1 Дужина лука криве

Крива у простору може бити задата као пресек неких површи или у векторском облику $\boldsymbol{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$. Када је $\chi(t) = 0$, крива је раванска. Криву за коју су изводи функција $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ непрекидни, називамо *глатком.* Нека је $t \in [\alpha, \beta]$, при чему је $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha))$ почетна тачка лука $\overset{\frown}{AB}$ ове криве, а $B(\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta))$ крајња. Ако је произвољна M тачка лука $\overset{\frown}{AB}$, а s дужина лука $\overset{\frown}{AM}$ у функцији параметра t, на основу раније изведене формуле, следи

$$s' = \|\boldsymbol{r}'\| \quad \Leftrightarrow \quad s'(t) = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)^2 + \chi'^2(t)}.$$

Због непрекиндности функција $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ и $\chi'(t)$, непрекидна је, а самим тим и интеграбилна на сегменту $[\alpha, \beta]$, функција $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)^2 + \chi'^2(t)}$. Стога је

$$s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{\varphi'^2(\tau) + \psi'^2(\tau)^2 + \chi'^2(\tau)}\, d\tau,$$

где је $s(\alpha) = 0$, и $s(\beta) = L$ дужина лука $\overset{\frown}{AB}$, то јест

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)^2 + \chi'^2(t)}\, dt. \tag{1}$$

У специјалном случају, када је крива раванска, формула (1) своди се на облик

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

Ако лук изразимо једначином $y = f(x)$, где је $x \in [a, b]$, за $t \in [\alpha, \beta]$ претходна формула постаје

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \Big(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\Big)^2}\, |\varphi'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx,$$

јер, на основу теореме о смени промењљивих, за $x = \varphi(t)$, из $\varphi'(t) > 0$, следи $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, тако да, узимајући у обзир теорему о изводу параметарски дефинисане функције, имамо

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \Big(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\Big)^2}\, \varphi'(t)\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx,$$

док из $\varphi'(t) < 0$, следи да је $\varphi(t)$ опадајућа, па је $b = \varphi(\alpha)$ и $a = \varphi(\beta)$, тако да је

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \Big(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\Big)^2}(-\varphi'(t))\, dt = -\int_b^a \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Уколико је једначина лука криве у поларним координатама $r = f(\theta)$, имамо $x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta = \varphi(\theta)$, $y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta = \psi(\theta)$ и налазимо

$$\varphi'(\theta) = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, \quad \psi'(\theta) = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta,$$

за дужину лука добија се

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)}\,d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}\,d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta.$$

Пример 1.1 Израчунајмо обим елипсе $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Елипсу можемо представити и параметарским једначинама $x = \varphi(t) = a\cos t$, $y = \psi(t) = b\sin t$, где је $t \in [0, 2\pi]$. Како се елипса налази у равни xy, то је $z = 0$. Наћи ћемо дужину њеног лука који одговара углу од $\pi/2$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)^2}\,dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1-\cos^2 t) + b^2\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}\,dt \\ &= a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2 z}\,dz = a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - c^2\sin^2 z}\,dz, \end{aligned}$$

при чему смо извршили смену $t = \dfrac{\pi}{2} - z$ и означили $c = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, што је нумерички ексцентрицитет елипсе.

Интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - c^2\sin^2 z}\,dz$ је **елиптички** (добио је име, јер је настао у процесу налажења обима елипсе) и не може се израчунати у коначном облику, и овај елиптички интеграл дефинише **елиптичку функцију** $E(c)$, која може да се развије у степени ред, који гласи

$$E(c) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - c^2\sin^2 z}\,dz = \frac{\pi}{2}\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{c^{2n}}{2n-1}\right).$$

То значи да се дужина лука елипсе у првом квадранту, у општем случају, може израчунати само приближно, узимајући коначан број сабирака, тако да грешка буде мања од унапред задатог броја.

Нека је $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тада је дужина лука елипсе, с нумеричким ексцентрицитетом $\frac{1}{\sqrt{2}}$, у првом квадранту једнака

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{256} - \frac{5}{2048} - \frac{175}{262144} - \frac{441}{2097152} - \cdots\right).$$

Уколико бисмо сабрали само написане чланове, за апсолутну вредност остатка добили бисмо процену

$$\left(\frac{11!!}{12!!}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{11\cdot 2^7} + \left(\frac{13!!}{14!!}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{13\cdot 2^8} + \cdots < \left(\frac{11!!}{12!!}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{11\cdot 2^7}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) < 0,00023,$$

што је и горња граница грешке коју чинимо, па је

$$\left|E\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)-\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{8}-\frac{3}{256}-\frac{5}{2048}-\frac{175}{262144}-\frac{441}{2097152}\right)\right|<0,00023.$$

С обзиром на то да је $0,00023<0,001$, сабирањем првих шест чланова реда, добићемо сигурно прве три децимале тачне. Како је њихова сума једнака $\dfrac{1803471\pi}{4194304}$, узимајући за број π приближно $3,14159$, чинимо грешку мању од $0,0000027$, па приближна вредност збира првих шест чланова реда на пет децимала износи $1,35082$, што значи да је приближна вредност броја $E\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)$ с три тачне децимале једнака $1,350$.

