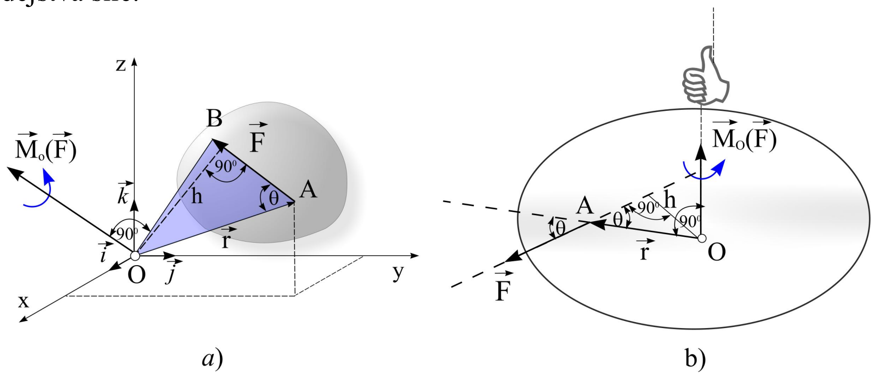
5.1.4 Vektorska formulacija momenta sile u odnosu na tačku

Na osnovu prethodnog izlaganja je očigledno da je moment sile u odnosu na tačku vektorska veličina, jer ga karakterišu pravac, intenzitet i smer, odnosno ravan, jačina i smer obrtnog dejstva sile.



Slika 5.9 *a*) Vektor momenta sile u odnosu na tačku; b) smer momenta sile u odnosu na tačku.

Na telo deluje prostorna sila $\vec{F}$ u tački A, Slika 5.9 *a*). Položaj napadne tačke A sile $\vec{F}$ određen je vektorom položaja $\vec{r}$, čiji je početak u tački O, oko koje telo može da se obrće. Tačka O je koordinatni početak Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema. Ortovi osa x, y i z koordinatnog sistema su $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$.

Moment sile $\vec{F}$ u odnosu na tačku O može se izraziti kao vektorski proizvod vektora položaja $\vec{r}$ i sile $\vec{F}$:

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{5.6}$$

Iz vektorske algebre (poglavlje 2.3.4) je poznato da je vektorski proizvod dva vektora treći vektor koji je po intenzitetu jednak:

$$M_O(\vec{F}) = r\,F \sin\theta, \tag{5.7}$$

gde je θ ugao između vektora položaja $\vec{r}$ i sile $\vec{F}$, Slika 5.9. Kako je $r\sin\theta = h$, moment sile u odnosu na tačku O je:

$$M_O(\vec{F}) = F\,h, \tag{5.8}$$

što se slaže sa izrazom (5.1). Intenzitet momenta sile u odnosu na tačku jednak je proizvodu intenziteta sile i dužine normale (kraka sile) spuštene iz momentne tačke na napadnu liniju sile.

Intenzitet momenta sile u odnosu na tačku može da se izrazi i kao dvostruka površina trougla OAB, Slika 5.9 *a*):

$$M_O(\vec{F}) = 2 \cdot \text{površina} \;\; \Delta OAB = F\,h. \tag{5.9}$$

Vektor $\vec{r}$ je vektor položaja između momentne tačke O i bilo koje tačke koja leži na napadnoj liniji sile $\vec{F}$. Ovo je zbog toga što se intenzitet momenta sile za tačku ne menja prilikom pomeranja sile duž njene napadne linije, jer normalno rastojanje između napadne linije sile i momentne tačke ostaje nepromenjeno.

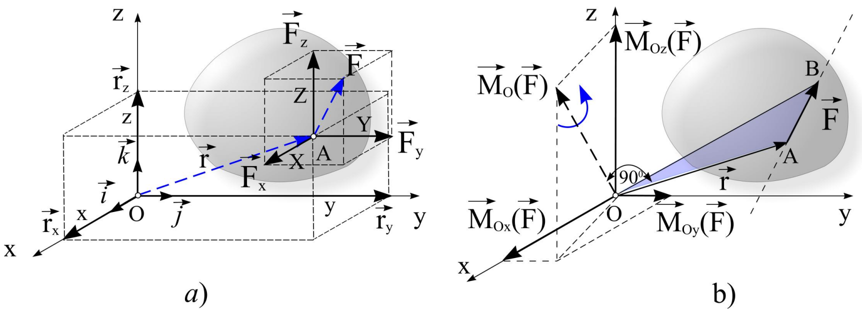
Pravac vektora definisanog vektorskim proizvodom (5.6) je pravac normale povučene kroz tačku O na ravan vektora $\vec{r}$ i $\vec{F}$, tj. na ravan obrtanja OAB, a smer je takav da se gledajući iz kraja tog vektora vidi obrtanje vektora $\vec{r}$ ka vektoru $\vec{F}$ za najmanji ugao u smeru suprotnom obrtanju kazaljke na satu, što je po definiciji pozitivan smer obrtanja momenta sile u odnosu na tačku. Drugim rečima smer momenta sile u odnosu na tačku je određen pravilom desnog zavrtnja, ili desne ruke, kao što se primenjuje kod vektorskog proizvoda, Slika 5.9 b). Pošto vektorski proizvod nije komutativan, važno je da se poštuje pravilan redosled $\vec{r}$ i $\vec{F}$ u jednačini (5.6).

