1 Одређени интеграл

Посматрајмо функцију $f(x)$ дефинисану и ограничену на сегменту $[a,b]$. Овај сегмент се одређеним бројем тачака може поделити на неколико делова. Скуп подеоних тачака називамо *поделом* сегмента $[a,b]$ и означићемо га са P. Тако, на пример, нека $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ представља једну поделу сегмента $[a,b]$. На тај начин је $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

Уводећи ознаке $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k=1,2,\dots,n)$ и $\|P\| = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k$, број $\|P\|$ називамо *максималним кораком* поделе P. Очигледно је $n \geqslant \dfrac{b-a}{\|P\|}$. За сваки $k=1,2,\dots,n$ бирамо тачку $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ и образујемо *интегралну суму*

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

за функцију $f(x)$ у односу на поделу P и изабране тачке ξ_k $(k=1,2,\dots,n)$.

Дефиниција 1.1 *Функција $f(x)$ је **интеграбилна** на сегменту $[a,b]$, ако независно од поделе P сегмента $[a,b]$ и избора тачака ξ_k из сегмената $[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\dots,n)$, постоји јединствена гранична вредност*

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

*коју називамо **одређеним интегралом** функције $f(x)$.*

При свакој подели $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ сегмента $[a,b]$ могу се образовати **доња и горња Дарбуова сума**

$$D(P,f)=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k, \qquad G(P,f)=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k,$$

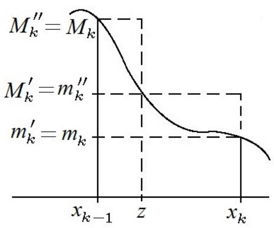
где је $m_k = \inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$ и $M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$. Притом је у произвољној тачки $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\dots,n)$ испуњено

$$D(P,f)\leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant G(P,f).$$

Дефиниција 1.2 *Каже се да је подела P_2 **финија** од поделе P_1, ако је свака тачка поделе P_1 истовремено и тачка поделе P_2, али не и обратно. Уколико су дате било које две поделе P_1 и P_2, тада је $P_3=P_1\cup P_2$ њихова заједничка финија подела.*

Нека за скупове A и B важи $A \subset B$, и нека је на скупу B дефинисана функција $f(x)$. Тада је $\inf\limits_{x\in B} f(x) \leqslant \inf\limits_{x\in A} f(x)$ и $\sup\limits_{x\in A} f(x) \leqslant \sup\limits_{x\in B} f(x)$, а из дефиниције произилази да је $D(P_1, f) \leqslant D(P_2, f)$ и $G(P_2, f) \leqslant G(P_1, f)$, ако је подела P_2 финија од поделе P_1. Наиме, довољно је узети да подела P_2 садржи у неком сегменту $[x_{k-1}, x_k]$ поделе P_1 бар једну тачку z. Тада за $m_k = \inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$, $m_k'' = \inf\limits_{x\in[x_{k-1},z]} f(x)$ и $m_k' = \inf\limits_{x\in[z,x_k]} f(x)$, добијамо

$$\begin{aligned}D(P_2, f) - D(P_1, f) &= m_k''(z - x_{k-1}) + m_k'(x_k - z) - m_k(x_k - x_{k-1})\\ &= (m_k'' - m_k)(z - x_{k-1}) + (m_k' - m_k)(x_k - z) \geqslant 0.\end{aligned}$$



На сличан начин, означавајући $M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$, $M_k'' = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},z]} f(x)$, $M_k' = \sup\limits_{x\in[z,x_k]} f(x)$, показали бисмо да је $G(P_1, f) - G(P_2, f) \geqslant 0$. На основу овога, у случају подела P_1 и P_2, за њихову заједничку финију поделу $P_3 = P_1 \cup P_2$, имамо

$$D(P_1, f) \leqslant D(P_3, f) \leqslant G(P_3, f) \leqslant G(P_2, f).$$

У складу с тим, изразе $D(P, f)$ и $G(P, f)$ можемо схватити и као скупове доњих и горњих Дарбуових сума, за све могуће поделе P. Притом је скуп горњих сума ограничен с доње стране скупом доњих сума и обратно, скуп доњих сума ограничен с горње стране скупом горњих сума. Стога постоји $I_* = \sup\limits_P D(P, f)$ и $I^* = \inf\limits_P G(P, f)$. Бројеве I_* и I^* називамо *доњим и горњим Дарбуовим интегралом* и важи $I_* \leqslant I^*$. Прецизније, $D(P, f) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant G(P, f)$.