1.1 Површина омотача обртних тела

Претпоставимо да лук $\overset{\frown}{AB}$ криве дефинисан функцијом $y=f(x)\geqslant 0$, чији извод је непрекидан на $[\alpha,\beta]$ ротира око осе x. Израчунаћемо површину омотача тако насталог обртног тела.

Нека је тачкама $\alpha=x_0<x_1<\cdots<x_{k-1}<x_k<\cdots<x_n=\beta$ извршена произвољна подела P сегмента $[a,b]$. Њој одговара подела лука $\overset{\frown}{AB}$ на лукове $\overset{\frown}{AT_1}$ $,\overset{\frown}{T_1T_2},\ldots,\overset{\frown}{T_{k-1}T_k},\ldots,\overset{\frown}{T_{n-1}B}$. Спајањем њихових крајева добија се полигонална линија. Приликом ротације, сваки део ове линије описаће омотач зарубљене купе, а површина овог омотача је $\pi s(r+R)$, где је s изводница купе. Уочимо да вредности $f(x_k)$ и $f(x_{k-1})$ представљају већи и мањи полупречник зарубљене купе, тако да је површина омотача сваке од зарубљених купа једнака $\pi s_k(f(x_k)+f(x_{k-1}))$, где је дужина дела полигоналне линије s_k, која повезује тачке T_{k-1} и T_k, једнака

$$s_k=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2}=\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k,\quad \Delta x_k=x_k-x_{k-1},$$

где је $\xi_k\in(x_{k-1},x_k)$, при чему смо применили Лагранжову теорему о средњој вредности. Укупна површина M омотача свих зарубљених купа при произвољној подели P једнака је

$$M=\pi\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)+f(x_{k-1}))\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k.$$

Суму на десној страни можемо представити у облику две суме

$$\begin{aligned}M=\pi\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(\xi_k)+f(x_{k-1})-f(\xi_k))\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k&\\ +2\pi\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k.&\end{aligned}\tag{2}$$

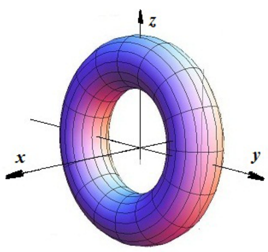
С обзиром да је функција $f(x)$ непрекидна, прва сума у (2) се може учинити произвољно малом (како?) за $\|P\|<\delta$, при чему је $\delta>0$ произвољно мало.

Како је функција $f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$ интеграбилна (зашто?), то је

$$\lim_{\|P\|\to 0} 2\pi \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

На тај начин, површина омотача једнака је

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$



Пример 1.2 Кружница $x^2+(y-2)^2=1$ ротира око осе x и образује торус. Да бисмо израчунали површину торуса, најпре одређујемо параметарске једанчине дате кружнице $x=\cos t$, $y=2+\sin t$, $t\in[0,2\pi]$. Према изведеном обрасцу, површина торуса једнака је

$$2\pi \int_0^{2\pi} (2+\sin t)\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt = 2\pi \int_0^{2\pi} (2+\sin t)\,dt = 8\pi^2.$$

Уколико је лук дат параметарским једначинама $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, површина омотача обртног тела једнака је

$$2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

а у случају да је лук дат у поларним координатама једначином $r=f(\theta)$, површина омотача обртног тела је

$$2\pi \int_a^b r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta.$$

1.2 Примена на израчунавање граничних вредности

Уз помоћ одређених интеграла може се израчунати гранична вредност неких низова, испитати конвергенција многих редова, а и наћи процена њихове суме. Применимо метод интегралне суме на бројевне низове.

Пример 1.3 Потражимо граничну вредност

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\Big).$$

Напишимо ову граничну вредност у облику

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n},$$

и поделимо сегмент $[0,1]$ тачкама $x_0=0, x_1=\dfrac{1}{n}, x_2=\dfrac{2}{n}, \dots, x_n=\dfrac{n}{n}=1$ на n једнаких делова. Нека функција $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ узима вредности у овим тачкама. На тај начин, горња сума представља интегралну суму за ову функцију, при чему је $\Delta x_k=\dfrac{1}{n}$, па је тражена гранична вредност интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$.