5.1.5 Analitički način određivanja momenta sile u odnosu na tačku

Kao što je poznato iz vektorske algebre, vektorski proizvod se može izračunati analitički (izraz 2.15, poglavlje 2.3.5).
U odnosu na usvojen koordinatni sistem, Slika 5.10, vektor položaja i vektor sile glase:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},\\ \vec{F} &= X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k},\end{aligned} \tag{5.10}$$

gde su x, y i z projekcije vektora položaja $\vec{r}$ (od momentne tačke O do bilo koje tačke na napadnoj liniji sile), a X, Y i Z su projekcije sile u pravcu koordinatnih osa, Slika 5.10 *a*).



Slika 5.10 *a*) Sila, projekcije sile i vektor položaja; b) vektor momenta sile u odnosu na tačku O i njegove komponente.

Zamenom (5.10) u (5.6), vektorski proizvod se može izračunati analitički:

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ X & Y & Z\end{vmatrix}. \tag{5.11}$$

Razvijanjem po elementima prve vrste dobija se:

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = \left(yZ - zY\right)\vec{i} + \left(zX - xZ\right)\vec{j} + \left(xY - yX\right)\vec{k}, \tag{5.12}$$

odakle sledi da su komponente vektora momenta sile u odnosu na tačku, $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)$, u pravcu koordinatnih osa, Slika 5.10 b):

$$\begin{aligned}\vec{M}_{Ox}\left(\vec{F}\right) &= \left(yZ - zY\right)\vec{i},\\ \vec{M}_{Oy}\left(\vec{F}\right) &= \left(zX - xZ\right)\vec{j},\\ \vec{M}_{Oz}\left(\vec{F}\right) &= \left(xY - yX\right)\vec{k}.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Intenziteti ovih komponenata, tj. projekcije vektora momenta sile u odnosu na tačku na pravce koordinatnih osa su:

$$
\begin{aligned}
M_{Ox}\left(\vec{F}\right) &= y\,Z - z\,Y,\\
M_{Oy}\left(\vec{F}\right) &= z\,X - x\,Z,\\
M_{Oz}\left(\vec{F}\right) &= xY - yX.
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

Projekcije vektora momenta sile u odnosu na tačku na koordinatne ose x, y i z, date izrazom (5.14), predstavljaju analitičke izraze momenta sile $\vec{F}$ u odnosu na tačku O.
Ako su projekcije vektora momenta sile u odnosu na tačku poznate ili sračunate primenom izraza (5.14), može se sračunati intenzitet vektora momenta sile u odnosu na tačku, kao i njegov pravac:

$$
\begin{aligned}
\left|\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)\right| = M_O(\vec{F}) &= \sqrt{\left(M_{Ox}\left(\vec{F}\right)\right)^2 + \left(M_{Oy}\left(\vec{F}\right)\right)^2 + \left(M_{Oz}\left(\vec{F}\right)\right)^2}\\
&= \sqrt{\left(yZ - zY\right)^2 + \left(zX - xZ\right)^2 + \left(xY - yX\right)^2},\\
\cos\left(\vec{i},\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)\right) &= \frac{M_{Ox}\left(\vec{F}\right)}{M_O\left(\vec{F}\right)},\\
\cos\left(\vec{j},\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)\right) &= \frac{M_{Oy}\left(\vec{F}\right)}{M_O\left(\vec{F}\right)},\\
\cos\left(\vec{k},\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)\right) &= \frac{M_{Oz}\left(\vec{F}\right)}{M_O\left(\vec{F}\right)}.
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

Određivanje momenta sile u odnosu na tačku korišćenjem vektorskog proizvoda ima značajnu prednost u rešavanju problema u prostoru, jer je jednostavnije odrediti vektor položaja $\vec{r}$ napadne tačke sile nego normalno rastojanje između momentne tačke i napadne linije sile.
Ukoliko se momentna tačka ne nalazi u koordinatnom početku, primenom jednačine (5.11) može se odrediti moment sile u odnosu na tačku definisanjem vektora položaja (videti 2.2.10, 2.2.13, izrazi (2.7) i (2.19)) na osnovu poznatih koordinata tačke u kojoj deluje sila (na primer B) i koordinata momentne tačke (na primer A):

$$\vec{r}_{AB} = \left(x_B - x_A\right)\vec{i} + \left(y_B - y_A\right)\vec{j} + \left(z_B - z_A\right)\vec{k}\,.$$

