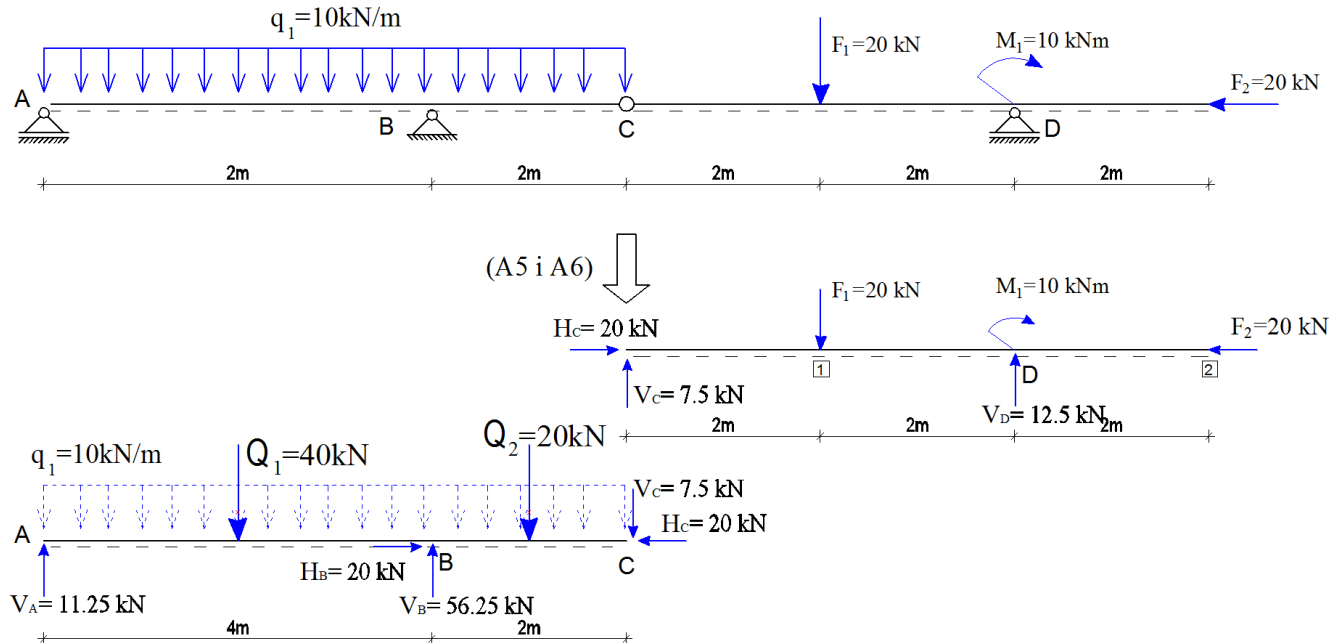


VEŽBA BROJ: 12

UGLEDNI PRIMERI:

Zadatak: 1

- Odrediti reakcije veza datog Gerberovog nosača.
- Odrediti sile u presecima za dati nosač i nacrtati dijagrame momenata savijanja, transferzalnih i normalnih sila.



Statička određenost sistema:

Broj nepoznatih reakcija veza: $n=6, (V_A, H_B, V_B, V_C, H_C, V_D)$

Broj uslovnih jednačina ravnoteže: $r=3 \cdot t=3 \cdot 2=6$

$n=r \rightarrow$ sistem je statički određen

Uslovne jednačine ravnoteže:

II – telo

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow H_C - F_2 = 0 \Rightarrow H_C - 20 = 0 \Rightarrow H_C = 20 \text{ kN} \dots \dots \dots (4)$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow V_C - F_1 + V_D = 0 \Rightarrow V_C - 20 - V_D = 0 \Rightarrow V_C = 7.5 \text{ kN} \dots \dots \dots (5)$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow V_D \cdot 4 - 10 - 20 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_D \cdot 4 - 10 - 20 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_D = 12.5 \text{ kN} \dots (6)$$

