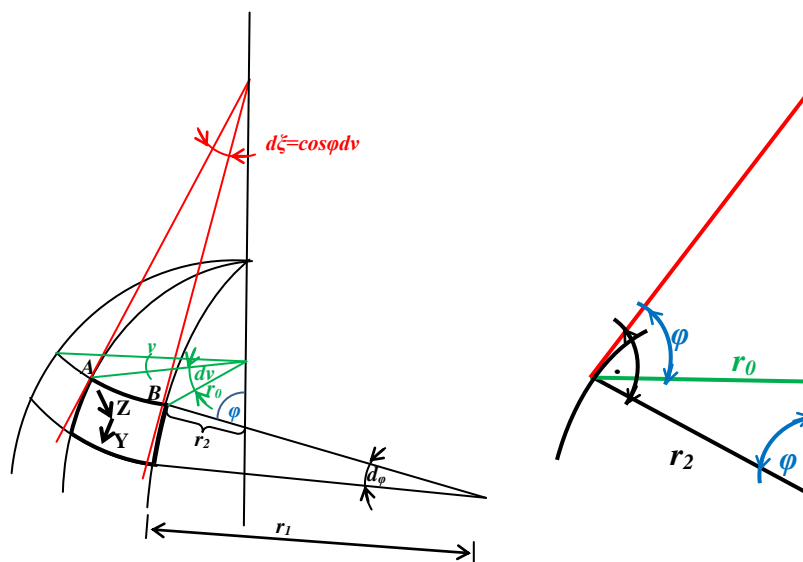


MEMBRANSKA TEORIJA ROTACIONIH LJUSKI

2. Rotaciona ljuska pri rotaciono simetričnom opterećenju

2.1 Uslovi ravnoteže elementa ljuske

Ukoliko je rotaciona ljuska rotaciono simetrično oslonjena i rotaciono simetrično opterećena, tj. nema opterećenje u pravcu x ose, stanje napona i deformacije ljuske je nezavisno od koordinate v . To znači da su svi izvodi po v u uslovima ravnoteže elementa ljuske jednaki nuli.



Slika 1.

Kako je rezultanta ukupnog opterećenja u pravcu tangente na paralelni krug $X=0$, biće $N_{\varphi v}=0$, a zbog jednakosti mora biti i $N_{v\varphi}=0$, to je prvi uslov ravnoteže (da zbir komponenti svih sila u pravcu tangente na paralelni krug mora biti jednak nuli) identički zadovoljen.

U membranskoj teoriji rotacionih ljuski pri rotaciono simetričnom opterećenju su dakle nepoznate sile N_{φ} i N_v . Za njihovo određivanje stoje na raspoloženju još dva uslova ravnoteže elementarnog dela ljuske i to:

