

1 Одређени интеграл с променљивим границама

Показали смо да је интеграбилна функцију $f(x)$ на сегменту $[a, b]$, интеграбилна и на сваком његовом подсегменту. Значи, за тачку $x \in [a, b]$ функција је интеграбилна на сегменту $[a, x]$. У вези с тим је и следећа

Теорема 1.1 *Нека је функција $f(x)$ интеграбилна на сегменту $[a, b]$ и*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Тада је функција $F(x)$ непрекидна на $[a, b]$. Ако је функција $f(x)$ непрекидна на сегменту $[a, b]$, тада је функција $F(x)$ диференцијабилна на сегменту $[a, b]$ и важи $F'(x) = f(x)$.

► Како је функција $f(x)$ интеграбилна на сегменту $[a, b]$, она је ограничена, па постоји број $M > 0$, такав да је $|f(x)| \leq M$, $a \leq x \leq b$, и x_0 произвољна тачка из $[a, b]$. Тада, за $a \leq x_0 < x \leq b$, имамо

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)| dt \leq M(x - x_0) \leq M|x - x_0|.$$

За произвољно $\varepsilon > 0$ је $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$ кад год је $|x - x_0| < \varepsilon/M$, чиме је доказана непрекидност функције $F(x)$ у произвољној тачки $x_0 \in [a, b]$.

Функција $F(x)$ је диференцијабилна, ако постоји гранична вредност

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

На основу непрекидности функције $f(x)$ и Теореме о средњој вредности за одређене интеграле, постоји број $\xi \in (x_0, x)$, такав да је интеграл на десној страни једнак $f(\xi)$, па је

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(\xi).$$

Како је функција $f(x)$ непрекидна, и $\xi \rightarrow x_0$ када $x \rightarrow x_0$, гранична вредност израза на десној страни једнака је $f(x_0)$, па постоји гранична вредност израза на левој страни и једнака је $f(x_0)$. На тај начин, добија се

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x_0} f(\xi) = f(x_0). \quad \blacktriangleleft$$

За функцију $f(x)$ непрекидну на сегменту $[a, b]$ увек постоји диференцијабилна функција $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, таква да је $F'(x) = f(x)$, па Њутн-Лајбницова формула увек важи за непрекидне функције, јер су оне интеграбилне.

1.1 Приближно израчунавање интеграла

С обзиром на то да се израчунавање одређених интеграла своди на одређивање примитивне функције, поставља се питање како да поступимо у случају функције чија примитивна функција се не може изразити у коначном облику, на шта смо раније указали приликом решавања неодређених интеграла. Степени редови у том погледу играју значајну улогу. Наредна теорема нам омогућује да приближно, с унапред одређеном тачношћу, израчунамо интеграл функције чију примитивну функцију није могуће наћи у коначном облику. У том циљу, функцију је замењујемо степеним редом.

Теорема 1.2 *Степени ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ може се интегралити члан по члан у свом интервалу конвергенције. Другим речима, за $[a, b] \subset (-R, R)$, где је R полупречник конвергенције, важи*

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (b^{k+1} - a^{k+1}).$$

► Лако се показује да оба реда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ имају исти полупречник конвергенције. Степени ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ дефинише непрекидну функцију $f(x)$, па је она интегрална, на основу Теореме о интегралности функције на сегменту, а из непрекидности функције $f(x)$, према Теорему 1.1, следи диференцијабилност функције $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ на $[a, b]$, при чему је $F'(x) = f(x)$. Замењујући подинтегралну функцију $f(t)$ степеним редом који је дефинише, добијамо

$$F'(x) = \left(\int_a^x \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k dt \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x).$$

Степени ред се може диференцирати члан по члан, тако да налазимо

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^x a_k t^k dt \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_a^x a_k t^k dt \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Функције које имају исти извод разликују се, евентуално, само за константу. Значи,

$$\int_a^x \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^x a_k t^k dt + C \Leftrightarrow \int_a^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x^{k+1} - a^{k+1}) + C.$$

функција $F(x)$ непрекидна је у тачки $x = a$ и $F(a) = 0$. Ред на десној страни дефинише непрекидну функцију $g(x)$, а њена вредност у тачки $x = a$ такође је

једнака нули, одакле је $C = 0$. Функције $F(x)$ и $g(x)$ непрекидне су у и тачки $x = b$, а одатле одмах следи тврђење теореме. ◀

Дакле, вредност интеграла, после замене подинтегралне функције степеним редом, добија се у облику бројевног реда, чију суму можемо израчунати приближно с унапред задатом грешком, узимајући коначан број сабирака.