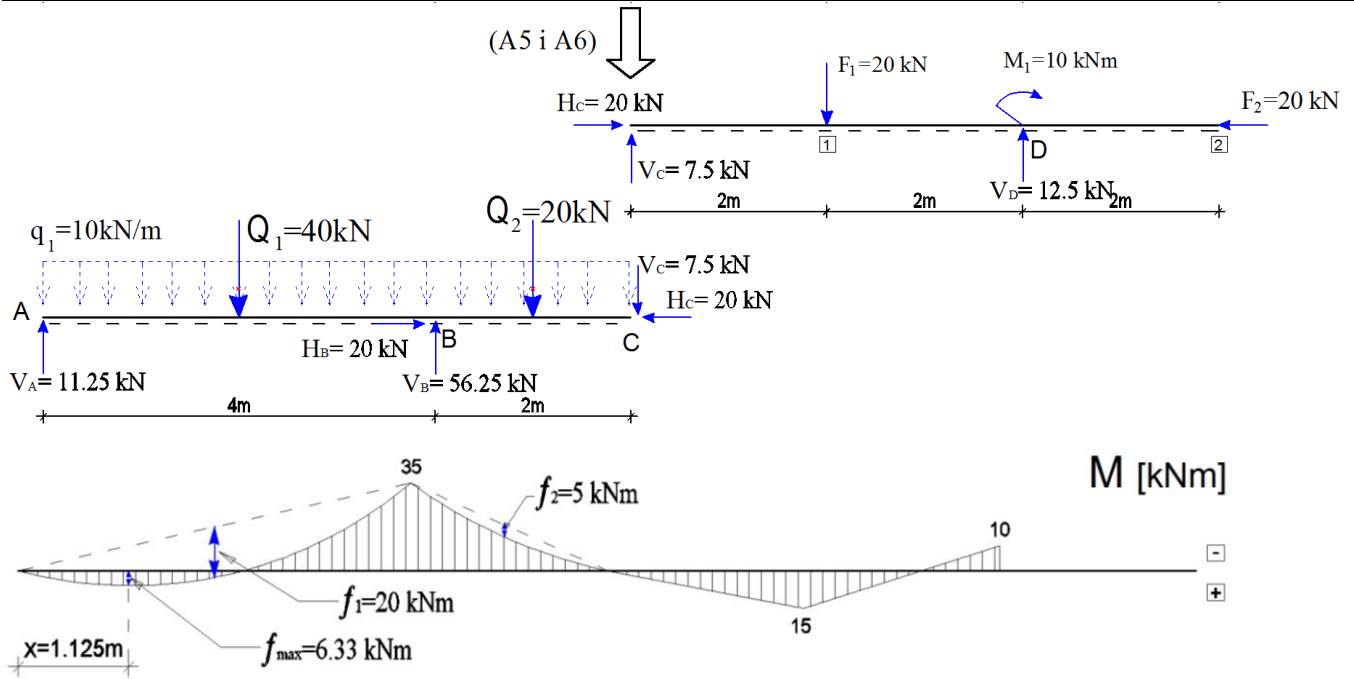
I – telo

$$Q_1 = q_1 \cdot l_1 = 10 \cdot 4 = 40 \text{ kN}, \quad Q_2 = q_1 \cdot l_2 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ kN}$$

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow H_B - H_C = 0 \Rightarrow H_B - 20 = 0 \Rightarrow H_B = 20 \text{ kN} \dots \dots \dots (1)$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow V_A - 40 - V_B - 20 - 7.5 = 0 \Rightarrow V_A = 11.25 \text{ kN} \dots \dots \dots (2)$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -40 \cdot 2 + V_B \cdot 4 - 20 \cdot 5 - 7.5 \cdot 6 = 0 \Rightarrow V_B = 56.25 \text{ kN} \dots \dots \dots (3)$$



Proračun sila u presecima nosača:
Dijagrami momenata savijanja:

$$M_A = 0, M_C = 0, M_2 = 0,$$

$$M_B = -V_C \cdot 2 - Q_2 \cdot 1 = -7.5 \cdot 2 - 20 \cdot 1 = -35 \text{ kNm}$$

$$M_1 = V_C \cdot 2 = 7.5 \cdot 2 = 15 \text{ kNm}$$

$$M_{D-1} = -M_1 = -10 \text{ kNm}$$

$$M_{D-2} = M_{2-D} = 0 \text{ kNm}$$

$$f_1 = \frac{q_1 l_1^2}{8} = \frac{10 \cdot 4^2}{8} = 20 \text{ kNm}$$

$$f_2 = \frac{q_1 l_2^2}{8} = \frac{10 \cdot 2^2}{8} = 5 \text{ kNm},$$

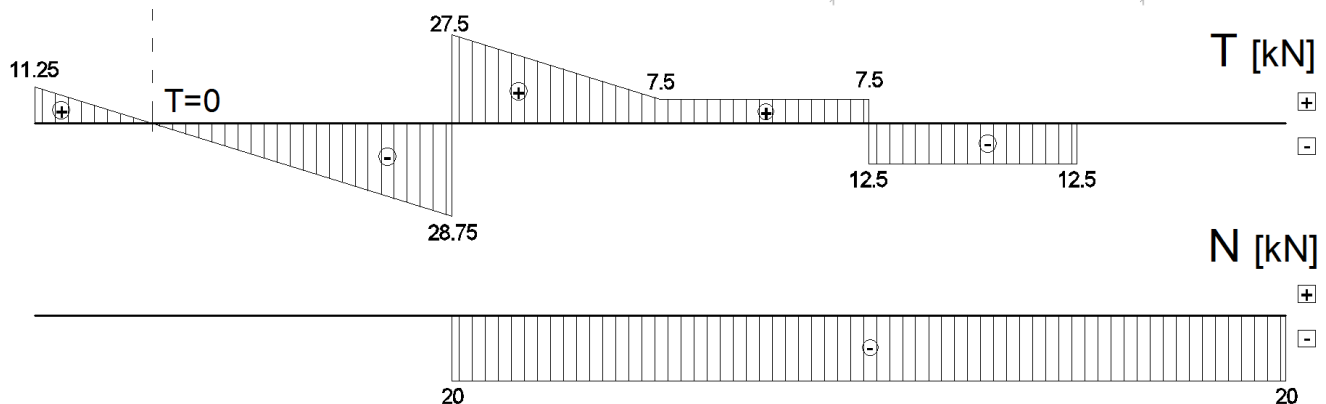
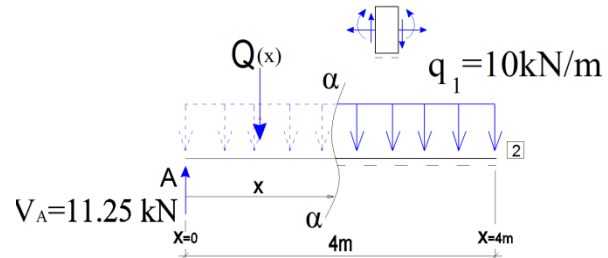
$$M_{\alpha-\alpha} = V_A \cdot x - Q(x) \cdot \frac{x}{2} = 11.25 \cdot x - 10 \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$M_{\alpha-\alpha} = 11.25 \cdot x - 5 \cdot x^2$$

$$T_{\alpha-\alpha} = V_A - Q(x) = 11.25 - 10 \cdot x$$

$$\max M_{\alpha-\alpha} \text{ za } T_{\alpha-\alpha} = 0 \rightarrow 11.25 - 10 \cdot x = 0 \rightarrow x_1 = 1.125 \text{ m}$$

$$\max M_{x=1.125 \text{ m}} = 11.25 \cdot 1.125 - 5 \cdot 1.125^2 = 6.33 \text{ kNm}$$