U tom slučaju moment sile $\vec{F}$ u odnosu na tačku A je:

$$
\begin{aligned}
\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{r}_{AB}\times\vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A\\ X & Y & Z \end{vmatrix} =\\
&= \left[\left(y_B - y_A\right)Z - \left(z_B - z_A\right)Y\right]\vec{i} +\\
&\quad + \left[\left(z_B - z_A\right)X - \left(x_B - x_A\right)Z\right]\vec{j} +\\
&\quad + \left[\left(x_B - x_A\right)Y - \left(y_B - y_A\right)X\right]\vec{k}.
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

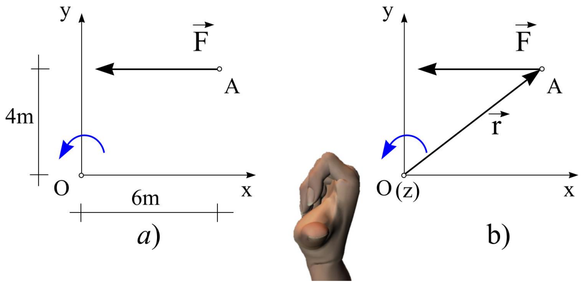
Ako sila $\vec{F}$ i momentna tačka leže u nekoj koordinatnoj ravni, na primer xOy, tada se pravac vektora momenta sile u odnosu na tačku poklapa sa pravcem ose koja je upravna na tu ravan, tj. sa osom z. U tom slučaju je $z=0$ i $Z=0$, pa izraz (5.12) postaje:

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)=\left(x\,Y-y\,X\right)\vec{k}=M_{Oz}\,\vec{k}\,. \tag{5.17}$$

Primeri određivanja vektora momenta sile u odnosu na tačku

Primer 5.4

Sila intenziteta 2 kN leži u ravni xOy, paralelna je sa osom x i deluje u tački A, čije su koordinate (6 m, 4 m, 0). Odrediti vektor momenta sile u odnosu na tačku O.



Slika P 5.4 *a*) Sila i znak momenta sile u odnosu na tačku; b) sila i vektor položaja napadne tačke sile.

Prvi način

Normalno rastojanje između sile $\vec{F}$ i momentne tačke O je 4 m, Slika P 5.4 *a*), pa je intenzitet momenta sile u odnosu na tačku O na osnovu (5.1):

$$M_O\left(\vec{F}\right)=F\,h=2\cdot 4=8\,\text{kNm}\,.$$

Znak momenta sile u odnosu na tačku je pozitivan, jer se vidi da sila teži da izazove obrtanje u smeru suprotnom od smera kretanja kazaljke na satu. Pravac vektora momenta sile u odnosu na tačku je normalan na ravan obrtanja xOy, a smer je prema posmatraču (u smeru pozitivne ose z), na osnovu pravila desnog zavrtnja ili desne ruke, pa je:

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)=8\vec{k}\;\left(\text{kNm}\right).$$

Drugi način

Vektor moment sile u odnosu na tačku može se odrediti primenom izraza (5.11), odnosno (5.17). Vektor sile i vektor položaja napadne tačke sile u odnosu na momentnu tačku su:

$$\vec{F}=-2\vec{i}\;\left(\text{kN}\right),\qquad \vec{r}=6\vec{i}+4\vec{j}\;\left(\text{m}\right),$$

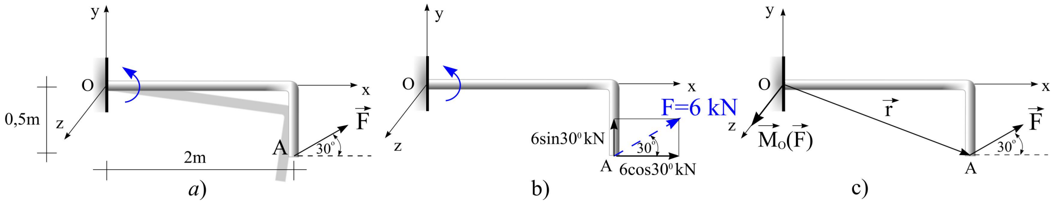
pa je moment sile u odnosu na tačku:

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 4 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{vmatrix}=8\vec{k}\;\left(\text{kNm}\right).$$

Primenom oba postupka dobijen je moment sile u odnosu na tačku intenziteta 8 kNm. Moment je pozitivan, pa je vektor momenta sile u odnosu na tačku O u smeru pozitivne ose z.

Primer 5.5

Sila F=6 kN deluje na gredu u ravni xOy, kao na Slici P 5.5 *a*). Odrediti moment sile u odnosu na tačku O.



Slika P 5.5 *a*) Sila deluje na gredu u tački A; b) razlaganje sile na komponente; c) vektor položaja napadne tačke sile, vektor sile i vektor momenta sile u odnosu na tačku O.