Пример 1.1 Интеграл $\int_0^{1/2} e^{-x^2} dx$ се не може израчунати у коначном облику, јер се примитивна функција подинтегралне функције e^{-x^2} не може наћи у коначном облику. Функцију e^{-x^2} замењујемо Маклореновим степеним редом, примењујемо претходну теорему и добијамо

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2} dx = \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{1/2} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (2n+1) 2^{2n+1}}.$$

Да бисмо дати интеграл израчунали с тачношћу до 0,0001, користимо чињеницу да је апсолутна вредност остатка мања од првог занемареног члана

$$|R_n| < \frac{1}{(n+1)! (2n+3) 2^{2n+3}} < 0,0001.$$

Тако налазимо да је $n = 3$, што значи да парцијална сума $S_3 = 0,461272$ реда на десној страни даје приближну вредност која одступа мање од 0,0001 од тачне вредности интеграла која износи 0,461281.

Пример 1.2 На сличан начин као и претходном примеру може се израчунати интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ само приближно, с унапред захтеваном грешком, јер се примитивна функција подинтегралне функције не може наћи у коначном облику. Израчунаћемо на овај начин дати интеграл с тачношћу до 0,0001. Замењујући функцију $\sin x$ Маклореновим редом, имамо

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

Даље је

$$|R_n| < \frac{1}{(2n+3)(2n+3)!} < 0,0001.$$

Налазимо $n = 2$, а то значи да значи да парцијална сума $S_2 = 0,946111$ реда на десној страни даје приближну вредност која одступа мање од 0,0001 од тачне вредности интеграла која износи 0,946083. Уочимо да је

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx - \sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!} \right| = 0,0000280407.$$

2 Општи методи израчунавања одређеног интеграла

Један вид израчунавања одређеног интеграла заснива се на налажењу примитивне функције. Други вид заснива се на развоју функције у степени ред, уколико не постоји примитивна функција у коначном облику. Најпре разматрамо два општа метода. Први је **метод парцијалне интеграције**.

Теорема 2.1 Нека су функције $u(x)$ и $v(x)$ интеграбилне на сегменту $[a, b]$. Тада је

$$\int_a^b u dv = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

► Из $d(uv) = u'(x)v(x) dx + u(x)v'(x) dx$ следи

$$\int_a^b (u(x)v(x))' dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx,$$

одакле се непосредно добија тражена формула за израчунавање одређеног интеграла методом парцијалне интеграције. ◀

Пример 2.1 За израчунавање неодређеног интеграла $S_n = \int \sin^n x dx$, извели смо рекурзивну релацију $S_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} S_{n-2}$ применом парцијалне интеграције. Ову формулу користимо да бисмо израчунали одређен интеграл $S_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$. Тако налазимо

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n} S_{n-2} = \frac{n-1}{n} S_{n-2}.$$

Како је $S_0 = \frac{\pi}{2}$ и $S_1 = 1$, добијамо

$$S_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad S_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}. \quad (1)$$

Одређени интеграл се често лакше израчунава **методом смене**.