$$T_{A-B} = V_A = 11.25 \text{ kN}$$

$$T_{B-A} = V_A - Q_1 = 11.25 - 10 \cdot 4 = -28.75 \text{ kN}$$

$$T_{B-C} = V_C + Q_1 = 7.5 + 10 \cdot 2 = 7.5 + 20 = 27.5 \text{ kN}$$

$$T_{C-1} = V_C = 7.5 \text{ kN} = T_{1-C}$$

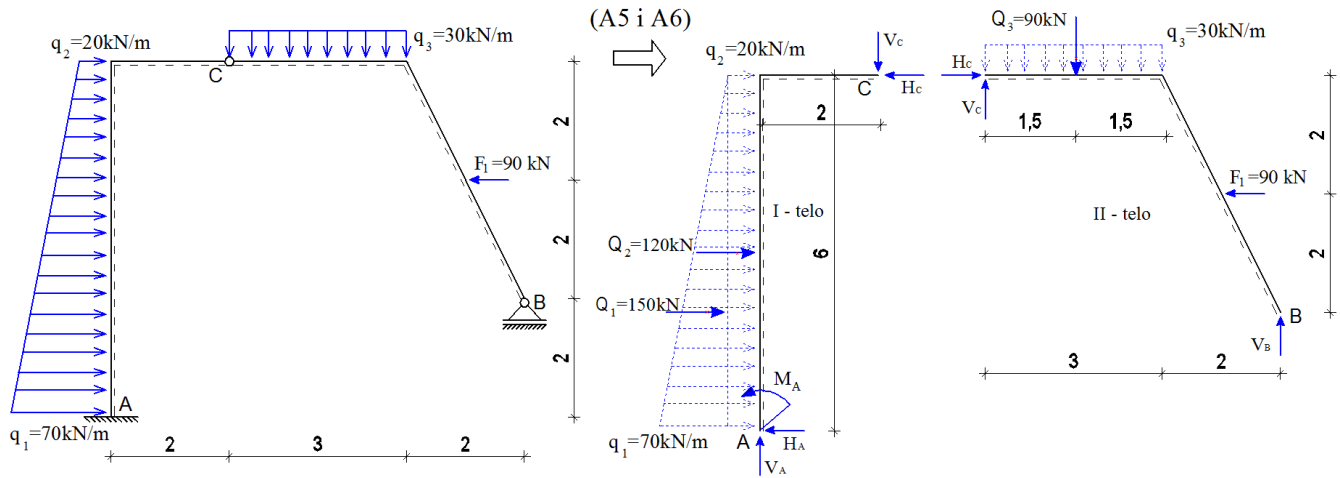
$$T_{1-D} = V_D = -12.5 \text{ kN} = T_{D-1}$$

$$N_{A-B} = N_{B-A} = 0$$

$$N_{B-C} = N_{C-B} = N_{C-D} = N_{D-C} = N_{2-D} = N_{D-2} = -F_2 = -20 \text{ kN}$$

Zadatak: 2

Odrediti sile u presecima za dati nosač i nacrtati dijagrame momenata savijanja, transferzalnih i normalnih sila.

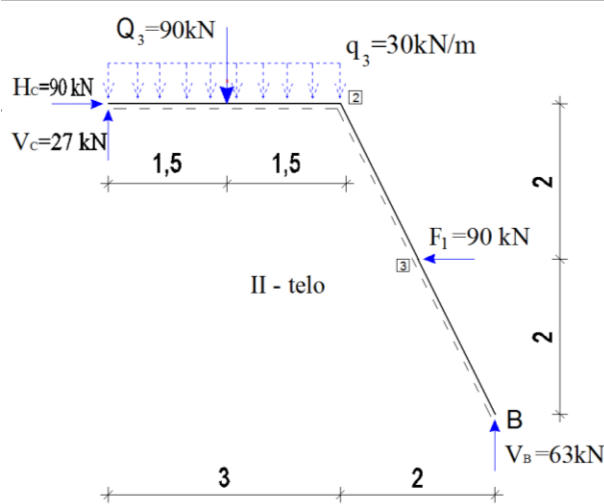


Statička određenost sistema:

Broj nepoznatih reakcija veza: $n=6, (V_A, H_A, M_A, V_B, V_C, H_C)$

Broj uslovnih jednačina ravnoteže: $r=3 \cdot t=3 \cdot 2=6$

$n=r \rightarrow$ sistem je statički određen



$$Q_3 = q_3 \cdot l_3 = 30 \cdot 3 = 90 \text{ kN}$$

Uslovne jednačine ravnoteže drugog tela:

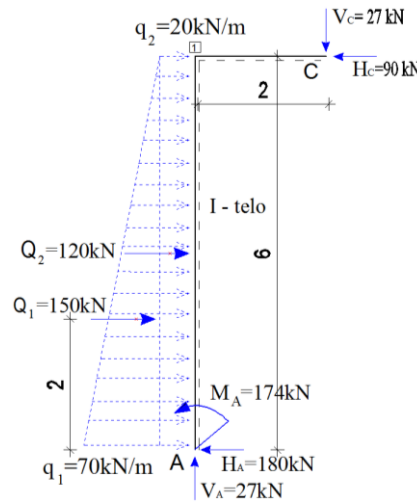
$$\Sigma X = 0 \Rightarrow H_C - F_1 = 0 \text{ kN} \Rightarrow H_C = 90 \text{ kN} \dots \dots \dots (1)$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow V_C - Q_3 + V_B = 0 \Rightarrow V_C - 90 + V_B = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$V_C - 90 + 63 = 0 \Rightarrow V_C = 27 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow -Q_3 \cdot 1.5 - F_1 \cdot 2 + V_B \cdot 5 = 0 \dots \dots \dots (3)$$

$$\Rightarrow -90 \cdot 1.5 - 90 \cdot 2 + V_B \cdot 5 = 0 \Rightarrow V_B = 63 \text{ kN}$$



$$Q_1 = \frac{(q_1 - q_2) \cdot l_1}{2} = \frac{(70 - 20) \cdot 6}{2} = 150 \text{ kN}, \quad Q_2 = q_2 \cdot l_1 = 20 \cdot 6 = 120 \text{ kN}$$

Uslovne jednačine ravnoteže prvog tela:

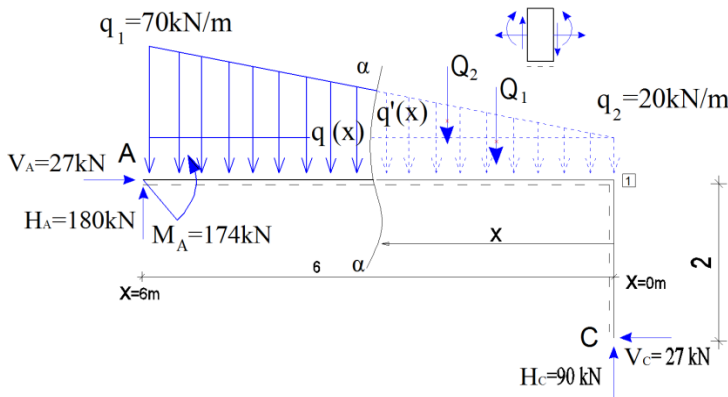
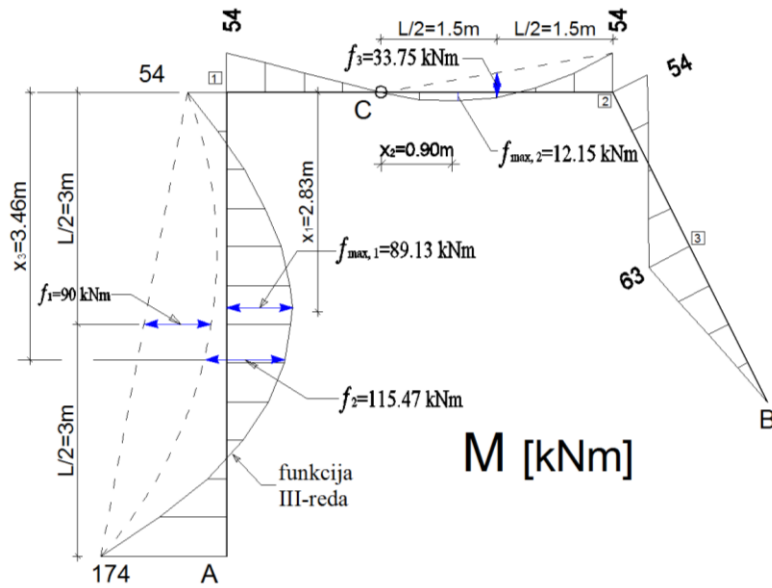
$$\Sigma X = 0 \Rightarrow -H_A + 150 + 120 - H_C = 0 \dots \dots \dots (4)$$

$$-H_A + 150 + 120 - 90 = 0 \Rightarrow H_A = 180 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow V_A - V_C = 0 \Rightarrow V_A - 27 = 0 \Rightarrow V_A = 27 \text{ kN} \dots \dots \dots (5)$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A - 150 \cdot 2 - 120 \cdot 3 - V_C \cdot 2 + H_C \cdot 6 = 0 \dots \dots \dots (6)$$

$$M_A - 150 \cdot 2 - 120 \cdot 3 - 27 \cdot 2 + 90 \cdot 6 = 0 \Rightarrow M_A = 174 \text{ kNm}$$



$$M_{\alpha-\alpha} = -1.389 \cdot x^3 - 10 \cdot x^2 + 90 \cdot x - 54$$

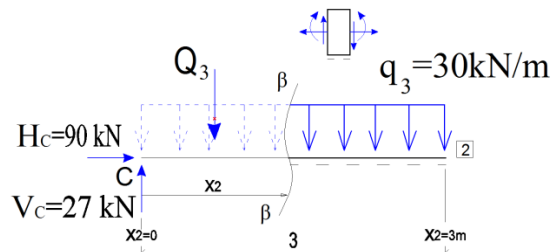
$$\max M_{\alpha-\alpha} \text{ za } T_{\alpha-\alpha} = 0 \rightarrow 4.167 \cdot x^2 + 20 \cdot x - 90 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1/2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 4.167 \cdot (-90)}}{2 \cdot 4.167} = \begin{cases} x_1 = 2.83\text{m} \\ x_2 = -7.63\text{m} \end{cases}$$

$$\max M_{x=2.83\text{m}} = -1.389 \cdot 2.83^3 - 10 \cdot 2.83^2 + 90 \cdot 2.83 - 54$$

$$\max M_{x=2.83\text{m}} = 89.13\text{kNm}$$



$$T_{\beta-\beta} = V_C - Q_3 = 27 - 30 \cdot x_2$$

$$\text{za } x_2=0 \rightarrow T_{x_2=0} = 27\text{kNm}, \text{ za } x_2=3 \rightarrow T_{x_2=3} = -63\text{kN}$$

$$\max M_{\beta-\beta} \text{ za } T_{\beta-\beta} = 0 \rightarrow 27 - 30 \cdot x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0.9\text{m}$$

$$\max M_{x_2=0.9} = 27 \cdot 0.9 - 15 \cdot 0.9^2 = 12.15\text{kNm}$$

Proračun sila u presecima nosača:

Dijagram momenata savijanja:

$$M_A = -174\text{kNm}, M_B = 0, M_C = 0,$$

$$M_1 = -V_C \cdot 2 = -54\text{kNm}$$

$$M_2 = V_B \cdot 2 - F_1 \cdot 2 = 63 \cdot 2 - 90 \cdot 2 = -54\text{kNm}$$

$$M_3 = V_B \cdot 1 = 63 \cdot 1 = 63\text{kNm}$$

$$f_1 = \frac{q_2 l^2}{8} = \frac{20 \cdot 6^2}{8} = 90\text{kNm}$$

$$f_2 = \frac{(q_1 - q_2) l^2 \sqrt{3}}{27} = \frac{(70 - 20) \cdot 6^2 \sqrt{3}}{27} = 115.47\text{kNm},$$

$$\text{za } x_1 = \frac{l\sqrt{3}}{3} = 3.46\text{m}$$

Iz sličnosti trouglova:

$$50: q'(x) = 6:x \rightarrow q'(x) = 8.333 \cdot x$$

$$q(x) = 20 + q'(x) = 20 + 8.333 \cdot x$$

$$Q_1 = 20 \cdot x, \quad Q_2 = \frac{q'(x) \cdot x}{2} = \frac{8.33 \cdot x \cdot x}{2} = 4.167 \cdot x^2$$

$$M_{\alpha-\alpha} = H_C \cdot x - V_C \cdot 2 - 20 \cdot x \cdot \frac{x}{2} - 4.1667 \cdot x^2 \cdot \frac{x}{3}$$