Теорема 1.1 *Функција $f(x)$ је интеграбилна на сегменту $[a, b]$ ако и само ако за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји подела P, таква да за доњу и горњу Дарбуову суму важи $G(P, f) - D(P, f) < \varepsilon$.*

► Интеграбилност функције $f(x)$ подразумева да важи формула (1), то јест да за произвољно мали број $\varepsilon > 0$, постоји број $\delta > 0$, такав да је

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \int_a^b f(x)\,dx \Big| < \frac{\varepsilon}{2},$$

за произвољну поделу $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ сегмента $[a, b]$ за коју је $\|P\| < \delta$, где је $\|P\| = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k$, и ξ_k произвољна тачка из сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Претходна неједнакост еквивалентна је двострукој неједнакости

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Међутим, како је $m_k = \inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$, при датој подели ово је испуњено и за доњу и горњу Дарбуову суму, па добијамо

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f(x)\,dx \leqslant D(P,f) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant G(P,f) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Из (2), налазимо

$$G(P,f) - D(P,f) = G(P,f) - \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx - D(P,f) < \varepsilon.$$

Обратно, ако је $G(P,f) - D(P,f) < \varepsilon$, тада из $D(P,f) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant G(P,f)$ следи $I^* - I_* < \varepsilon$, односно, с обзиром да је $\varepsilon > 0$ произвољан број, доњи и горњи Дарбуов интеграл су једнаки, $I_* = I^*$, и означимо их са I. Значи, $D(P,f) \leqslant I \leqslant G(P,f)$, и, узимајући у обзир (2), закључујемо

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I\Big| < \varepsilon,$$

што значи да постоји гранична вредност интегралне суме за произвољну поделу P сегмента $[a,b]$, односно да је функција $f(x)$ интеграбилна. ◀

Услов постојања одређеног интеграла дат у претходој теореми може бити представљен у следећем облику.

Теорема 1.2 *Функција $f(x)$ је интеграбилна на сегменту $[a,b]$ ако и само ако за произвољно мале бројеве $\varepsilon > 0$ и $\sigma > 0$, постоји подела P, таква да је збир дужина подсегмената $[x_{k-1},x_k]$ на којима је $M_k - m_k \geqslant \varepsilon$ мањи од σ.*

▶ Нека је функција $f(x)$ интеграбилна. Тада за $\varepsilon > 0$ и $\sigma > 0$ постоји подела P, таква да је $\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < \varepsilon\sigma$. Уколико је $\sum\limits_{k'}(M_{k'} - m_{k'})\Delta x_{k'}$ део суме $\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k$ по индексима за које је $M_k - m_k \geqslant \varepsilon$, налазимо

$$\varepsilon\sigma > \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k \geqslant \sum_{k'}(M_{k'} - m_{k'})\Delta x_{k'} \geqslant \varepsilon \sum_{k'} \Delta x_{k'} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k'} \Delta x_{k'} < \sigma.$$

Обратно, претпоставимо да је $\sum\limits_{k'} \Delta x_{k'} < \sigma$. Уколико са $\sum\limits_{k''}(M_{k''} - m_{k''})\Delta x_{k''}$ означимо део суме $\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k$ по индексима за које је $M_k - m_k < \varepsilon$, добијамо

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k'}(M_{k'} - m_{k'})\Delta x_{k'} + \sum_{k''}(M_{k''} - m_{k''})\Delta x_{k''} < \omega\sigma + \varepsilon(b-a),$$

где је $\omega = M - m$, за $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, што значи да је функција $f(x)$ интеграбилна. ◀

