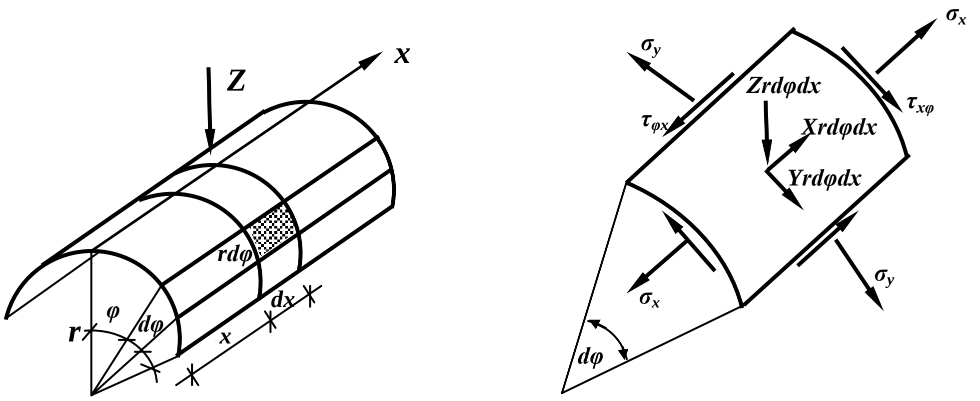
MEMBRANSKA TEORIJA CILINDRIČNIH LJUSKI

Posmatra se cilindrična ljuska čije je oslanjanje izvedeno tako da je naponsko stanje približno slobodno od savijanja pa se može smatrati da su naponi raspodeljeni ravnomerno po debljini ljuske.

Tačke ljuske su definisane koordinatama x, φ i z, pri čemu x označava bilo koju izvodnicu cilindrične ljuske, φ se meri od nekog unapred utvrđenog pravca i određuje bilo koju izvodnicu ljuske, a z određuje položaj tačke u odnosu na srednju površinu ljuske.



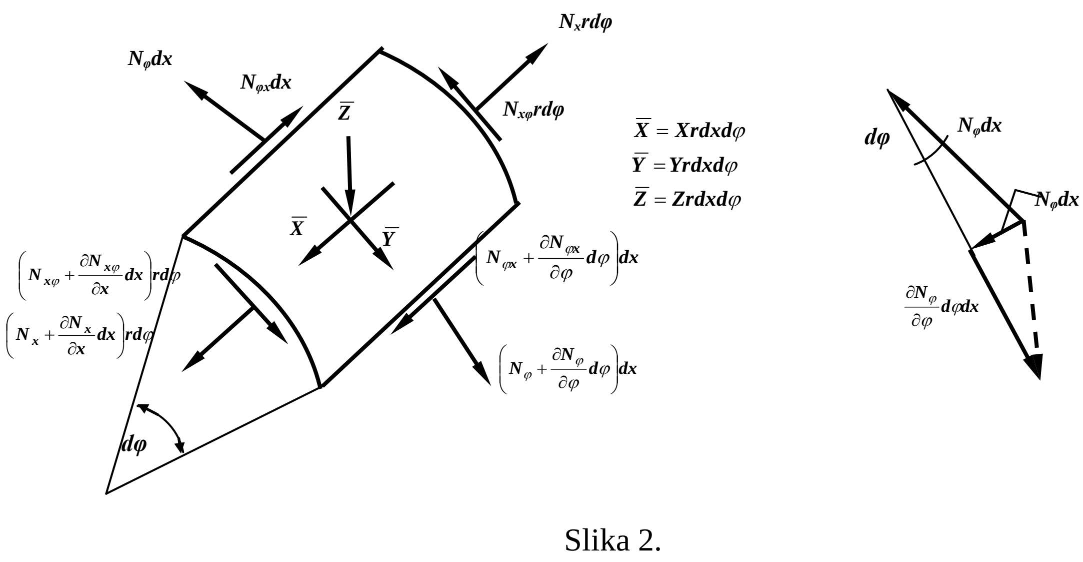
Slika 1.

Na osnovu definicija za sile u presecima je:

$$N_x = \sigma_x h \ , \ N_y = \sigma_y h \ , \ N_{\varphi x} = N_{x\varphi} = \tau_{\varphi x} h = \tau_{x\varphi} h \qquad (1)$$

1. Uslovi ravnoteže

Posmatra se element ljuske određen presecima: x=const. i x+dx=const., kao i φ=const. i φ+dφ=const. opterećen spoljnim opterećenjem tako da ima komponente u pravcima x, φ, z označene sa X, Y, Z. Komponente X i Y su pozitivne u pravcu rastućeg x i φ, a komponenta Z je pozitivna ako je usmerena prema unutrašnjosti ljuske.