Prvi način

Intenzitet momenta sile $\vec{F}$ u odnosu na tačku O, primenom Varinjonove teoreme, izraz (5.3) je:

$$M_O(\vec{F}) = 6\cos 30^{o} \cdot 0,5 + 6\sin 30^{o} \cdot 2 = 8,598 \text{ kNm}.$$

Moment sile u odnosu na tačku je pozitivan, pravac vektora je pravac ose z, smer pozitivne ose z, pa vektor momenta sile $\vec{F}$ u odnosu na tačku O glasi:

$$\overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}\right) = 8,598\vec{k} \ \left(\text{kNm}\right).$$

Drugi način

Vektor sile $\vec{F}$ i vektor položaja napadne tačke sile $\vec{r}$ u odnosu na momentnu tačku O, kao što je sa Slike P 5.5 c) očigledno, glase:

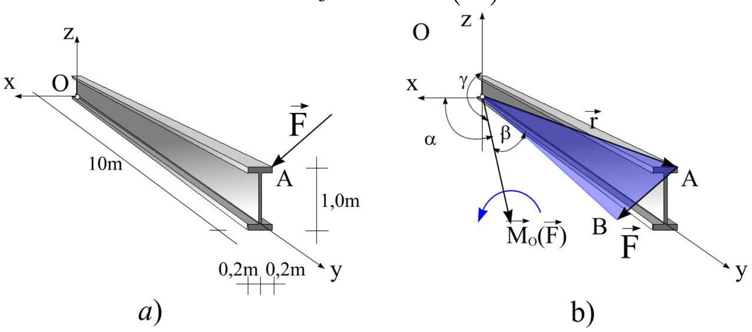
$$\vec{F} = 6\cos 30^{0}\,\vec{i} + 6\sin 30^{0}\,\vec{j} = 5,196\vec{i} + 3\vec{j} \ \left(\text{kN}\right), \quad \vec{r} = 2\vec{i} - 0,5\vec{j} \ \left(\text{m}\right),$$

pa je vektor momenta sile u odnosu na tačku O primenom izraza (5.11):

$$\overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -0,5 & 0 \\ 5,196 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 8,598\vec{k} \ \left(\text{kNm}\right).$$

Primer 5.6

Sila $\vec{F}$ deluje u tački A grede (Slika P 5.6 *a*)). Odrediti moment sile u odnosu na tačku O, ako je ona data izrazom $\vec{F} = 400\vec{i} + 300\vec{j} - 600\vec{k} \ \left(\text{N}\right)$.



Slika P 5.6 *a*) Sila deluje u tački A; b) vektor momenta sile u odnosu na tačku O.

Kako je koordinatni početak u momentnoj tački O, vektor položaja tačke A definisan je koordinatama tačke A, Slika P 5.6 *a*): $\vec{r} = -0,2\vec{i} + 10,0\vec{j} + 1,0\vec{k} \ \left(\text{m}\right)$.

Moment sile $\vec{F} = 400\vec{i} + 300\vec{j} - 600\vec{k}\ (N)$ u odnosu na tačku O dobija se primenom izraza (5.11):

$$\overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -0,2 & 10,0 & 1,0 \\ 400 & 300 & -600 \end{vmatrix},$$

$$\overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}\right) = \left[10\cdot(-600) - 1,0\cdot 300\right]\vec{i} + \left[1\cdot 400 - (-0,2)(-600)\right]\vec{j} + \left[(-0,2)300 - 10\cdot(400)\right]\vec{k},$$

$$\overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}\right) = -6300\vec{i} + 280\vec{j} - 4060\vec{k}\ (Nm).$$

Intenzitet vektora momenta sile $\vec{F}$ u odnosu na tačku O i njegov pravac određuju se primenom izraza (5.15):

$$\left|\overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}\right)\right| = M_O(\vec{F}) = \sqrt{(-6300)^2 + (280)^2 + (-4060)^2} = 7500,13\ Nm,$$

$$\cos\alpha = \frac{M_{Ox}\left(\vec{F}\right)}{M_O\left(\vec{F}\right)} = \frac{-6300}{7500,13} = -0,839985, \Rightarrow \alpha = 147^\circ\, 7'\, 54'',$$

$$\cos\beta = \frac{M_{Oy}\left(\vec{F}\right)}{M_O\left(\vec{F}\right)} = \frac{280}{7500,13} = 0,037334, \Rightarrow \beta = 87^\circ\, 46'19'',$$

$$\cos\gamma = \frac{M_{Oz}\left(\vec{F}\right)}{M_O\left(\vec{F}\right)} = \frac{-4060}{7500,13} = -0,613323, \Rightarrow \gamma = 127^\circ\, 47'\, 28''.$$

Vektor momenta sile $\vec{F}$ u odnosu na tačku O je upravan na ravan koju obrazuju vektor sile i vektor položaja, Slika P 5.6 b). Normalno rastojanje između napadne linije sile i momentne tačke O je veoma teško odrediti. Ovaj primer je dokaz da kod problema u prostoru treba koristiti vektorsku formulaciju momenta sile u odnosu na tačku.