2 Израчунавање одређеног интеграла

Знајући да је нека функција интеграбилна, њен интеграл можемо израчунати непосредно, на основу дефиниције, користећи интегралну суму. Наиме, поделимо сегмент $[a, b]$ на n једнаких делова, стављајући $h = \dfrac{b-a}{n}$. Можемо узети да је ξ_k крајње десна тачка подсегмента $[x_{k-1}, x_k]$, за који је $\Delta x_k = h$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, интегрална сума $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ постаје $h\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$. С обзиром да за интеграбилну функцију, независно од начина поделе и избора тачака у подсегментима, интегрална сума тежи једном истом броју, интегралу, тако ће и за ову интегралну суму важити

$$\lim_{h\to 0} h\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Пример 2.1 Функција $\sin x$ је непрекидна за свако $x \in \mathbb{R}$, па је непрекидна и на сегменту $[0, \pi]$, и на свим његовим подсегментима $[x_{k-1}, x_k]$, на које га, на проиозвољан начин, делимо. Поделимо га на n једнаких делова, означавајући $h = \Delta x_k = \pi/n$. У складу с тим, примењујући Канторову теорему, закључујемо да, за произвољно мали позитиван број ε, постоји довољно фина подела, таква да је $M_k - m_k < \dfrac{\varepsilon}{\pi}$, па је је $\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < \varepsilon$, то јест функција $\sin x$ је интеграбилна на овом сегменту. За тачке ξ_k одаберимо крајеве подсегмената $[x_{k-1}, x_k]$, дакле $\xi_k = x_k = \frac{k\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, и образујемо интегралну суму

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n}\cdot\Delta x_k = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

Користећи адициону формулу којом се производ претвара у разлику, налазимо

$$\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2n}}\Big(\cos(2k-1)\frac{\pi}{2n} - \cos(2k+1)\frac{\pi}{2n}\Big).$$

На тај начин, добијамо

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}}\Big(\cos\frac{\pi}{2n} - \cos(2n+1)\frac{\pi}{2n}\Big) = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\cos\frac{\pi}{2n}.$$

Одавде је

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\cos\frac{\pi}{2n} = 2.$$

Теорема 2.1 *Ако је функција $f(x)$ интеграбилна на сегменту $[a,b]$ и постоји диференцијабилна функција $F(x)$ на $[a,b]$, таква да је $F'(x) = f(x)$, тада важи* ***Њутн-Лајбницова формула***

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

► Нека је $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ произвољна подела сегмента $[a,b]$. На основу Лагранжове теореме о средњој вредности, на подсегменту $[x_{k-1}, x_k]$ постоји тачка ξ_k, таква да је

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{3}$$

С обзиром да је $F'(x) = f(x)$, имамо

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n}(F(x_k) - F(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

што представља инегралну суму функције $f(x)$. Како је функција $f(x)$ интеграбилна, гранична вредност ове суме, када $\|P\| \to 0$, не зависи од избора тачака ξ_k из подсегмената $[x_{k-1}, x_k]$, и можемо бирати управо оне из Лагранжове формуле (3), па следи

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

одакле се непосредно добија тражена формула. ◄

3 Особине одређеног интеграла

1° Функција $f(x)$ интеграбилна на сегменту $[a,b]$, ограничена је на том сегменту.

► Претпоставимо супротно, то јест да је функција $f(x)$ интеграбилна, али да је неограничена. Из чињенице да постоји јединствена гранична вредност (1), независно од поделе P сегмента $[a,b]$ и избора тачака ξ_k из сегмената $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, следи да је скуп свих интегралних сума ограничен. Како је функција $f(x)$ неограничена, сигурно постоји неки сегмент $[x_{m-1}, x_m]$ на коме је она неограничена, тако да тачку $\xi_m \in [x_{m-1}, x_m]$ можемо увек изабрати тако да сабирак $f(\xi_m)\Delta x_m$ буде већи од ма каквог унапред задатог великог броја, па ће самим тим читава интегрална сума бити неограничена. Међутим, то није могуће, јер у скупу свих интегралних сума нема неограничених. ◄

Напомињемо да је ограниченост функције $f(x)$ неопходан услов да би она била интеграбилна, али није свака ограничена функција интеграбилна.

Пример 3.1 Дирихлеова функција $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ ограничена је на сегменту $[a,b]$, али није интеграбилна. Наиме, при произвољној подели P сегмента $[a,b]$, горња Дарбуова сума је $b-a$, а доња је 0. То значи да је разлика горње и доње Дарбуове суме увек $b-a$, независно од поделе P сегмента $[a,b]$ и избора тачака ξ_k из сегмената $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Дакле, на основу Теореме 1.1, Дирихлеова функција није интеграбилна.