Slika 2.

Za element prikazan na Sl.2 postavljaju se uslovi ravnoteže protiv pomeranja u pravcu izvodnice, tangente na presek i površinsku normalu, tako da uslovi ravnoteže protiv pomeranja u pravcima x, φ i z glase:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x} r dx d\varphi + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} dx d\varphi + X r d\varphi dx = 0 \\
&\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} r dx d\varphi + \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} dx d\varphi + Y r d\varphi dx = 0 \\
&N_{\varphi} dx d\varphi + Z r d\varphi dx = 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Odnosno posle skraćenja sa $dxd\varphi$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x} r + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} + X r = 0 \\
&\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} r + \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} + Y r = 0 \\
&N_{\varphi} + Z r = 0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

ili:

$$
N_{\varphi} = -Zr, \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} = -Y, \frac{1}{r}\frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_x}{\partial x} = -X \tag{4}
$$

Dakle sila N_{φ} zavisi samo od komponente Z koja na tom mestu deluje. Sile N_x i $N_{x\varphi}= N_{\varphi x}$ dobijaju se integracijom:

$$
\begin{aligned}
&N_{x\varphi} = -\int (Y + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi}) dx + C_1(\varphi) \\
&N_x = -\int (X + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi}) dx + C_2(\varphi)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

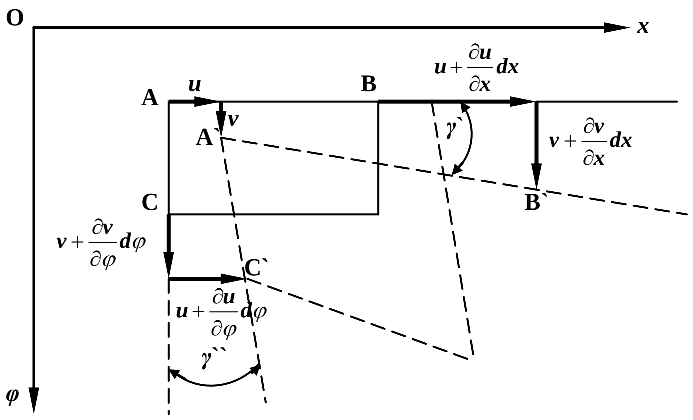
Integracione konstante odredju se iz graničnih uslova.

U slučaju da je opterećenje takvo da je: X=0 a Y=Y(φ) i Z=Z(φ) sile u presecima su:

$$
\begin{aligned}
&N_{\varphi} = -Zr \\
&N_{x\varphi} = -(Y + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi}) x + C_1(\varphi) \\
&N_x = \frac{1}{r}\frac{d}{d\varphi}(X + \frac{1}{r}\frac{dN_{\varphi}}{d\varphi})\frac{x^2}{2} - \frac{1}{r}\frac{dC_1(\varphi)}{d\varphi} x + C_2(\varphi)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

2. Deformacija kružno cilindrične ljuske

Pri deformaciji cilindrične ljuske javljaju se pomeranja tačaka srednje površine i to: u u pravcu izvodnice, v u pravcu tangente na prsten i w u pravcu normale na površinu od centra prema spolja.



Slika 3.

Deformaciske veličine su:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (7)$$

Dilatacija ε_φ sastoji se iz dva dela i to:

- jedan zbog pojave pomeranja v, veličine:

$$\varepsilon'_\varphi = \frac{\partial v}{\partial s}\frac{ds}{ds} = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial \varphi} \qquad (8)$$

Pre deformacije element ds je imao dužinu ds=adφ a posle deformacije poluprečnik je a+w, dok je dužina elementa koji odgovara uglu φ ds=(a+w)dφ, pa je

- drugi deo dilatacije:

$$\varepsilon''_\varphi = \frac{(a+w)d\varphi - ad\varphi}{ad\varphi} = \frac{w}{a} \qquad (9)$$

i tada je:

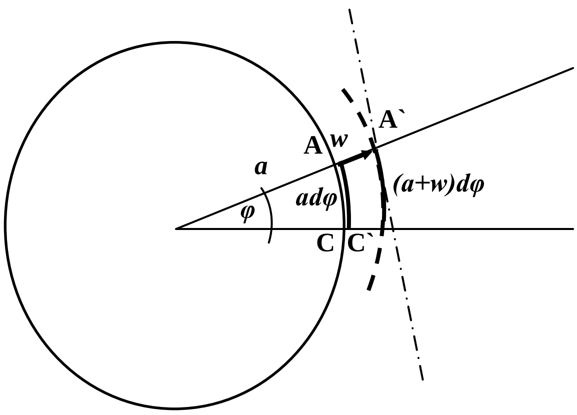
$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon'_\varphi + \varepsilon''_\varphi = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w\right) \qquad (10)$$

Promena pravog ugla između elemenata dx i ds vidljiva je sa Sl.3 i iznosi:

$$\gamma_{x\varphi} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{ds}{ds} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \tag{11}$$

Prema Hukovom zakonu je :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_\varphi) \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{x\varphi} &= \frac{1}{G}\tau_{x\varphi} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{x\varphi} \end{aligned} \tag{12}$$



Slika 4.