Теорема 2.2 Ако је функција $f(x)$ интеграбилна на $[a, b]$, а функција $x = \varphi(t)$ обострано једнозначно пресликава $[\alpha, \beta]$ на $[a, b]$ и има интеграбилан извод на $[\alpha, \beta]$, тада је функција $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интеграбилна на $[\alpha, \beta]$ и притом је

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

► Како је $f(x)$ интеграбилна на $[a, b]$, она је ограничена, па постоји број K , такав да је $|f(x)| \leq K$. С обзиром да $\varphi(t)$ обострано једнозначно пресликава $[\alpha, \beta]$ на $[a, b]$, она је непрекидна и строго монотона $[\alpha, \beta]$. Нека је $\varphi'(t) > 0$. Подели $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ сегмента $[a, b]$ одговара подела $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ сегмента $[\alpha, \beta]$ и обратно, при чему је $x_k = \varphi(t_k)$ и $\xi_k = \varphi(\tau_k)$. ($k = 0, 1, \dots, n$). На основу Лагранжове теореме, $x_k - x_{k-1} = \varphi'(\theta_k)(t_k - t_{k-1})$, за неко $\theta_k \in (t_{k-1}, t_k)$. Извод $\varphi'(t)$ је интеграбилан, па је ограничен и постоји број L , такав да је $0 < \varphi'(t) \leq L$ за $t \in [\alpha, \beta]$, тако да је $\Delta x_k \leq L \Delta t_k$. На основу тога, за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ и произвољна подела $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ сегмента $[\alpha, \beta]$, таква да је $\|T\| < \delta/L$, при чему је $\|P\| < \delta$ за одговарајућу поделу $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ сегмента $[a, b]$, тако да истовремено важи

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta t_k < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad (2)$$

где смо означили $m_k = \inf_{t \in [t_{k-1}, t_k]} \varphi'(t)$ и $M_k = \sup_{t \in [t_{k-1}, t_k]} \varphi'(t)$. С друге стране, због $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, имамо

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k - \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k)) \varphi'(\tau_k) \Delta t_k = \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k)) (\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)) \Delta t_k.$$

Означимо суму на десној страни претходне једнакости са S . Како је $|f(x)| \leq K$ и $|\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)| \leq M_k - m_k$, на основу (2), налазимо

$$|S| \leq K \sum_{k=1}^n |\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)| \Delta t_k \leq K \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta t_k < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

На тај начин, добијамо

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k)) \varphi'(\tau_k) \Delta t_k \right| &\leq \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| \\ &+ \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k - \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k)) \varphi'(\tau_k) \Delta t_k \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 2.2 Да бисмо израчунали интеграл $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$, уводимо нову променљиву $t = \sqrt{e^x - 1}$, за коју је $t = 0$ када је $x = 0$ и $t = 1$ када је $x = \ln 2$. Налазимо да је $x = \varphi(t) = \ln(1 + t^2)$ непрекидна функција на $[0, 1]$, чији извод $\varphi'(t) = \frac{2t}{1 + t^2} > 0$ је такође непрекидна функција, па је као такав интеграбилан на $[0, 1]$. На тај начин је

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \int_0^1 \frac{2t^2}{1 + t^2} dt = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + t^2} \right) dt = (t - \arctg t) \Big|_0^1 = \frac{4 - \pi}{2}.$$

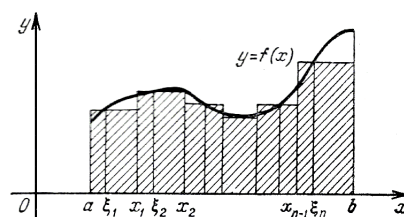
3 Примене одређеног интеграла

У геометријском смислу, одређени интеграл представља површину фигуре у равни ограничене функцијом $f(x)$ и правама $x = a$, $x = b$ и $y = 0$. Израчунавање површине такве фигуре је и био мотив за дефиницију одређеног интеграла. Поред тога, он налази примену у израчунавању запремине тела и дужине лука кривих у равни и простору. Такође игра значајну улогу у испитивању конвергенције и налажењу суме редова.

3.1 Површина равне фигуре

Нека је ненегативна функција $f(x)$ интегрална на сегменту $[a, b]$. Тада интегрална сума

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$



представља површину степенасте фигуре.

Узимајући све финију поделу сегмента $[a, b]$, на крају граничног процеса, добија се површина "криволинијског трапеза"

$$P = \int_a^b f(x) dx,$$

као гранична вредност низа степенастих фигура.