$$M_{\alpha-\alpha} = 90 \cdot x - 27 \cdot 2 - 10 \cdot x^2 - 1.389 \cdot x^3$$

$$M_{\alpha-\alpha} = -1.389 \cdot x^3 - 10 \cdot x^2 + 90 \cdot x - 54$$

$$\text{za } x=0 \rightarrow M_{x=0} = -54\text{kNm}$$

$$\text{za } x=6 \rightarrow M_{x=6} = -174\text{kNm}$$

$$T_{\alpha-\alpha} = -H_C + Q_1 + Q_2 = -90 + 20 \cdot x + 4.1667 \cdot x^2$$

$$T_{\alpha-\alpha} = 4.167 \cdot x^2 + 20 \cdot x - 90$$

$$\text{za } x=0 \rightarrow T_{x=0} = -90\text{kN}$$

$$\text{za } x=6 \rightarrow T_{x=6} = 180\text{kN}$$

$$T_{\alpha-\alpha} = \frac{dM(x)}{dx} = -(-1.389 \cdot 3 \cdot x^2 - 10 \cdot 2 \cdot x + 90)$$

$$T_{\alpha-\alpha} = 4.167 \cdot x^2 + 20 \cdot x - 90$$

II - telo

$$M_B = 0, \quad M_C = 0, \quad Q_3 = 30 \cdot x_2,$$

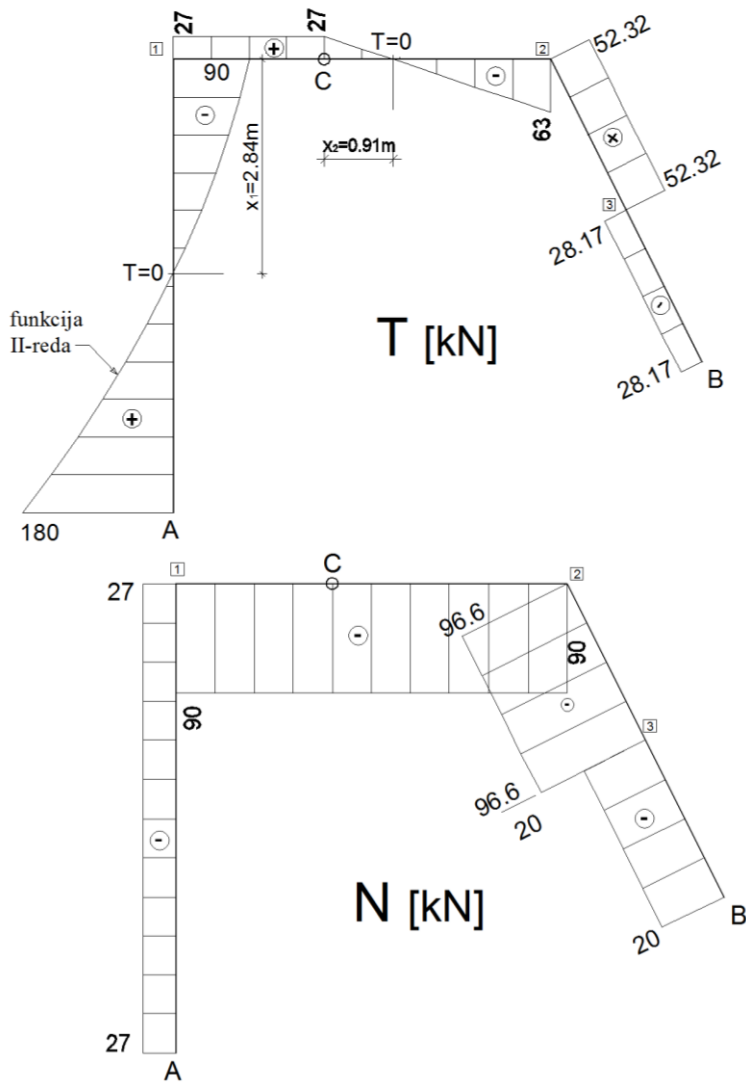
$$f_3 = \frac{q_3 l^2}{8} = \frac{30 \cdot 3^2}{8} = 33.75\text{kNm}$$

$$M_{\beta-\beta} = V_C \cdot x_2 - Q_3 \cdot \frac{x_2}{2} = 27 \cdot x_2 - 30 x_2 \cdot \frac{x_2}{2}$$

$$M_{\beta-\beta} = 27 \cdot x_2 - 15 x_2^2$$

$$\text{za } x_2=0 \rightarrow M_{x_2=0} = 0\text{kNm}$$

$$\text{za } x_2=3 \rightarrow M_{x_2=3} = -54\text{kNm}$$

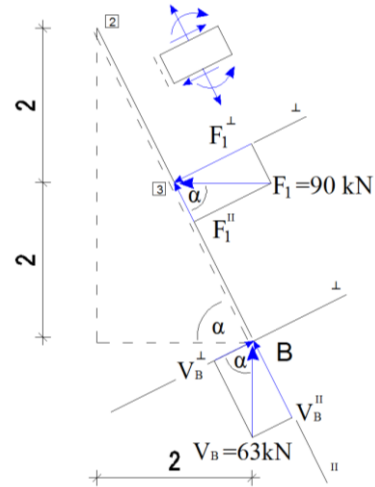


Proračun dijagrama transferzalnih i normalnih sila:

$$T_{A-1} = +H_A = 180\text{kN}, T_{1-A} = -H_C = -90\text{kN}$$

$$T_{1-C} = T_{C-1} = V_C = 27\text{kN}$$

$$T_{C-2} = V_C = 27\text{kN}, T_{2-C} = V_C - Q_3 = 27 - 90 = -63\text{kN}$$



$$l = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4.472\text{m}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{4.472} = 0.447, \sin\alpha = \frac{4}{4.472} = 0.894$$

$$T_{B-3} = -V_B^\perp = -V_B \cos\alpha = -28.17\text{kN} = T_{3-B}$$

$$N_{B-3} = -V_B^\parallel = -V_B \sin\alpha = -20\text{kN} = N_{3-B}$$

$$T_{2-3} = -V_B^\perp + F_1^\perp = -V_B \cos\alpha + 90 \sin\alpha = +52.32\text{kN}$$