Ako umesto napona uvedemo sile imajući u vidu da je:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h} \quad , \quad \sigma_\varphi = \frac{N_\varphi}{h} \quad , \quad \tau_{x\varphi} = \frac{N_{x\varphi}}{h} \tag{13}$$

a na mesto deformaciskih veličina njihove vrednosti izražene preko pomeranja i njihovih izvda, dobijamo veze:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh}(N_x - \nu N_\varphi) \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w\right) = \frac{1}{Eh}(N_\varphi - \nu N_x) \\ \gamma_{x\varphi} &= \frac{\partial v}{\partial \varphi} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2a(1+\nu)}{Eh}N_{x\varphi} \end{aligned} \tag{14}$$

3. Pomeranja kružno cilindrične ljuske

Za $\partial = 0$ što je dozvoljeno za betonske konstrukcije, posebno kada je u pitanju proračun pomeranja, dobija se:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{N_x}{Eh_x} \\
&\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w = \frac{a}{Eh_\varphi} N_\varphi \qquad \text{...........} \qquad (15) \\
&\frac{\partial u}{\partial \varphi} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2a}{Eh} N_{x\varphi}
\end{aligned}$$

Unesu li se u jednačine za pomeranja izrazi za sile u presecima (6) i integrišemo, dobićemo izraze za pomeranja u obliku:

$$\begin{aligned}
&u = \frac{1}{Eh_x}\int N_x dx + C_3^{(\varphi)} \\
&v = \frac{2}{Eh_\varphi}\int N_{x\varphi} dx - \frac{1}{a}\int \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi + C_4^{(\varphi)} \qquad \text{...........} \qquad (16) \\
&w = \frac{a}{Eh} N_\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

Pošto su jednačine (16) diferencijalne dobili smo još dve integracione konstante. Prve dve integracione konstante A_1 i A_2 koje se javljaju u izrazima za presečne sile određuju se tako što se postave granični uslovi po silama prema jednačinama (5). Tako na primer ako je opterećenje takvo da je X_n=0 , Y_n=const. i Z_n=const. možemo sračunati komponente pomeranja. Kada u prvoj od jednačina (16) unesemo vrednost za N_x prema jednačini (14) i posle integracije po x, dobija se:

$$u = \frac{1}{Eh_x}\left\{\frac{u}{a}\left[(Y_n + nZ_n)\frac{x^3}{6} - A_1\frac{x^2}{2}\right] + A_2 x + A_3\right\}\cos n\varphi \qquad (17)$$

Pri čemu je funkcija ugla φ kao integraciona konstanta A_3 koja je pretpostavljena u obliku $\frac{A_3}{Eh}\cos n\varphi, A_3 = \text{const.}$

Iz treće jednačine sistema (16) sledi da je:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2\frac{N_{x\varphi}}{Eh} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

ako se za $N_{x\varphi}$ i $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ uvedu vrednosti iz druge jednačine sistema (16) i (15), i izvede integracija , dobija se:

$$v = \left\{Y_n + nZ_n)\left[\frac{u^2x^4}{24a^2Eh_x} - \frac{x^2}{Eh}\right] - A_1\left[\frac{u^2x^3}{62a^2Eh_x} - \frac{2x}{Eh}\right] + \frac{1}{Eh_x a}(\frac{ux^2}{2}A_2 + uA_3x + A_4)\right\}\sin n\varphi \qquad (18)$$

pri čemu je A_4 nova konstanta. Koristeći prvu jednačinu sistema (16) i $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$ iz jednačine (15) dobija se izraz za pomeranje w.

$$w = -\left\{\frac{a^2 Z_n}{Eh} + n(Y_n + nZ_n)\left[\frac{u^2 x^2}{24a^2 Eh_x} - \frac{x^2}{Eh}\right] - A_1 n\left[\frac{u^2 x^3}{6a^2 Eh_x} - \frac{2x}{Eh}\right] + \frac{n}{aEh_x}\left(\frac{nx^2}{2} A_2 + nA_3 x + A_4\right)\right\}\cos n\varphi \qquad (19)$$

Konstante A_1 i A_2 određujemo iz graničnih uslova.