5.1.6 Varinjonova teorema o momentu rezultante prostornog sistema sučeonih sila u odnosu na tačku

Posmatra se prostorni sistem sučeonih sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, prikazan na Slici 5.11. Napadna tačka ovog sistema sila je A. Vektor položaja tačke A u odnosu na momentnu tačku O je $\vec{r}$. Momenti pojedinih sila sistema u odnosu na tačku O su na osnovu izraza (5.6):

$$\overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}_1\right) = \vec{r} \times \vec{F}_1,\quad \overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}_2\right) = \vec{r} \times \vec{F}_2,\ \ldots\ ,\ \overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}_n\right) = \vec{r} \times \vec{F}_n. \tag{5.18}$$

Rezultanta $\vec{R}$ ovog sustema sila je:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \tag{5.19}$$

a moment rezultante $\vec{R}$ u odnosu na tačku O je:

$$\overrightarrow{M_O}\left(\vec{R}\right) = \vec{r} \times \vec{R}. \tag{5.20}$$

Zamenom (5.19) u (5.20) dobija se:

$$\overrightarrow{M_O}\left(\vec{R}\right) = \vec{r} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n\right) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + ... + \vec{r} \times \vec{F}_n, \tag{5.21}$$

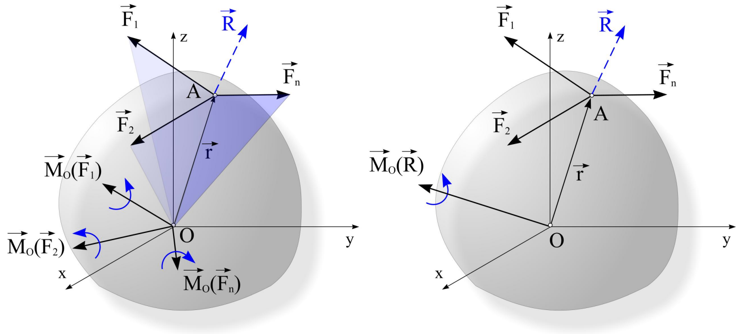
pri čemu je korišćena osobina vektorskog proizvoda o distribuciji (poglavlje 2.3.4). Zamenom (5.18) u (5.21) dobija se:

$$\overrightarrow{M}_O\left(\vec{R}\right)=\overrightarrow{M}_O\left(\vec{F}_1\right)+\overrightarrow{M}_O\left(\vec{F}_2\right)+\ldots+\overrightarrow{M}_O\left(\vec{F}_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_O\left(\vec{F}_i\right).$$

Ovom jednačinom izražava se Varinjonova teorema o momentu rezultante prostornog sistema sučeonih sila u odnosu na tačku:

Moment rezultante prostornog sistema sučeonih sila u odnosu na bilo koju tačku jednak je vektorskom (geometrijskom) zbiru momenata komponenata u odnosu na istu tačku.

$$\overrightarrow{M}_O\left(\vec{R}\right)=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_O\left(\vec{F}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}\times\vec{F}_i\right). \tag{5.22}$$

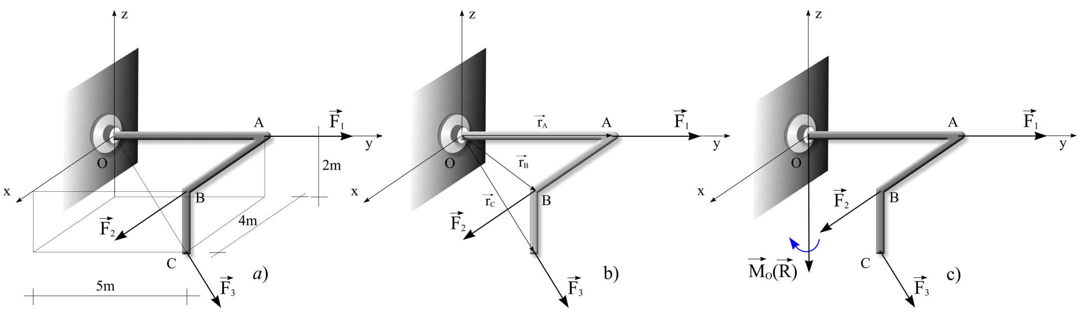


Slika 5.11 *a*) Prostorni sistem sučeonih sila deluje u tački A; b) moment rezultante sistema sučeonih sila u odnosu na tačku O.

Primeri određivanja momenta rezultante prostornog sistema sučeonih sila u odnosu na tačku

Primer 5.7

Na nosač deluje sistem od tri sile, Slika P 5.7. Sila $\vec{F}_1$, intenziteta 20 N, deluje u pravcu y ose, sila $\vec{F}_2$ je intenziteta 10 N, a njena napadna linija je paralelna sa osom x, dok sila $\vec{F}_3$, intenziteta 50 N, deluje u pravcu OC. Odrediti moment rezultante sistema sila u odnosu na tačku O.