2° *Функција $f(x)$ интеграбилна на сегменту $[a,b]$, интеграбилна је и на сегменту $[a_1, b_1] \subset [a,b]$.*

► Нека је дат произвољан позитиван број ε. Како је $f(x)$ интеграбилна функција на сегменту $[a,b]$, постоји подела P сегмента $[a,b]$, таква да је $G(P,f) - D(P,f) < \varepsilon$. Нека је P_1 подела истог сегмента, која укључује тачке a_1 и b_1. Са P'_1 означићемо поделу сегмента $[a_1, b_1]$ која је формирана од тачака поделе P_1. Стога следи неједнакост

$$G(P'_1, f) - D(P'_1, f) \leqslant G(P_1, f) - D(P_1, f), \tag{4}$$

јер су $D(P'_1, f)$ и $G(P'_1, f)$ доња и горња Дарбуова сума функције $f(x)$ на сегменту $[a_1, b_1]$, а $D(P_1, f)$ и $G(P_1, f)$ доња и горња Дарбуова сума функције $f(x)$ на сегменту $[a,b]$, па је сума $D(P'_1, f)$ садржана у суми $D(P_1, f)$, а сума $G(P'_1, f)$ у суми $G(P_1, f)$.

С друге стране, како је $P \subset P_1$, знамо да важи

$$D(P,f) \leqslant D(P_1, f) \leqslant G(P_1, f) \leqslant G(P, f),$$

одакле је

$$G(P_1, f) - D(P_1, f) \leqslant G(P,f) - D(P,f) < \varepsilon.$$

На основу (4), следи $G(P'_1, f) - D(P'_1, f) < \varepsilon$, што значи да је функција $f(x)$ интеграбилна и на сегменту $[a_1, b_1]$. ◄

3° *Нека је $a < c < b$. Тада, ако је функција $f(x)$ интеграбилна на сегментима $[a,c]$ и $[c,b]$, она је интерграбилна на сегменту $[a,b]$, при чему је*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

► Нека је ε произвољан позитиван број, док су P_1 и P_2 редом поделе сегмената $[a,c]$ и $[c,b]$. Тада је $P = P_1 \cup P_2$ подела сегмента $[a,b]$. С обзиром да је функција интеграбилна на сегментима $[a,c]$ и $[c,b]$, поделе P_1 и P_2 можемо изабрати тако да је

$$G(P_1, f) - D(P_1, f) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad G(P_2, f) - D(P_2, f) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Очигледно важи

$$G(P,f) - D(P,f) = G(P_1, f) - D(P_1, f) + G(P_2, f) - D(P_2, f) < \varepsilon,$$

па закључујемо да је функција $f(x)$ интеграбилна на сегменту $[a,b]$.

Интегралну суму у односу на поделу P можемо представити у облику збира интегралних сума у односу на поделе P_1 и P_2

$$\sum_P f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{P_1} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{P_2} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Прелазећи на граничну вредност леве стране када $\|P\| \to 0$, очигледно $\|P_1\| \to 0$ и $\|P_2\| \to 0$, па добијамо

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \ ◀$$

4° *Ако су функције $f(x)$ и $g(x)$ интеграбилне на сегменту $[a,b]$, тада је и функција $f(x)+g(x)$ интеграбилна на сегменту $[a,b]$ и*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

▶ При произвољној подели сегмента $[a,b]$ и произвољном избору тачака ξ_k из сегмената $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, имамо

$$\sum_{k=1}^n (f(\xi_k)+g(\xi_k))\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^n g(\xi_k)\Delta x_k.$$

С обзиром да су функције $f(x)$ и $g(x)$ интеграбилне на сегменту $[a,b]$, постоје граничне вредности интегралних сума на десној страни када $\|P\| \to 0$. Зато постоји и гранична вредност интегралне суме на левој страни када $\|P\| \to 0$, одакле следи тврђење. ◀

5° *Ако је функција $f(x)$ интеграбилна на сегменту $[a,b]$ и c константа, тада је и функција $cf(x)$ интеграбилна на сегменту $[a,b]$ и*

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x).$$

▶ Тврђење непосредно следи из једнакости

$$\int_a^b cf(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^n cf(\xi_k)\Delta x_k = c \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k = c\int_a^b f(x)\,dx. \ ◀$$