$$T_{3-2} = T_{2-3} = +52.32\text{kN}$$

$$N_{2-3} = -V_B^\parallel - F_1^\parallel = -V_B \sin\alpha - 90 \cos\alpha = -96.6\text{kN}$$

$$N_{3-2} = N_{2-3} = -96.6\text{kN}$$

$$N_{A-1} = N_{1-A} = -V_A = 27\text{kN}$$

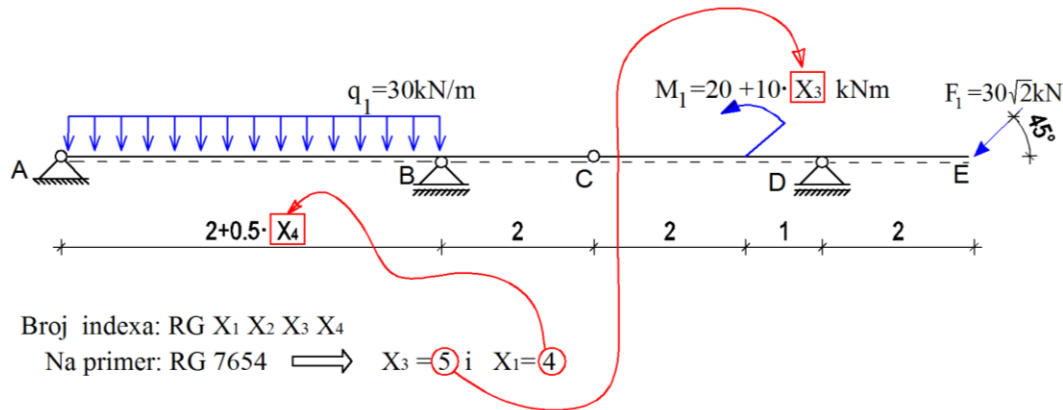
$$N_{1-C} = N_{C-1} = -H_C = -90\text{kN}$$

ZADACI KOJE STUDENTI RADE SAMOSTALNO: I - grupa

Zadatak: 1

- Odrediti reakcije veza datog Gerberovog nosača.
- Odrediti sile u presecima za dati nosač i nacrtati dijagrame momenata savijanja, transferzalnih i normalnih sila.

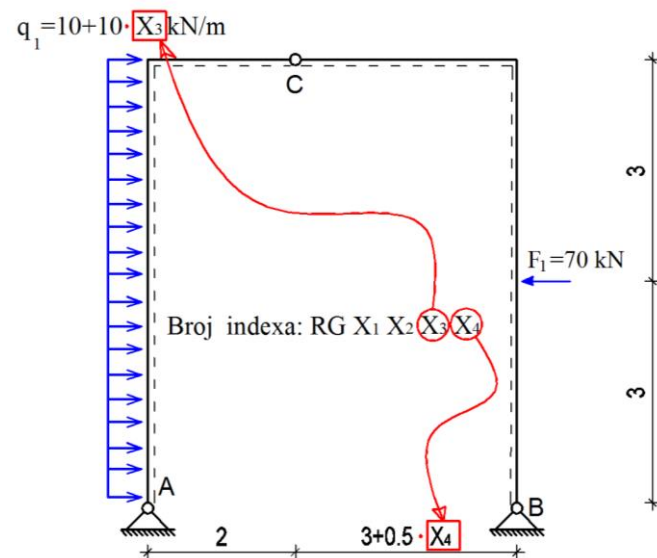
Raspon prvog polja i intenzitet momenta M_1 dati su u funkciji poslednje dve cifre broja index-a.



Zadatak: 2

- Odrediti reakcije veza datog nosača.
- Odrediti sile u presecima za dati nosač i nacrtati dijagrame momenata savijanja, transferzalnih i normalnih sila.

Raspon drugog polja i intenzitet kontinualnog opterećenja q_1 dati su u funkciji poslednje dve cifre broja index-a.



NAPOMENA: Zadatke raditi po ugledu na date primere i primere iz Praktikumuma. Zadatke raditi u slobodnoj formi na belim A4 papirima. Urađene zadatke fotografisati i poslati na E-mail pripadajuće grupe tokom trajanja termina vežbi prema važećem rasporedu.

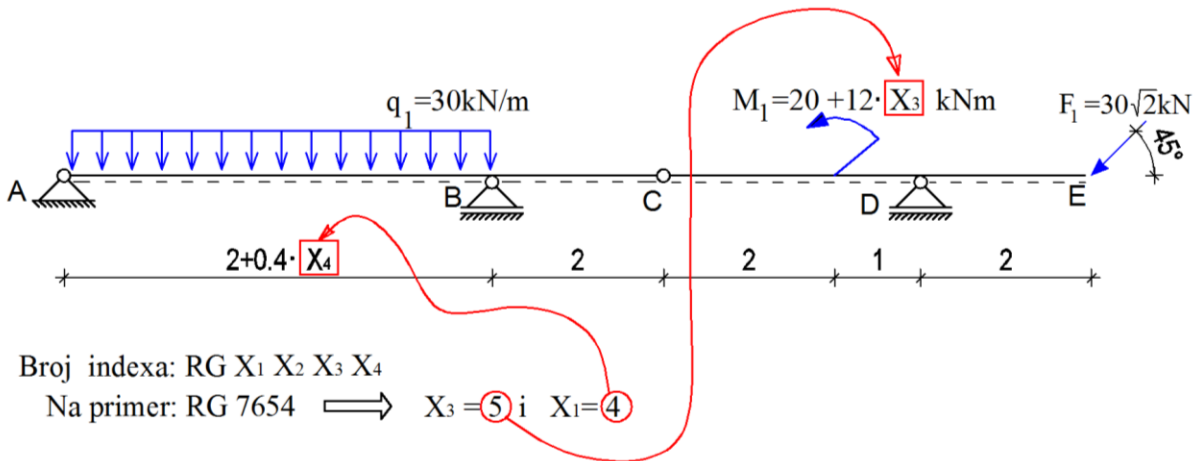
I grupa:	tm1g1@gaf.ni.ac.rs	utorkom od	15 ¹⁵ do 18 ⁰⁰ h
II grupa:	tm1g2@gaf.ni.ac.rs	četvrtkom od	8 ¹⁵ do 11 ⁰⁰ h.
III grupa:	tm1g3@gaf.ni.ac.rs	petkom od	11 ¹⁵ do 14 ⁰⁰ h.