Slika 5.7 *a*) Nosač opterećen sistemom sila; b) sile i vektori položaja; c) vektor momenta rezultante sistema sila u odnosu na tačku O.

Napadne linije sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_3$ prolaze kroz momentnu tačku O, pa su momenti ovih sila u odnosu na tačku O jednaki nuli. Sila $\vec{F}_2$ deluje u pravcu ose x. Normalno rastojanje između napadne linije sile $\vec{F}_2$ i tačke O je h=5 m. Znak momenta sile $\vec{F}_2$ u odnosu na tačku O je negativan (pravilo desnog zavrtnja ili desne ruke), pa je vektor momenta sile u smeru negativne ose z, Slika 5.7 c). Vektor momenta sile $\vec{F}_2$ u odnosu na tačku O je:

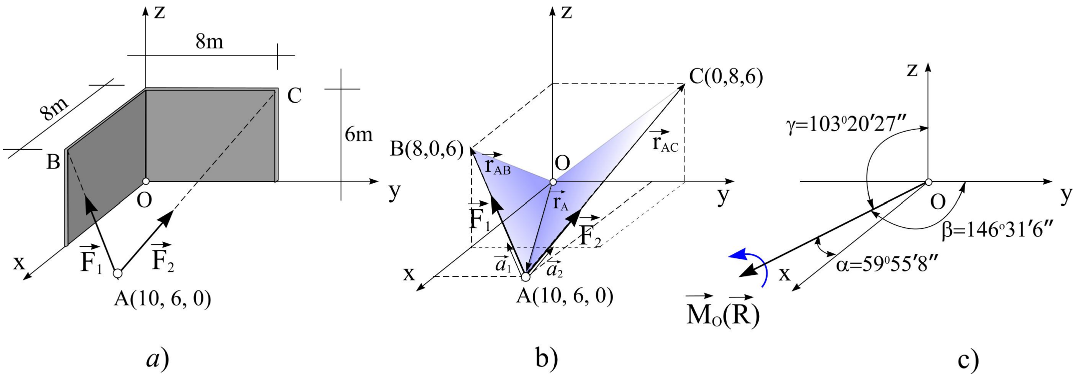
$$M_O\left(\vec{F}_2\right) = -F_2\,h = -10\cdot 5 = -50\,\text{kNm}\,.$$

Kako su momenti ostalih sila sistema u odnosu na tačku O jednaki nuli, ovo je ujedno i moment rezultante sistema sila u odnosu na tačku O:

$$\overrightarrow{M}_O\left(\vec{R}\right) = -50\vec{k}\ \ (\text{kNm}).$$

Primer 5.8

Odrediti momente sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ u odnosu na tačku O, kao i moment rezultante datog prostornog sistema sučeonih sila u odnosu na tačku O. Obe sile su intenziteta 200 N, a deluju u pravcima AB i AC, kao na Slici P 5.8.



Slika P 5.8 *a*) Sistem sučeonih sila; b) sile i vektori položaja definišu obrtne ravni OAB i OAC; c) vektor momenta rezultante sistema sila u odnosu na tačku O.

Vektor položaja tačke A je: $\vec{r}_A = 10\vec{i} + 6\vec{j}\ \ (\text{m})$, Slika P 5.8 b).

Pravci sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ su definisani jediničnim vektorima $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ (poglavlje 2.13, izrazi (2.19) i (2.20)):

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{r}_{AB}}{\left|\vec{r}_{AB}\right|} = \frac{\left(x_B - x_A\right)\vec{i} + \left(y_B - y_A\right)\vec{j} + \left(z_B - z_A\right)\vec{k}}{\sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}} = \frac{-2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 6\vec{k}}{\sqrt{\left(-2\right)^2 + \left(-6\right)^2 + \left(6\right)^2}},$$

$$\vec{a}_1 = -0,229\vec{i} - 0,688\,\vec{j} + 0,688\vec{k}\,,$$

$$\vec{a}_2 = \frac{\vec{r}_{AC}}{\left|\vec{r}_{AC}\right|} = \frac{\left(x_C - x_A\right)\vec{i} + \left(y_C - y_A\right)\vec{j} + \left(z_C - z_A\right)\vec{k}}{\sqrt{\left(x_C - x_A\right)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2 + \left(z_C - z_A\right)^2}} = \frac{-10\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 6\vec{k}}{\sqrt{\left(-10\right)^2 + \left(2\right)^2 + \left(6\right)^2}},$$

$$\vec{a}_2 = -0,845\vec{i} + 0,169\,\vec{j} + 0,507\vec{k}\,.$$

Vektori sila su na osnovu izraza (2.21):

$$\vec{F}_1 = \left|\vec{F}_1\right|\vec{a}_1 = 200\cdot\left(-0,229\vec{i} - 0,688\,\vec{j} + 0,688\vec{k}\right) = -45,8\vec{i} - 137,6\vec{j} + 137,6\vec{k}\ \ (\text{N}),$$