Овај резултат можемо искористити да на још један начин нађемо суму реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Наиме,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots-\frac{1}{2n}\Big)\\&=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-2\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\Big)\Big)\\&=\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\Big)=\ln 2.\end{aligned}$$

Пример 1.4 Примењујући сличан поступак, налазимо граничну вредност

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\Big).$$

Израз у загради напишимо на следећи начин

$$\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}=\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}$$

Поделимо сегмент $[0,1]$ тачкама $x_0=0, x_1=\dfrac{1}{n}, x_2=\dfrac{2}{n}, \dots, x_n=\dfrac{n}{n}=1$ на n једнаких делова. Нека функција $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ узима вредности у овим тачкама. Значи, сума на десној страни последње једнакости представља интегралну суму за ову функцију, при чему је $\Delta x_k=\dfrac{1}{n}$, па је тражена гранична вредност интеграл $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$.

Пример 1.5 Полазећи од раније изведених рекурзивних релација, наћи ћемо граничне вредности неких низова.

За $0\leqslant x\leqslant \pi/2$ важи двострука неједнакост $\sin^{2n+1}x\leqslant\sin^{2n}x\leqslant\sin^{2n-1}x$. На основу особине монотоније код одређеног интеграла имамо

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx\leqslant\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx\leqslant\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\,dx.$$

Како је $S_{2n+1}\leqslant S_{2n}\leqslant S_{2n-1}$, то јест

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\leqslant\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

одакле следи

$$\Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2\cdot\frac{2}{2n+1}\leqslant\pi\leqslant\Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2\cdot\frac{1}{n}.$$

Низ на левој страни је растући, док је низ на десној страни опадајући, а за њихову разлику важи процена

$$\Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2 \cdot \frac{1}{n(2n+1)} \leqslant \frac{\pi}{2n},$$

па она тежи нули када $n \to \infty$. Како су крајеви уметнутих сегмената низови, а дужина ових сегмената тежи нули и постоји тачно један број који се налази у свима њима, а овом случају то је број π. Значи,

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2 \cdot \frac{2}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2 \cdot \frac{1}{n} = \pi.$$

Ово је **Валисова формула** (John Wallis (1616-1703), енглески математичар) и она има историјски значај, јер је њоме број π по први пут добијен као гранична вредност низа с рационалним члановима, а у наредном примеру израчунавамо приближну вредност овог броја.

Пример 1.6 Функцију $f(x) = \operatorname{arctg} x$ најпре представљамо Маклореновим редом. Како је геометријски ред конвергентан за $|x| < 1$, имамо

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots .$$

Користимо чињеницу да се степени ред може интегралити члан по члан

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{2n-2}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^x t^{2n-2}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\, x^{2n-1}$$

за $x \in (-1, 1]$. Ако се стави $x = 1$, добија се наизменични ред који доста споро конвергира броју $\frac{\pi}{4}$. Да бисмо убрзали ову конвергенцију, узимамо $x = \frac{1}{5}$ и означавамо $\operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \alpha$. Тада је $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$, и добијамо $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{5}{12}$, $\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{120}{119}$. С обзиром да је вредност последњег разломка блиска броју 1, и угао 4α је близак углу $\frac{\pi}{4}$. Знајући да је $\operatorname{tg}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{239}$, добијамо $4\alpha - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$, односно $\pi = 16 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$. Замењујући у Маклореновом развоју функције $\operatorname{arctg} x$ најпре $x = \frac{1}{5}$, затим $x = \frac{1}{239}$, долазимо до формуле

$$\pi = 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdot \frac{1}{5^{2n-1}} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdot \frac{1}{239^{2n-1}},$$

за брзо израчунавање броја π. Ако са $R_n^{(1)}$ и $R_n^{(2)}$ означимо остатке ових редова, на основу неједнакости $\left|R_4^{(1)}\right| < \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5^9} < \frac{1}{10^7}$ и $\left|R_2^{(2)}\right| < \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{239^5} < \frac{1}{10^{12}}$, закључујемо да је довољно је узети прва четири члана првог и прва два члана другог реда, да би се добила тачност на шест децимала, с обзиром на то да је $\left|R_4^{(1)}\right| + \left|R_2^{(2)}\right| < 10^{-6}$. На тај начин је

$$16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^7}\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{239^3}\right) = \frac{5181632}{1640625} - \frac{685448}{40955757} = 3,141592,$$

што је приближна вредност броја π с тачних шест децимала.