Za ostvarivanje maksimalnog broja poena potrebno je da se urađeni domaći zadaci pošalju na napred navedene mejlove u roku od 48h od termina vežbi. Nakon tog vremena vežbe će se bodovati sa 50% poena.

ZADACI KOJE STUDENTI RADE SAMOSTALNO: II - grupa**Zadatak: 1**

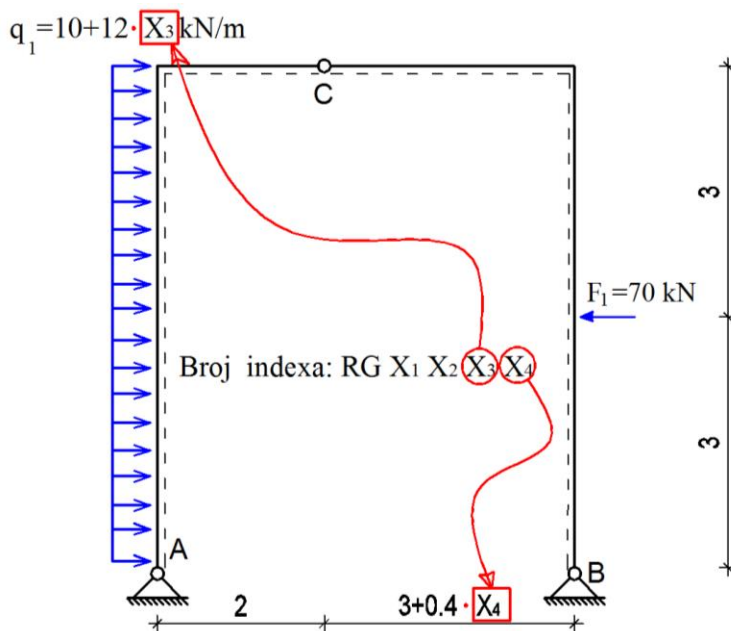
- c) Odrediti reakcije veza datog Gerberovog nosača.
 d) Odrediti sile u presecima za dati nosač i nacrtati dijagrame momenata savijanja, transferzalnih i normalnih sila.

Raspon prvog polja i intenzitet momenta M_1 dati su u funkciji poslednje dve cifre broja index-a.

**Zadatak: 2**

- c) Odrediti reakcije veza datog nosača.
 d) Odrediti sile u presecima za dati nosač i nacrtati dijagrame momenata savijanja, transferzalnih i normalnih sila.

Raspon drugog polja i intenzitet kontinualnog opterećenja q_1 dati su u funkciji poslednje dve cifre broja index-a.



NAPOMENA: Zadatke raditi po ugledu na date primere i primere iz Praktikum. Zadatke raditi u slobodnoj formi na belim A4 papirima. Urađene zadatke fotografisati i poslati na E-mail pripadajuće grupe tokom trajanja termina vežbi prema važećem rasporedu.

I grupa: tm1g1@gaf.ni.ac.rs utorkom od 15¹⁵ do 18⁰⁰h
 II grupa: tm1g2@gaf.ni.ac.rs četvrtkom od 8¹⁵ do 11⁰⁰h.
 III grupa: tm1g3@gaf.ni.ac.rs petkom od 11¹⁵ do 14⁰⁰h.

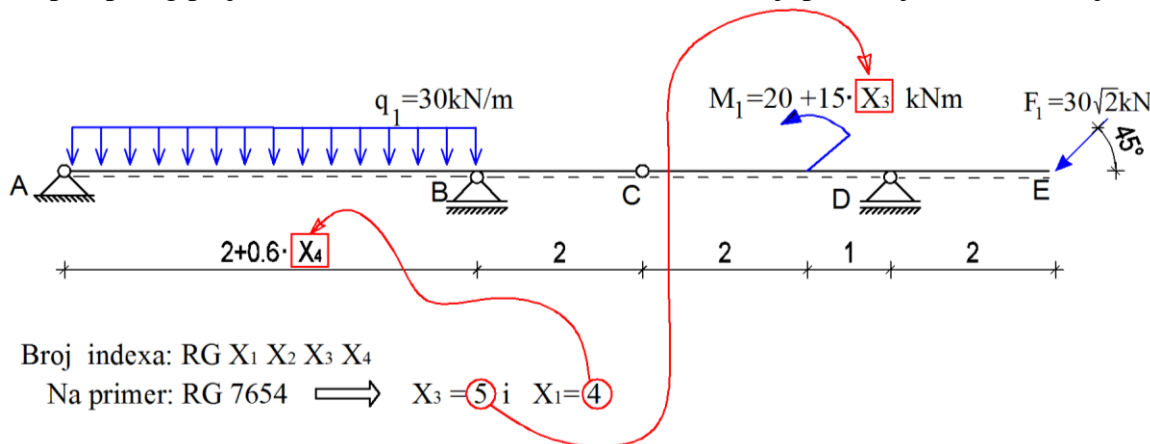
Za ostvarivanje maksimalnog broja poena potrebno je da se urađeni domaći zadaci pošalju na napred navedene mejlove u roku od 48h od termina vežbi. Nakon tog vremena vežbe će se bodovati sa 50% poena.

ZADACI KOJE STUDENTI RADE SAMOSTALNO: I - grupa

Zadatak: 1

- e) Odrediti reakcije veza datog Gerberovog nosača.
 f) Odrediti sile u preseccima za dati nosač i nacrtati dijagrame momenata savijanja, transferzalnih i normalnih sila.