6° *Ако су функције $f(x)$ и $g(x)$ дефинисане на сегменту $[a,b]$, при чему је $f(x)$ интеграбилна на $[a,b]$, а $g(x)$ се разликује од $f(x)$ у коначном броју тачака, тада је и функција $g(x)$ интеграбилна на $[a,b]$ и*

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

► Функција $u(x) = g(x) - f(x)$ је, осим у коначном броју тачака $t_1, t_2, \ldots, t_q$, на сегменту $[a, b]$ једанака нули. Нека је $M = \max\{u(t_1), u(t_2), \ldots, u(t_q)\}$. Свака од тачака $t_1, t_2, \ldots, t_q$ може бити и подеона, и, као таква, поклапа се са неком од тачака ξ_k, значи да се може наћи истовремено у највише два сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, па је број сегмената који садржи ове тачке највише $2q$. У осталим сегментима је $u(x) = 0$. За произвољно мали број $\varepsilon > 0$ и произвољну поделу $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ сегмента $[a, b]$, за коју је $\|P\| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2qM}$, и произвољан избор тачака ξ_k из сегмената $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, имамо

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)\Delta x_k\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |u(\xi_k)|\Delta x_k \leqslant 2qM\|P\| < 2qM\delta = \varepsilon.$$

То значи да је функција $u(x)$ интеграбилна и да је $\displaystyle\int_a^b u(x)\,dx = 0$, одакле следи да је функција $g(x) = u(x) + f(x)$ интеграбилна на сегменту $[a, b]$, и важи

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \text{ ◄}$$

Уочимо да одређени интеграл функције на сегменту $[a, b]$ постоји и онда када из њега изоставимо коначан број тачака, а функцији у њима доделимо вредности на произвољан начин, јер, на основу управо доказане особине, интеграл не зависи од вредности које подинтегрална функција узима у тим тачкама.

7° *Ако је функција $f(x)$ интеграбилна на $[a, b]$ и $f(x) \geqslant 0$, тада је*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

► Како је $f(x) \geqslant 0$, за произвољну поделу P и произвољан избор тачака ξ_k из сегмената $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, следи $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \geqslant 0$. Преласком на граничну вредност $\|P\| \to 0$, добија се тврђење. ◄

8° *Ако су функције $f(x)$ и $g(x)$ интеграбилне на $[a, b]$, при чему $f(x) \geqslant g(x)$, тада је*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

► Функција $f(x) - g(x)$ је, на основу особине **3°**, интеграбилна на $[a, b]$. Како је, према услову, $f(x) - g(x) \geqslant 0$, применом особине **6°** добијамо тврђење. ◄

На основу овога, каже се да одређен интеграл поседује особину *монотоније*.

9° *Ако је функција $f(x)$ интеграбилна на $[a,b]$, интеграбилна је и функција $|f(x)|$, при чему је*

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

► Нека су x' и x'' тачке из подсегмента $[x_{k-1},x_k]$, за $k=1,2,\dots,n$. Имамо

$$|f(x'')| = |f(x'')-f(x')+f(x')| \leqslant |f(x'')-f(x')|+|f(x')|$$

односно

$$|f(x'')|-|f(x')| \leqslant |f(x'')-f(x')| \leqslant M_k-m_k,$$

где су M_k и m_k супремум, односно инфимум функције $f(x)$ на $[x_{k-1},x_k]$. Нека су M_k^* и m_k^* супремум, односно инфимум функције $|f(x)|$ на сегменту $[x_{k-1},x_k]$. Како неједнакост $|f(x'')|-|f(x')| \leqslant M_k-m_k$ важи за произвољне тачке $x',x''\in[x_{k-1},x_k]$, следи

$$M_k^*-m_k^* \leqslant M_k-m_k.$$

Стога, за произвољно $\varepsilon>0$ постоји $\delta>0$, такав да је за поделу $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ сегмента $[a,b]$, за коју је $\|P\|<\delta$, важи

$$\sum_{k=1}^n (M_k^*-m_k^*)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^n (M_k-m_k)\Delta x_k < \varepsilon,$$

што значи да је функција $|f(x)|$ интеграбилна. На основу особине монотоније код одређеног интеграла, добијамо

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|\,dx \;\Rightarrow\; -\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \;◄$$