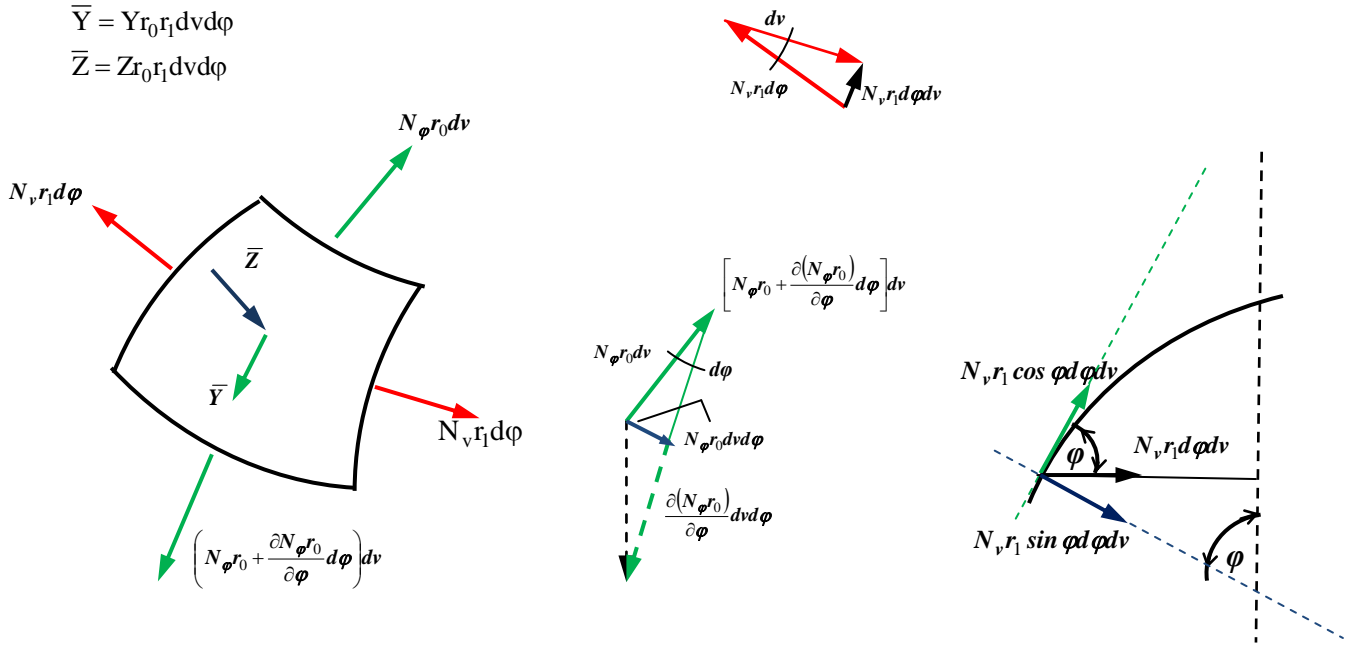
- Zbir komponenti svih sila u pravcu tangente na meridijan mora biti nula;
- Zbir komponenti svih sila u pravcu normale na površ mora biti nula.

Kada se uzme u obzir da su svi izvodi po v u uslovima ravnoteže elementa ljuske jednaki nuli ova dva uslova ravnoteže svode se na:

$$\frac{\partial(N_{\varphi}r_0)}{\partial\varphi} - N_v r_1 \cos\varphi + Y r_0 r_1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{N_{\varphi}}{r_1} + \frac{N_v}{r_2} = -Z \quad (2)$$

Ovi uslovi ravnoteže se mogu izvesti i direktno posmatrajući element rotaciono simetrično opterećene rotacione ljuske prikazan na Slici 2.



$$\sum Y = 0 \Rightarrow \frac{\partial(N_\varphi r_0)}{\partial\varphi} d\varphi dv - N_{v,r_1} \cos\varphi d\varphi dv + Yr_0r_1 d\varphi dv = 0 \quad (3)$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow N_\varphi r_0 d\varphi dv + N_{v,r_1} \sin\varphi d\varphi dv + Zr_0r_1 d\varphi dv = 0 \quad (4)$$

Ako se jednačine (3) i (4) podele sa $d\varphi dv$ dobija se:

$$\frac{\partial(N_\varphi r_0)}{\partial\varphi} + N_{v,r_1} \cos\varphi + Yr_0r_1 = 0 \quad (5)$$

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_v}{r_2} = -Z \quad (6)$$

Jednačina (6) dobijena je u ovom obliku unošenjem izraza $r_0 = r_2 \sin\varphi$ u jednačinu (4) i deljenjem cele jednačine sa $r_1 r_2 \sin\varphi d\varphi dv$.

Sile u preseccima pri rotacionoj simetriji se mogu odrediti direktnom integracijom uslova ravnoteže, pri čemu se dobija:

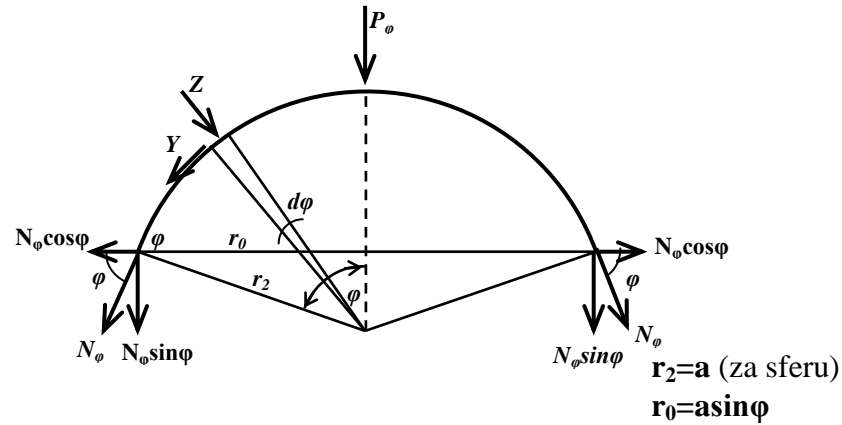
$$N_v = -r_2 \left[Z + \frac{N_\varphi}{r_1} \right] \quad (7)$$