Пример 1.7 Користимо Валисову формулу да бисмо израчунали граничну вредност низа $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ чији општи члан је

$$x_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!}.$$

Испитајмо његову монотонију. Како је

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{e}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{e}\cdot e^{(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{(n+\frac{1}{2})\left(\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{2}{2n+1}\right)},$$

потребно је размотрити знак израза $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{2}{2n+1}$, јер уколико је позитиван, низ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ биће растући, у супротном, опадајући. У том циљу посматрамо функцију

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{2x+1}.$$

Како је $f'(x) = -\dfrac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} < 0$, она је опадајућа за $x > 0$. Поред тога, $f(\frac{1}{2}) > 0$, јер је $\ln 3 > 1$, због $3 > e$, и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, па закључујемо да је $f(x) > 0$ за $x > 0$, а из те чињенице да је низ x_n растући. Значи, низ $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ је опадајући, а с обзиром да је позитиван, ограничен је с доње стране, тако да је конвергентан. Означимо његову граничну вредност са c. Тада је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n^2}{z_{2n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \frac{c^2}{c} = c.$$

Како је $2^{2n}(n!)^2 = (2^n n!)^2 = (2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2)^2$, а $2n! = 2n(2n-1)(2n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$, на основу Валисове формуле, налазимо да је

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}} = \sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{n}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi} = \sqrt{2\pi}.$$

На тај начин је $c = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \sqrt{2\pi}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

На основу граничне вредности низа $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, добија се **Стерлингова формула** (James Stirling (1692–1770), шкотски математичар)

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}.$$

1.3 Примена на редове

Одређене интеграле користимо да бисмо испитали конвергенцију позитивног бројевног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. У наредној теореми успоставља се **Кошијев интегрални критеријум** за конвергенцију овог реда.

Теорема 1.1 *Бројевни ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *где је* $a_n = f(n)$, *а* $f(x)$ *је позитивна, опадајућа и непрекидна функција за* $x \geqslant 1$, *конвергира или дивергира, према томе да ли је гранична вредност функције* $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$, *када* $x \to +\infty$, *коначна или бесконачна.*

► Како је функција $f(x)$ непрекидна, она је интеграбилна на сваком сегменту $[1, x]$, па је $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ њена примитивна функција, то јест $F'(x) = f(x) > 0$, одакле следи да је $F(x)$ растућа функција, и $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ је коначан или бесконачан број. С обзиром на то да је $F(1) = 0$, то је $F(n+1) = \sum\limits_{k=1}^{n} (F(k+1) - F(k))$ парцијална сума реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (F(n+1) - F(n))$. Применом Лагранжове теореме о средњој вредности, налазимо

$$F(n+1) - F(n) = f(n + \theta_n), \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Како је функција $f(x)$ опадајућа, узимајући у обзир да је $a_n = f(n)$, закључујемо

$$a_{n+1} = f(n+1) < F(n+1) - F(n) < f(n) = a_n. \tag{3}$$

Стога, на основу поредбеног критеријума за редове, ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира или дивергира, у зависности од тога да ли ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (F(n+1) - F(n))$, односно низ његових парцијалних сума $F(n+1)$, конвергира или дивергира. Међутим, за сваки $x > 1$, постоји $n \in \mathbb{N}$, такав да је $n \leqslant x < n+1$, па је $F(n) \leqslant F(x) < F(n+1)$, и следи $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F(n+1)$. ◄

Пример 1.8 Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$ конвергира, јер, на основу Кошијевог интегралног критеријума, функција

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}\,dt = 2\int_1^x \frac{1}{(1 + (\sqrt{t})^2)}\,d(\sqrt{t}) = 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{t}\,\Big|_1^x = 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$$

има коначну граничну вредност $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \pi/2$.

Ослањајући се на неједнакости (3), можемо проценити горњу границу суме овог реда. Из неједнакости $a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots < \sum\limits_{n=1}^{\infty} (F(n+1) - F(n)) = \frac{\pi}{2}$, додавањем обема странама $a_1 = 1/2$, следи $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < \frac{1}{2}(\pi + 1)$.

Пример 1.9 Применом Кошијевог интегралног критеријума лако је показати дивергенцију хармонијског реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, јер функција $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x$ нема коначну граничну вредност, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. У случају уопштеног хармонијског реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, применом Кошијевог интегралног показујемо да функција

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^s}\,dt = \frac{1}{1-s}(x^{1-s} - 1)$$

има коначну граничну вредност, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1/(s-1)$ за $s > 1$. У овом случају, користећи поступак из претходног примера, налазимо процену горње границе суме уопштеног хармонијског реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \frac{s}{s-1}$. За $s \leqslant 1$ овај ред дивергира јер је $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.