10° *Ако је функција $f(x)$ интеграбилна на $[a,b]$, тада је и функција $f^2(x)$ интеграбилна на том сегменту.*

► Као интеграбилна, функција $f(x)$ је ограничена на $[a,b]$, па постоји M, при чему је $|f(x)|\leqslant M$. С обзиром да је $f^2(x'')-f^2(x') = (f(x'')-f(x'))(f(x'')+f(x'))$ за било које две тачке x' и x'' из $[a,b]$, а знајући да је $|f(x'')+f(x')| \leqslant |f(x'')|+|f(x')|$, добијамо

$$f^2(x'')-f^2(x') \leqslant |f^2(x'')-f^2(x')| \leqslant 2M|f(x'')-f(x')|. \tag{5}$$

Нека је $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ подела сегмента $[a,b]$. Означимо са M_k^* и m_k^* супремум, односно инфимум функције $f^2(x)$ на подсегменту $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\dots,n$. Како је $|f(x'')-f(x')| \leqslant M_k-m_k$, за било које две тачке x' и x'' из $[x_{k-1},x_k]$, где су M_k и m_k супремум, односно инфимум функције $f(x)$ на $[x_{k-1},x_k]$, на основу (5) имамо $f^2(x'')-f^2(x') \leqslant 2M(M_k-m_k)$, а самим тим је и $M_k^*-m_k^* \leqslant 2M(M_k-m_k)$.

Како је функције $f(x)$ интеграбилна, за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји такво $\delta > 0$, да је $\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = G(P, f) - D(P, f) < \varepsilon/2M$, за поделу P коју је $\|P\| < \delta$, па закључујемо да је

$$G(P, f^2) - D(P, f^2) = \sum_{k=1}^{n}(M_k^* - m_k^*)\Delta x_k \leqslant 2M\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < 2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$$

одакле следи интеграбилност функције $f^2(x)$. ◄

Међутим, интеграбилност функције $f^2(x)$ последица је општије особине.

11° *Ако је функција $f(x)$ интеграбилна на $[a, b]$, при чему је $m \leqslant f(x) \leqslant M$, и функција $g(y)$ непрекидна на $[m, M]$. Тада је функција $h(x) = g(f(x))$ интеграбилна на $[a, b]$.*

► Нека су $\varepsilon > 0$ и $\sigma > 0$ произвољно мали бројеви. На основу Канторове теореме, постоји $\eta > 0$, такав да је $|g(y) - g(z)| < \varepsilon$, уколико је $|y - z| < \eta$ за $y, z \in [m, M]$. Како је функција $f(x)$ интеграбилна на $[a, b]$, за σ и η постоји $\delta > 0$, такав да за поделу $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ сегмента $[a, b]$, за коју је $\|P\| < \delta$, важи

$$G(P, f) - D(P, f) < \eta\sigma \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < \eta\sigma, \tag{6}$$

где су M_k и m_k редом, супремум, односно инфимум функције $f(x)$ на подсегменту $[x_{k-1}, x_k]$. Нека су M_k^* и m_k^* супремум, односно инфимум функције $g(y)$ на $[m_k, M_k]$ за $k = 1, 2, \dots, n$. Сврстајмо бројеве $1, 2, \dots, n$ у подскупове A и B, тако да $k \in A$, ако је $M_k - m_k < \eta$ и $k \in B$, ако је $M_k - m_k \geqslant \eta$. У првом случају следи $M_k^* - m_k^* < \varepsilon$, а у другом имамо процену $M_k^* - m_k^* \leqslant 2K$, где је $K = \sup\limits_{m\leqslant y\leqslant M}|g(y)|$. Из (6) следи

$$\eta\sigma > \sum_{k\in B}(M_k - m_k)\Delta x_k \geqslant \sum_{k\in B}\eta\Delta x_k \quad\Rightarrow\quad \sum_{k\in B}\Delta x_k < \sigma.$$

Дакле, за призвољно мале позитивне бројеве ε и σ, разлика горње и доње Дарбуове суме функције $h(x) = g(f(x))$, постоји довољно фина подела P сегмента $[a, b]$, таква да је

$$G(P, h) - D(P, h) = \sum_{k\in A}(M_k^* - m_k^*)\Delta x_k + \sum_{k\in B}(M_k^* - m_k^*)\Delta x_k < \varepsilon\,(b - a) + 2K\sigma,$$

што значи да је функција $h(x)$ интеграбилна на $[a, b]$. ◄

Дакле, узимајући $g(x) = x^2$, из интеграбилности функције $f(x)$, следи интеграбилност функције $f^2(x)$. Напомињемо да ако се услов непрекидности за функцију $g(y)$ замени условом интеграбилности, ова особина престаје да важи.