$$N_\varphi = -\frac{1}{r_2 \sin^2\varphi} \left[\int r_1 r_2 (Y \sin\varphi + Z \cos\varphi) \sin\varphi d\varphi + C \right] \quad (8)$$

gde je C integraciona konstanta koja se određuje iz graničnih uslova. Sa izračunatom silom N_φ , lako se izračuna i sila N_v iz izraza (7).

2.2 Uslovi ravnoteže dela rotacione ljuske iznad nekog paralelnog kruga

Umesto postavljanja uslova ravnoteže za element ljuske, može se postaviti uslov za deo rotacione ljuske iznad nekog paralelnog kruga, a protiv pomeranja u pravcu ose rotacije (Sl.3). Sa P_φ označimo rezultantu rotaciono simetričnog opterećenja na delu ljuske koga posmatramo.



Slika 3.

Zbir svih sila u pravcu ose rotacije daje

$$P_\varphi + 2a\pi N_\varphi \sin^2 \varphi = 0 \quad (9)$$

odnosno

$$N_\varphi = -\frac{P_\varphi}{2a\pi \sin^2 \varphi} \quad (10)$$

Pošto je određena sila N_φ , iz izraza (7) proračunavamo i silu N_v .

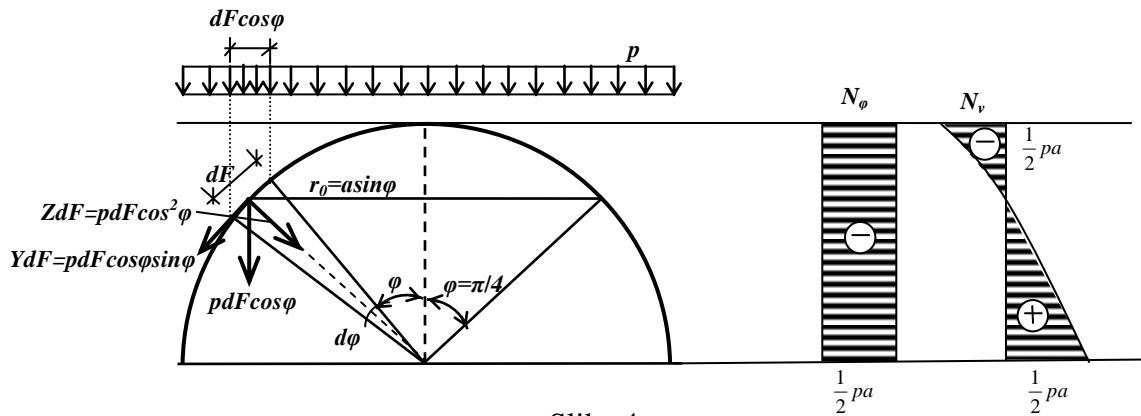
$$N_v = -Zr_2 - \frac{r_2}{r_1} N_\varphi \quad (11)$$

Svi izvedeni odnosi važe i u slučaju promenljive debljine zida.

2.3 Primeri

2.3.1. Opterećenje ravnomerno raspodeljenim teretom "p" po osnovi kupole

Komponente opterećenja su: $X=0$, $Y=p \sin\varphi \cos\varphi$, $Z=p \cos^2\varphi$



Slika 4.