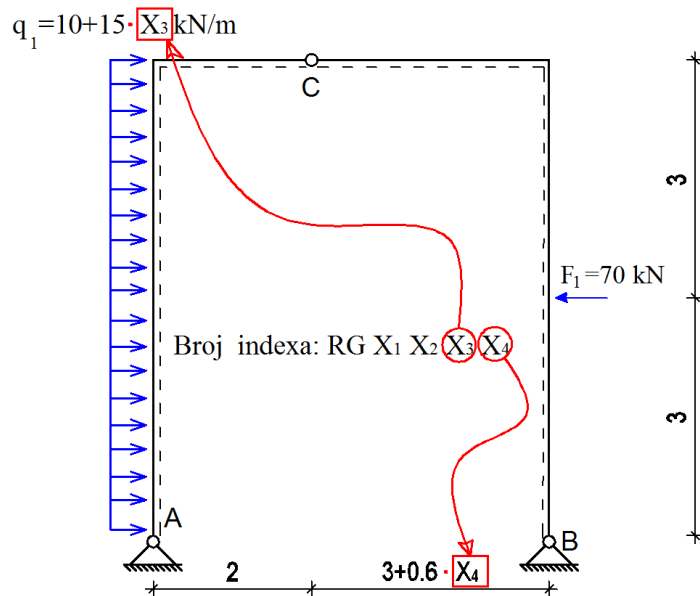
Raspon prvog polja i intenzitet momenta M_1 dati su u funkciji poslednje dve cifre broja index-a.



Zadatak: 2

- e) Odrediti reakcije veza datog nosača.
 f) Odrediti sile u preseccima za dati nosač i nacrtati dijagrame momenata savijanja, transferzalnih i normalnih sila.

Raspon drugog polja i intenzitet kontinualnog opterećenja q_1 dati su u funkciji poslednje dve cifre broja index-a.



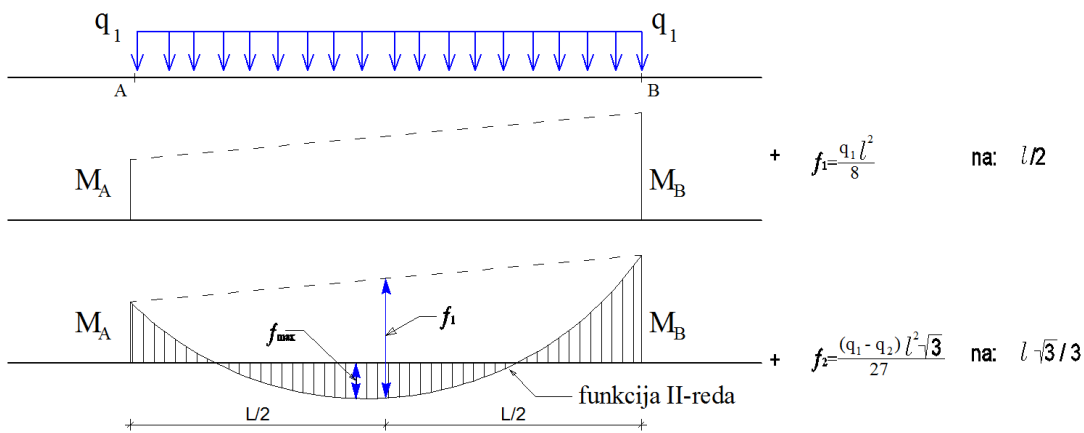
NAPOMENA: Zadatke raditi po ugledu na date primere i primere iz Praktikumuma. Zadatke raditi u slobodnoj formi na belim A4 papirima. Urađene zadatke fotografisati i poslati na E-mail pripadajuće grupe tokom trajanja termina vežbi prema važećem rasporedu.

I grupa: tm1g1@gaf.ni.ac.rs utorkom od 15¹⁵ do 18⁰⁰h
 II grupa: tm1g2@gaf.ni.ac.rs četvrtkom od 8¹⁵ do 11⁰⁰h.
 III grupa: tm1g3@gaf.ni.ac.rs petkom od 11¹⁵ do 14⁰⁰h.

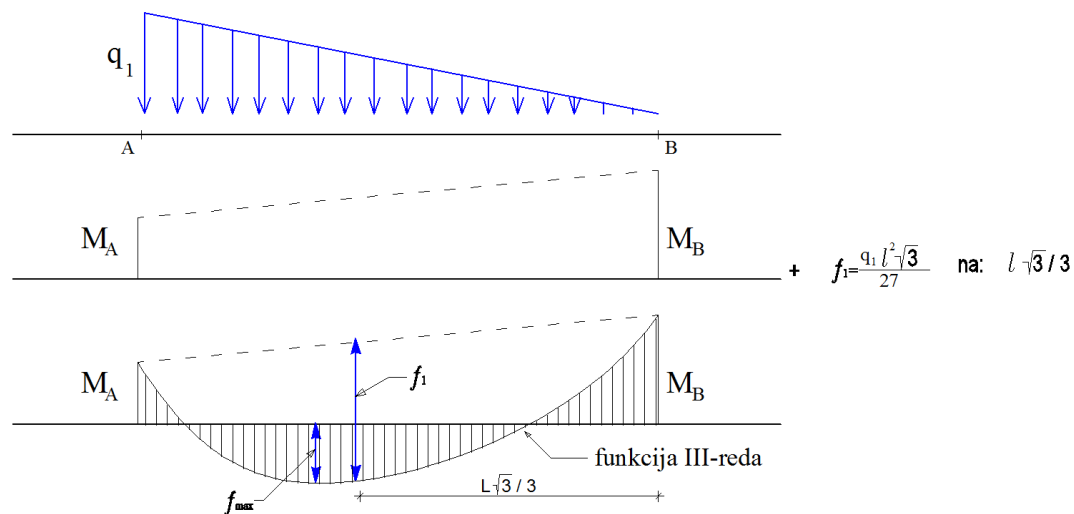
Za ostvarivanje maksimalnog broja poena potrebno je da se urađeni domaći zadaci pošalju na napred navedene mejlove u roku od 48h od termina vežbi. Nakon tog vremena vežbe će se bodovati sa 50% poena.

Konstrukcija dijagrama momenta savijanja na polju opterećenja sa kontinualnim opterećenjem:

$q = \text{const}$



q – linearna funkcija



Princip superpozicije kod “trapeznog” opterećenja