Пример 3.2 За функцију $g(y)$ дефинисану са $g(0) = 0$ и $g(y) = 1$ за $y \neq 0$ и Риманову функцију $f(x)$ из Примера 4.1, имамо $g(f(x)) = 0$ када је x ирационалан број и $g(f(x)) = 1$ када је x рационалан број. Обе функције g и f интеграбилне су, док функција $g(f(x))$, на основу Примера 3.1, није интегрбилна.

12° *Ако су функције $f(x)$ и $g(x)$ интеграбилне на $[a, b]$, тада је интеграбилан и њихов производ $f(x)g(x)$ на $[a, b]$.*
► Како је

$$4f(x)g(x) = (f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2,$$

тврђење непосредно следи применом особина о интеграбилности збира, разлике и квадрата интеграбилних функција. ◄

13° ***Теорема о средњој вредности.*** *Нека су функције $f(x)$ и $g(x)$ интеграбилне на $[a, b]$, при чему је $m \leqslant f(x) \leqslant M$ и $g(x) \geqslant 0$. Тада постоји број $\mu \in [m, M]$, такав да је $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$.*
► Како је $m \leqslant f(x) \leqslant M$ и $g(x) \geqslant 0$, имамо

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

Из интеграбилности функција $f(x)$ и $g(x)$ произилази интеграбилност њиховог производа, па из претходне двоструке неједнакости, на основу особине **7°**, следи

$$m \int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M \int_a^b g(x)dx.$$

Уколико је $\int_a^b g(x) = 0$, добија се $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, па формула важи за сваки μ. За $\int_a^b g(x) > 0$, налазимо

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}. \ ◄$$

4 Класе интеграбилних функција

Теорема 4.1 *Функција $f(x)$ непрекидна на сегменту $[a, b]$, интеграбилна је на том сегменту.*

► С обзиром да је $f(x)$ непрекидна на сегменту $[a,b]$, на основу Канторове теореме, за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, такво да је $|f(x) - f(t)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ кад год је $|x-t| < \delta$. Изаберимо сада поделу P, такву да је $\|P\| < \delta$. Тада је $M_k - m_k < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Следи,

$$G(P,f) - D(P,f) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a}\,(b-a) = \varepsilon,$$

што значи да је $f(x)$ интеграбилна функција. ◄

Последица 4.1 *Нека је функција $f(x)$ непрекидна на $[a,b]$. Тада постоји тачка $\xi \in [a,b]$, таква да је $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.*

► Према претходној теореми, функција $f(x)$ је интеграбилна, а за $g(x) = 1$, из Теореме о средњој вредности, следи

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

На основу Вајерштрасове теореме непрекидна функција $f(x)$ достиже на сегмнту $[a,b]$ најмању и највећу вредност. Нека је $m = \inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$ и $M = \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$. Као непрекидна, функција $f(x)$ узима све вредности између m и M. Међутим, како је $m \leqslant \mu \leqslant M$, то постоји $\xi \in [a,b]$, такво да је $\mu = f(\xi)$. ◄

Теорема 4.2 *Монотона и ограничена функција $f(x)$ на $[a,b]$, интеграбилна је на $[a,b]$.*

► Претпоставимо да је $f(x)$ монотоно растућа функција. Нека је дато $\varepsilon > 0$ и ставимо $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\omega}$, где је $\omega = f(b) - f(a)$. Изаберимо поделу $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, тако да је $\|P\| < \delta$. Тада је $\Delta x_k < \delta$, $M_k = f(x_k)$, $m_k = f(x_{k-1})$ и добијамо

$$G(P,f) - D(P,f) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < \delta\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta\omega = \varepsilon,$$

то јест $G(P,f) - D(P,f) < \varepsilon$, што значи да је функција $f(x)$ интеграбилна. У случају монотоно опадајуће функције, доказ је сличан. ◄

Теорема 4.3 *Функција $f(x)$ ограничена на сегменту $[a,b]$ која има коначан број тачака прекида прве врсте, интеграбилна је.*

► Размотримо најпре случај када функција $f(x)$ има јединствену тачку прекида, при чему је она у једном од крајева сегмента $[a,b]$. Ако је $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, означимо $\omega = M - m$. Изаберимо тачку $x_1 \in (a,b)$, тако да $x_1 - a < \varepsilon/2\omega$, где је ε произвољан позитиван број.