Ukupan teret na kupoli (Sl.4) iznad paralelnog kruga $\varphi=\text{const.}$ je :

$$P_{\varphi} = pa^2 \pi \sin^2 \varphi \quad (12)$$

pa je tada:

$$N_{\varphi} = -\frac{pa^2 \pi \sin^2 \varphi}{2a \pi \sin^2 \varphi} = -\frac{1}{2} pa \quad (13)$$

$$N_v = -a p \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} pa = -\frac{1}{2} pa \cos 2\varphi \quad (14)$$

U temenu tj. na mestu $\varphi=0$ presečne sile su:

$$N_{\varphi} = -\frac{1}{2} pa \quad \text{i} \quad N_v = -\frac{1}{2} pa$$

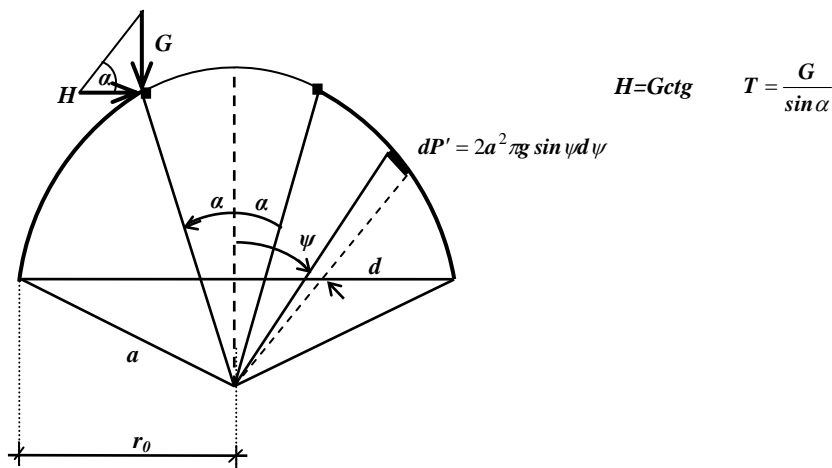
a duž paralelnog kruga za koji je $\varphi = \frac{\pi}{2}$ je:

$$N_{\varphi} = -\frac{1}{2} pa \quad N_v = \frac{1}{2} pa$$

sila N_v menja znak na mestu za koje je $\cos 2\varphi=0$ odnosno $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

2.3.2 Otvorena sferna kupola

Vrlo često sferna ljuska treba da bude otvorena radi konstruisanja laterne za osvetljenje i eventualno provetravanje. Neka kupola od opterećenja nosi samo sopstvenu težinu "g" po jedinici srednje površine i teret G po jedinici dužine otvora laterne. Kako u membranskoj teoriji kupola može da primi samo sile u pravcu tangente, ona duž otvora mora imati prsten za prijem horizontalnih sila zatezanja.



Slika 5.

Silu N preuzima prsten na glavi kupole (Sl.5). Sile u preseccima N_φ računamo prema izrazu (11), pa je stoga potrebno sračunati silu P_φ . Ako se izvrši integracija izraza (15):

$$dP' = 2a \sin \psi \pi g a d\psi = 2a^2 \pi g \sin \psi d\psi \quad (15)$$

u granicama od $\psi = \alpha$ do $\psi = \varphi$ dobija se za P_φ izraz:

$$P_\varphi' = 2a^2 \pi g \int_{\alpha}^{\varphi} \sin \psi d\psi = -2a^2 \pi g \cos \psi \Big|_{\alpha}^{\varphi} = -2a^2 \pi g [\cos \varphi - \cos \alpha]$$

$$P_\varphi' = -2a^2 \pi g [\cos \varphi - \cos \alpha].$$

Doda li ovoj sili još i sila tereta G duž prstena, dobija se:

$$P_\varphi = -2a^2 \pi g [\cos \varphi - \cos \alpha] + 2a \pi \sin \alpha G \quad (16)$$

Sa ovim je:

$$N_\varphi = -\frac{2a^2 \pi g (\cos \alpha - \cos \varphi)}{2a \pi \sin^2 \varphi} - \frac{2a \pi \sin \alpha G}{2a \pi \sin^2 \varphi}$$

$$N_\varphi = -\frac{1}{\sin^2 \varphi} [ag(\cos \alpha - \cos \varphi) + G \sin \alpha] \quad (17)$$

a posle toga:

$$N_v = -aZ - N_\varphi$$

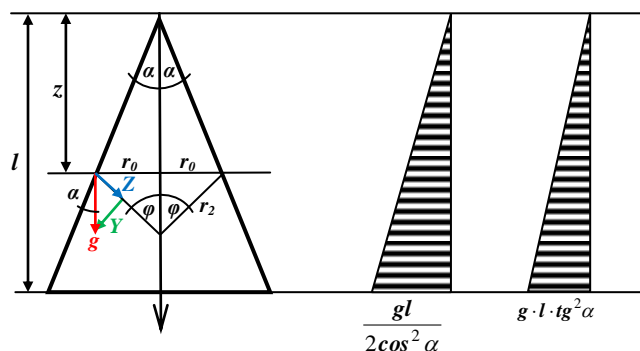
odnosno:

$$N_v = \frac{1}{\sin^2 \varphi} [ag(\cos \alpha - \cos \varphi) + G \sin \alpha] - ag \cos \varphi \quad (18)$$