У општем случају, фигура у равни може да буде ограничена двема кривама које представљају функције $f(x)$ и $g(x)$. Површина такве фигуре једнака је

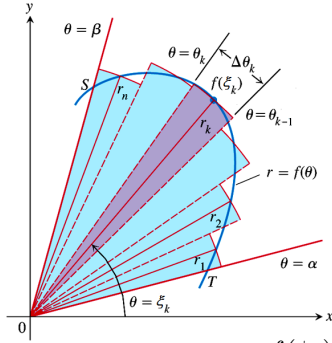
$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx,$$

при чему је $f(x) \geq g(x)$.

Пример 3.1 Израчунаћемо површину елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Довољно је наћи површину у првом квадранту. Како је $f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, то је

$$P = b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = ab \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{ab\pi}{4},$$

па је површина елипсе једнака $ab\pi$.



У случају да је функција дата у поларним координатама, $r = f(\theta)$, површину сектора приближно израчунавамо као суму кружних исечака. Нека је сектор OTS ограничен полуправама које заклапају углове $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ и кривом $r = f(\theta)$.

При произвољној подели P сектора OTS на n подсектора, у подсектору захваћеном угловима θ_k и θ_{k-1} на произвољан начин бирамо угао ξ_k , коме одговара полупречник $r_k = f(\xi_k)$. Када је познат полупречник r_k круга и дужина лука l_k који одговара централном углу $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$, површина кружног исечка, приближно једнака овом подсектору, је $\frac{1}{2}r_k l_k$. Како је дужина лука l_k једнака $r_k \Delta\theta_k$, површина кружног исечка постаје

$$\frac{1}{2} r_k^2 \Delta\theta_k = \frac{1}{2} f^2(\xi_k) \Delta\theta_k,$$

а приближна површина сектора OTS је

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n f^2(\xi_k) \Delta\theta_k.$$

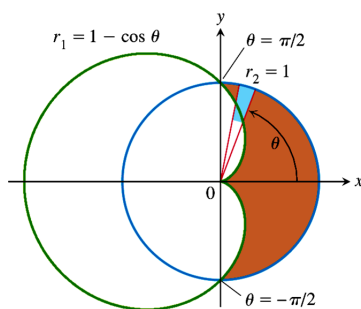
Узимајући све финију поделу области OTS , њена површина, на крају граничног процеса, једнака је

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.$$

Уколико се област налази између две поларне криве $r_1 = f(\theta)$ и $r_2 = g(\theta)$ и углова α и β , тада је површина области једнака

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f^2(\theta) - g^2(\theta)) d\theta.$$

Пример 3.2 Израчунаћемо површину сектора који припада области изван кардиоиде $r = 1 - \cos \theta$, а унутар кружнице $r = 1$.



Овде је $r_2 = f(\theta) = 1$ и $r_1 = g(\theta) = 1 - \cos \theta$, а θ се креће од $-\pi/2$ до $\pi/2$. Стога је тражена површина једнака

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (f^2(\theta) - g^2(\theta)) d\theta = \int_0^{\pi/2} (1 - (1 - \cos \theta)^2) d\theta = 2 - \frac{\pi}{4}.$$

Уколико је крива задата параметарским једначинама $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, имамо

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \theta'_t = \frac{xy'_t - x'_t y}{x^2 + y^2},$$

одакле је

$$\frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} (xy'_t - x'_t y) dt.$$

Ако промени угла θ од α до β одговара промена параметра t од t_0 до t_1 , тада је

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (xy'_t - x'_t y) dt.$$

Пример 3.3 Примењујући непосредно претходну формулу, површина области чија граница је астроида $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ једнака је

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^3 t \cdot 3 \sin^2 t \cos t + 3 \cos^2 t \sin t \cdot \sin^3 t) dt = \frac{3}{16} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{8}.$$

3.2 Запремина тела

Поставимо у тачки x на апсцисној оси раван нормалну на ову осу. Нека је $P(x)$ површина фигуре добијена у пресеку ове равни и тела, које се налази између равни нормалних на апсцисну осу у тачкама a и b . Делећи сегмент $[a, b]$ на произвољан начин тачкама $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ и постављајући раван нормалну на апсцисну осу у произвољној тачки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$), добијамо интегралну суму $\sum_{k=1}^n P(\xi_k) \Delta x_k$. С обзиром да производ $P(\xi_k) \Delta x_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) представља запремину цилиндра чија површина базе је $P(\xi_k)$, а висина Δx_k , узимајући све финију поделу сегмента $[a, b]$, ова интегрална сума ће се приближавати запремини тела. С друге стране, ова интегрална сума тежиће броју

$$V = \int_a^b P(x) dx,$$

што је формула за израчунавање запремине тела.