Функција $f(x)$ је непрекидна на сегменту $[x_1,b]$, па је на њему интеграбилна. То значи да постоји подела $P_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ сегмента $[x_1,b]$, таква да је

$$\sum_{k=2}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ $(x_0 = a)$ подела сегмента $[a,b]$. Како је $M_1 - m_1 < \omega$, функција $f(x)$ је интеграбилна, јер је

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k &= (M_1 - m_1)\Delta x_1 + \sum_{k=2}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k\\ &= (M_1 - m_1)(x_1 - a) + \sum_{k=2}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < \omega\frac{\varepsilon}{2\omega} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Посматрајмо сада општи случај. Нека се тачке прекида $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_p$ функције $f(x)$ налазе у интервалу (a,b). Изаберимо тачке $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p+1}$, тако да важи $a < \eta_1 < \xi_1 < \eta_2 < \xi_2 < \cdots < \eta_p < \xi_p < \eta_{p+1} < b$. На сваком од сегмената $[a,\eta_1]$, $[\eta_1,\xi_1]$, $[\xi_1,\eta_2]$, $\dots$, $[\xi_p,\eta_{p+1}]$, $[\eta_{p+1},b]$ функција $f(x)$ има највише једну тачке прекида и зато је, на основу првог дела доказа, на сваком од њих интеграбилна, а самим тим интеграбилна је на читавом сегменту $[a,b]$. ◄

Међутим, функција може бити интеграбилна, иако скуп тачака прекида није коначан.

Пример 4.1 Раније смо, у Примеру **??**, разматрали непрекидност Риманове функције на сегменту $[0,1]$,

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q},\ x = \dfrac{p}{q} \in [0,1],\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\\ 0,\ x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}\end{cases}$$

и показали да она има прекид у свим рационалним тачкама, дакле, скуп тачака прекида је пребројив.

За произвољно мали $\varepsilon > 0$ одређујемо природан број N, тако да је $\dfrac{1}{N} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, затим број δ, такав да је $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{2N^2}$. Нека је $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ подела сегмента $[0,1]$ за коју је $\|P\| < \delta$, где је $\|P\| = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k$. С обзиром на то да, при свакој подели P, у било ком подсегменту $[x_{k-1}, x_k]$ има ирационалних бројева, уочавамо да је $m_k = \inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} R(x) = 0$, па је доња Дарбуова сума једнака нули! Стога посматрамо само горњу Дарбуову суму. Све подсегменте $[x_{k-1}, x_k]$ распоређујемо у две класе.

(а) У првој класи су подсегменти који садрже рационалне бројеве $\dfrac{p}{q}$ за чије имениоце важи $1 < q \leqslant N$, дакле, за сваки q, највише је $q-1$ таквих бројева, па их укупно не може бити више од $1+2+\cdots+N-1 = \frac{1}{2}(N-1)N < N^2$, самим тим максималан број подсегмената није већи од N^2. Притом $1 > \dfrac{1}{q} \geqslant \dfrac{1}{N}$, па је $M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} R(x) \leqslant 1$.

(б) У другој класи су подсегменти који садрже бројеве $\dfrac{p}{q}$ са имениоцима $q > N$, па је $\dfrac{1}{q} < \dfrac{1}{N}$. Тада је $M_k \leqslant \dfrac{1}{N}$.

Горњу Дарбуову суму $\sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$, представљамо као два збира, према томе којој класи припадају подсегменти, и као резултат добијамо

$$\sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum_{q\leqslant N} M_k \Delta x_k + \sum_{q>N} M_k \Delta x_k < N^2\delta + \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

што значи да је Риманова функција интеграбилна на $[0,1]$, при чему је $\displaystyle\int_0^1 R(x)\,dx = 0$.