2.3.3 Konusna ljuska

Geometrijske karakteristike jedne konusne ljuske su:

$$\varphi = \frac{1}{2} \pi - \alpha = \text{const.}; r_2 = \frac{r_0}{\cos \alpha}; r_0 = Z \tan \alpha; r_1 = \infty \quad (19)$$



Slika 6.

Proračunavamo sile u presecima za opterećenje sopstenom težinom q po jedinici srednje površine ljuske, pa konstantnu debljinu zida. Komponente opterećenja glase:

$$Y = g \cos \alpha \quad Z = g \sin \alpha \quad (20)$$

Ako sa P_z označimo težinu ljuske iznad preseka z , tada je prema Sl.6:

$$P_z = \frac{1}{2} g \frac{Z}{\cos \alpha} 2r_0 \pi = gZ^2 \pi \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \pi g \frac{r_0 Z}{\cos \alpha} \quad (21)$$

a prema izrazima (10) i (11) imamo:

$$N_\varphi = -\frac{P_\varphi}{2\pi r_0 \sin \alpha} \quad N_v = \frac{r_0 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} Z \quad (22)$$

Kada izraz (21) unesemo u izraze (22) dobija se:

$$N_\varphi = -\frac{gZ}{2\cos^2 \alpha} \quad N_v = -r_2 Z = -gZ \tan^2 \alpha \quad (27)$$

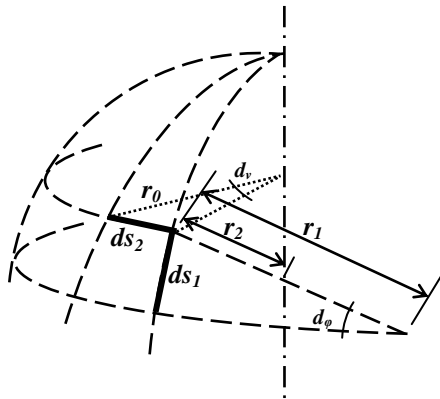
2.4 Rotaciono simetrična deformacija srednje površi rotacione ljuske

Dilatacije u pravcu φ i v (Sl.7) date su izrazima:

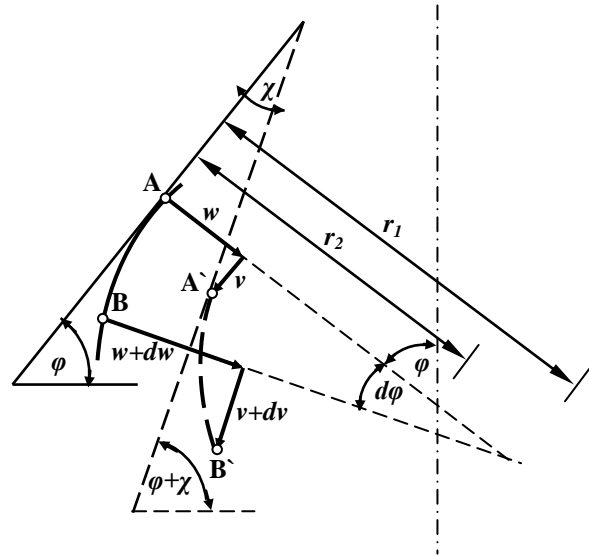
$$\varepsilon_\varphi = \frac{\Delta ds_1}{ds_1} \quad \varepsilon_v = \frac{\Delta ds_2}{ds_2} \quad (28)$$

gde su:

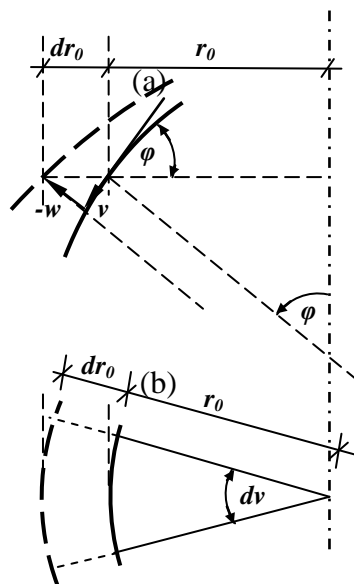
$$ds_1 = r_1 d\varphi \quad ds_2 = r_0 dv$$



Slika 7.



Slika 8.



Slika 9.

Tačka A na (Sl.8) pretrpeće pomeranje v u pravcu tangente na meridijalnu krivu i pomeranje w u pravcu normale. Tačka B , bliska tački A , pretrpeće pomeranje $v+dv$ i $w+dw$.

Usled razlike pomeranja tačaka A i B , u meridijalnoj ravni, pojaviće se dilatacija usled promene dužine elementa:

$$\varepsilon_{\varphi}^{(1)} = \frac{ds_1 + v + dv - ds_1 - v}{ds_1} = \frac{dv}{ds_1} = \frac{dv}{r_1 d\varphi} \quad (29)$$

Pod pretpostavkom da postoji samo pomeranje tačaka A i B u pravcu normale, onda se uz zanemarenje malih veličina višeg reda dobija:

$$\varepsilon_{\varphi}^{(2)} = \frac{\frac{ds_1}{r_1} (r_1 - w) - ds_1}{ds_1} = -\frac{w}{r_1} \quad (30)$$

pa je:

$$\varepsilon_{\varphi} = \varepsilon_{\varphi}^{(1)} - \varepsilon_{\varphi}^{(2)} = \frac{1}{r_1} \left(\frac{dv}{d\varphi} - w \right) \quad (31)$$

Takođe i element prstena ds_1 dobija novu dužinu usled povećanja poluprečnika dr , pa dilatacija ε_v iznosi (Sl.9a):

$$\varepsilon_v = \frac{dv(r_0 + dr_0) - r_0 dv}{r_0 dv} = \frac{dr_0}{r_0} \quad (32)$$

pri čemu je promena poluprečnika r_0 jednaka $dr_0 = v \cos \varphi - w \sin \varphi$, (Sl.9b), pa je:

$$\varepsilon_v = \frac{1}{r_0} (v \cos \varphi - w \sin \varphi) = \frac{1}{r_2} (v \operatorname{ctg} \varphi - w) \quad (33)$$

Međutim pored deformacije srednje površine, dolazi i do promene ugla nagiba φ tangente na meridijalnu krivinu koji obeležavamo sa χ .

Ugao nagiba tangente usled pomeranja v razlikovaće se od predhodnog za mali ugao

$$\chi^{(1)} = \frac{v}{r_1} \quad (34)$$

a usled razlike u pomeranju w doći će do još jedne promene tog ugla za veličinu:

$$\chi^{(2)} = \frac{dw}{ds_1} = \frac{dw}{r_1 d\varphi} \quad (35)$$

pa je ukupna veličina ugla χ jednaka:

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} = \frac{1}{r_1} \left(v + \frac{dw}{d\varphi} \right) \quad (36)$$

Pomeranje tačaka srednje površi, prema izrazima (32) i (33) iznosi:

$$\frac{dv}{d\varphi} - v \operatorname{ctg} \varphi - (r_1 \varepsilon_\varphi - r_2 \varepsilon_v) = 0 \quad (37)$$

a nakon integracije je:

$$v = \left[\int \frac{r_1 \varepsilon_\varphi - r_2 \varepsilon_v}{\sin \varphi} d\varphi + C \right] \sin \varphi$$

Posle unošenja vrednosti za ε_φ i ε_v , izražene putem presečnih sila N_φ i N_v , dobija se:

$$v = \left\{ \int \frac{1}{Eh} [N_\varphi r_1 + v r_2 - N_v r_2 + v r_1] \frac{d\varphi}{\sin \varphi} + C \right\} \sin \varphi \quad (32)$$

gde je C integraciona konstanta koja se određuje iz graničnih uslova.