Пример 3.4 Нађимо запремину тела ограниченог цилиндром, чија основа је круг $x^2 + y^2 \leq 1$, и равни која заклапа угао од 60° са равни круга и садржи осу y .

Одредимо површину правоугаоника добијеног у пресеку овог тела и равни нормалне на раван xz и пролази кроз тачку $(x, 0, 0)$. Како је површина овог правоугаоника једнака

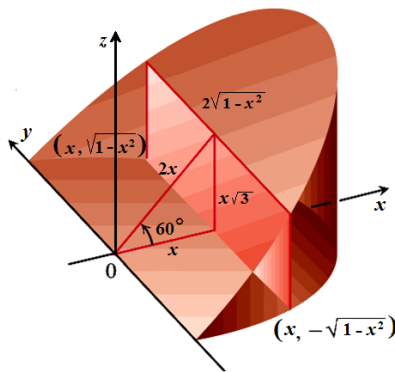
$$P(x) = 2\sqrt{3}x\sqrt{1-x^2},$$

запремина овог тела је

$$V = \int_0^1 P(x) dx = 2\sqrt{3} \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Пример 3.5 Израчунајмо сада запремину троосог елипсоида, чија једначина је

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Фигура настала у пресеке равни нормалне на апсцисну осу у тачки x и овог елипсоида је елипса

$$\frac{y^2}{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} + \frac{z^2}{c^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} = 1.$$

Видимо да су осе ове елипсе $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ и $c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, па је њена површина једнака

$$P(x) = \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2).$$

На тај начин, тражена запремина елипсоида је

$$V = \frac{\pi bc}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} abc \pi.$$

У специјалном случају, када је тело настало ротациом графика функције $f(x)$ око апсцисне осе на сегменту $[a, b]$, површина попречног пресека је $P(x) = f^2(x)\pi$, па његова запремина је

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Пример 3.6 Нађимо запремину кружног конуса, чији полупречник је r , а висина h .

Нека се оса конуса налази на апсцисној оси, а његов врх у координатно почетку. Једначина генератрисе конуса је $f(x) = \frac{r}{h}x$. Стога је његова запремина

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Слично, када лук криве $x = g(y)$ ротира око ординатне осе на сегменту $[c, d]$, запремина тако насталог тела је

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d g^2(y) dy.$$

Размотримо случај када фигура, ограничена непрекидном ненегативном функцијом $f(x)$ сегментом $[a, b]$ и правима $x = a > 0$ и $x = b$, ротира око осе y . Пре него што одредимо запремину тако насталог тела, наћи ћемо запремину шупљег ваљка, који се добија када се из ваљка полупречника R и висине H одстрани централни ваљак полупречника $r < R$, односно ротацијом правоугаоника страница $R - r$ и H око осе паралелене страници H , па је његова запремина једнака

$$\pi H(R^2 - r^2) = \pi H(R + r)(R - r). \quad (3)$$

Бирајући на произвољан начин тачке $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$, сегмент $[a, b]$ делимо на подсегменте $[x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$. За произвољно изабране тачке $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, добијамо правоугаонике страница $f(\xi_k)$ и Δx_k , $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

(видети слику на страници 6). Приликом ротације око осе y , сваки од њих образује шупљи ваљак тако што се из ваљка полупречника $R = x_k$ одстрани централни ваљак полупречника $r = x_{k-1}$, при чему је $1 \leq k \leq n$. Узимајући у обзир (3), при довољно финој подели P сегмента $[a, b]$, таквој да је $\|P\| < \delta$ за произвољно мало δ , укупна сума запремина ових шупљих ваљака једнака је

$$\sum_{k=1}^n \pi f(\xi_k)(x_k^2 - x_{k-1}^2) = \pi \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1}), \quad (4)$$