$$\vec{F}_2 = \left|\vec{F}_2\right|\vec{a}_2 = 200\cdot\left(-0,845\vec{i} + 0,169\,\vec{j} + 0,507\vec{k}\right) = -16,9\vec{i} + 33,8\vec{j} + 101,4\vec{k}\ \ (\text{N}),$$

a njihovi momenti u odnosu na tačku O se dobijaju primenom izraza (5.11):

$$\overrightarrow{M}_O\left(\vec{F}_1\right) = \vec{r}_A \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 6 & 0 \\ -45,8 & -137,6 & 137,6 \end{vmatrix},$$

$$\overrightarrow{M}_O\left(\vec{F}_1\right)=\left[6\left(137,6\right)-0\left(-137,6\right)\right]\vec{i}+\left[0\cdot\left(-45,8\right)-10\cdot137,6\right]\vec{j}+\left[10\left(-137,6\right)-6\left(-45,8\right)\right]\vec{k},$$

$$\overrightarrow{M}_O\left(\vec{F}_1\right)=825,6\vec{i}-1376\vec{j}-1101,2\vec{k}\quad(\mathrm{Nm}),$$

$$\overrightarrow{M}_O\left(\vec{F}_2\right)=\vec{r}_A\times\vec{F}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 10 & 6 & 0\\ -16,9 & 33,8 & 101,4\end{vmatrix},$$

$$\overrightarrow{M}_O\left(\vec{F}_2\right)=\left[6\left(101,4\right)-0\left(33,8\right)\right]\vec{i}+\left[0\cdot\left(-16,9\right)-10\cdot101,4\right]\vec{j}+\left[10\left(33,8\right)-6\left(-16,9\right)\right]\vec{k},$$

$$\overrightarrow{M}_O\left(\vec{F}_2\right)=608,4\vec{i}-1014\vec{j}+439,4\vec{k}\quad(\mathrm{Nm}).$$

Vektor momenta sile $\vec{F}_1$ u odnosu na tačku O je upravan na ravan OAB, koja sadrži vektor položaja $\vec{r}_A$ i silu $\vec{F}_1$, dok je vektor momenta sile $\vec{F}_2$ u odnosu na tačku O upravan na ravan OAC, koju čine vektor položaja $\vec{r}_A$ i sila $\vec{F}_2$, Slika P 5.8 b). Moment rezultante sistema sila je na osnovu (5.22):

$$\overrightarrow{M}_O\left(\vec{R}\right)=\sum_{i=1}^{2}\overrightarrow{M}_O\left(\vec{F}_i\right)=\left(825,6\vec{i}-1376\vec{j}-1101,2\vec{k}\right)+\left(608,4\vec{i}-1014\vec{j}+439,4\vec{k}\right),$$

$$\overrightarrow{M}_O\left(\vec{R}\right)=1434\vec{i}-2390\vec{j}-661,8\vec{k}\quad(\mathrm{Nm}).$$

Intenzitet i pravac vektora momenta rezultante sistema sila u odnosu na tačku O su na osnovu izraza (5.15):

$$\left|\overrightarrow{M}_O\left(\vec{R}\right)\right|=M_O\left(\vec{R}\right)=\sqrt{\left(1434\right)^2+\left(-2390\right)^2+\left(-661,8\right)^2}=2864,69\ (\mathrm{Nm}),$$

$$\cos\alpha=\frac{M_{Ox}\left(\vec{R}\right)}{M_O\left(\vec{R}\right)}=\frac{1434}{2864,69}=0,500578,\ \Rightarrow\ \alpha=59^{\circ}\,55'\,8'',$$

$$\cos\beta=\frac{M_{Oy}\left(\vec{R}\right)}{M_O\left(\vec{R}\right)}=\frac{-2390}{2864,69}=-0,834296,\ \Rightarrow\ \beta=146^{\circ}\,31'\,6'',$$

$$\cos\gamma=\frac{M_{Oz}\left(\vec{R}\right)}{M_O\left(\vec{R}\right)}=\frac{-661,8}{2864,69}=-0,231020,\ \Rightarrow\ \gamma=103^{\circ}\,20'\,27''.$$

Vektor momenta rezultante sistema sila u odnosu na tačku O prikazan je na Slici P 5.8 c).