а она је приближно једнака траженој запремини тела насталог ротацијом фигуре ограничене непрекидном ненегативном функцијом $f(x)$, сегментом $[a, b]$ и правама $x = a > 0$ и $x = b$ око осе y . Напишимо суму (4) у другачијем облику

$$\pi \sum_{k=1}^n (x_k + x_{k-1})f(\xi_k)\Delta x_k = \pi \sum_{k=1}^n (x_k - \xi_k + x_{k-1} - \xi_k + 2\xi_k)f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Последњу суму можемо представити као збир две суме

$$\pi \sum_{k=1}^n (x_k - \xi_k + x_{k-1} - \xi_k)f(\xi_k)\Delta x_k + 2\pi \sum_{k=1}^n \xi_k f(\xi_k)\Delta x_k. \quad (5)$$

Када је $\|P\| < \delta$ за произвољно мало δ , прва сума се може учинити произвољно малом. Наиме, како је функција $f(x)$ непрекидна на сегменту $[a, b]$, она, према Вајерштрасовој теореме достиже на њему максимум M . Нека $\varepsilon > 0$ произвољно мали број. Постоји δ , такав да је $\varepsilon = 2\pi(b-a)M\delta$. Тада, за $\|P\| < \delta$, имамо

$$\pi \left| \sum_{k=1}^n (x_k - \xi_k + x_{k-1} - \xi_k)f(\xi_k)\Delta x_k \right| \leq \pi \sum_{k=1}^n (|x_k - \xi_k| + |x_{k-1} - \xi_k|)|f(\xi_k)|(x_k - x_{k-1}),$$

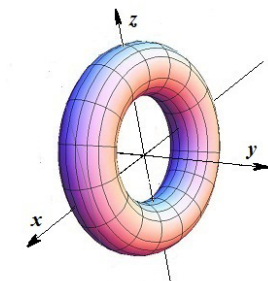
па, због $|x_k - \xi_k| < \delta$ и $|x_{k-1} - \xi_k| < \delta$, следи

$$\pi \sum_{k=1}^n (|x_k - \xi_k| + |x_{k-1} - \xi_k|)|f(\xi_k)|(x_k - x_{k-1}) < 2\pi\delta M \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon.$$

Друга сума из (5), као интегрална сума функције $2\pi x f(x)$ на сегменту $[a, b]$, за граничну вредност има интеграл

$$2\pi \int_a^b x f(x) dx,$$

а он представља и тражену запремину ротационог тела.



Пример 3.7 Нека круг $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1$ ротира око осе y . Том приликом настаје тело које се назива торусом. Наћи ћемо запремину торуса применом претходне формуле. Из једначине кружности $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ добијамо две криве $y = \pm\sqrt{1 - (x - 2)^2}$, међусобно симетричне у односу на осу x . Стога је довољно узети само лук $y = f(x) = \sqrt{1 - (x - 2)^2}$, јер је запремина торуса једнака двострукој вредности добијеној ротацијом овог лука око осе y .

На тај начин, запремина тела насталог ротацијом лука $f(x) = \sqrt{1 - (x - 2)^2}$ је

$$2\pi \int_a^b x f(x) dx = 2\pi \int_1^3 x \sqrt{1 - (x - 2)^2} dx.$$

Уводећи смену $x = 2 + t$, последњи интеграл постаје

$$2\pi \int_1^3 x \sqrt{1 - (x - 2)^2} dx = 2\pi \int_{-1}^1 (t + 2) \sqrt{1 - t^2} dt = 2\pi \int_{-1}^1 t \sqrt{1 - t^2} dt + 4\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt.$$

Први у збиру последња два интеграла једнак је нули, јер је подинтегрална функција непарна на симетричном интервалу, док други представља половину површине кружности полупречника 1, па је његова вредност $\frac{\pi}{2}$. Дакле, запремина торуса је $2 \cdot 4\pi \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi^2$.