VAŽNE NAPOMENE

- Moment sile u odnosu na tačku predstavlja mehaničku meru obrtnog dejstva sile oko tačke
- Moment sile je vektorska veličina jer ga karakteriše pravac, intenzitet i smer
- Intenzitet momenta sile je $M_O\left(\vec{F}\right)=\pm\ F\ h$, gde je h krak sile, najkraće rastojanje između tačke O i napadne linije sile
- U prostoru se koristi vektorski proizvod da bi se odredio vektor momenta sile u odnosu na tačku, $\overrightarrow{M}_O\left(\vec{F}\right)=\vec{r}\times\vec{F}$, gde je $\vec{r}$ vektor položaja između momentne tačke O i bilo koje tačke koja leži na napadnoj liniji sile $\vec{F}$
- Pravac momenta sile u odnosu na tačku je pravac normale na ravan koja je određena momentnom tačkom i napadnom linijom sile, a njegov smer je određen pravilom desnog zavrtnja ili desne ruke, kao što se primenjuje kod vektorskog proizvoda
- Moment rezultante ravnog sistema sila u odnosu na tačku jednak je algebarskom zbiru momenata komponenata u odnosu na istu tačku, ili moment sile u odnosu na tačku je jednak algebarskom zbiru momenata komponenata te sile u odnosu na istu tačku. Ovo momentno pravilo – Varinjonova teorema je veoma značajno za primenu kod problema u ravni
- Kod problema u prostoru moment rezultante sistema sučeonih sila u odnosu na bilo koju tačku jednak je vektorskom (geometrijskom) zbiru momenata komponenata u odnosu na istu tačku $\overrightarrow{M}_O\left(\vec{R}\right)=\sum\overrightarrow{M}_O\left(\vec{F}_i\right)=\sum\left(\vec{r}\times\vec{F}_i\right)$

5.1.7 Moment sile u odnosu na osu

Često je potrebno znati obrtno dejstvo sile u odnosu na neku osu. Mehanička veličina kojom se definiše obrtno dejstvo sile u odnosu na osu naziva se *momentom sile u odnosu na osu*. Ovo je još jedan od osnovnih pojmova statike.

Neka na kruto telo, koje može da se obrće oko ose z, deluje sila $\vec{F}$ u tački A, Slika 5.12. Postavi se sada kroz tačku A ravan xOy, koja je upravna na osu z, i razloži se sila $\vec{F}$ na dve komponente $\vec{F}_z$, u pravcu ose z, i $\vec{F}_{xy}$ u ravni xOy. Sila $\vec{F}_z$ nema obrtni efekat oko ose z, već samo teži da pomeri telo u pravcu ose z, što znači da je celokupni obrtni efekat sile $\vec{F}$ u odnosu na osu z jednak obrtnom efektu komponente $\vec{F}_{xy}$ koja deluje u ravni xOy, upravnoj na osu z, odnosno:

$$M_z\left(\vec{F}\right)=M_z\left(\vec{F}_{xy}\right), \tag{5.23}$$

gde je simbolom $M_z\left(\vec{F}\right)$ označen moment sile $\vec{F}$ u odnosu na osu z.

Moment sile $\vec{F}$ u odnosu na osu z izaziva obrtanje oko te ose, što znači da je ravan obrtanja xOy, Slika 5.12. Intenzitet momenta sile u odnosu na osu određuje se analogno intenzitetu momenta sile u odnosu na tačku, izraz (5.1):

$$M_z\left(\vec{F}\right)=M_z\left(\vec{F}_{xy}\right)=\pm F_{xy}h\ . \tag{5.24}$$

Za potpuno definisanje momenta sile u odnosu na osu potrebno je znati još i smer, tj. znak momenta. Usvojena je konvencija da je moment sile u odnosu na osu pozitivan ako se, gledano iz vrha ose, vidi da sila $\vec{F}_{xy}$ teži da okrene telo u smeru suprotnom od smera kretanja kazaljke na satu, tj. ako se, gledano prema vrhu ose, vidi obrtanje u smeru desnog zavrtnja.

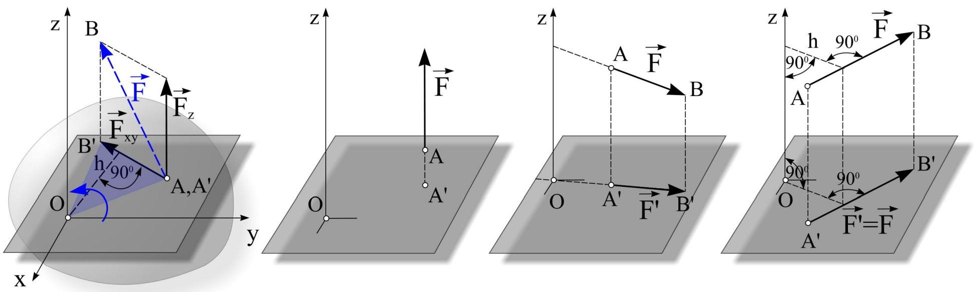
Na osnovu svega izloženog zaključuje se da je *moment sile u odnosu na osu skalarna veličina, jer je ravan dejstva određena pravcem ose, dok se intenzitet računa prema izrazu (5.1), kao proizvod projekcije sile* $\vec{F}$ *na ravan upravnu na datu osu i kraka h projekcije sile u odnosu na tačku O, u kojoj osa prodire ravan.*

Kako je moment sile $\vec{F}_{xy}$ u odnosu na osu z isti kao moment sile $\vec{F}_{xy}$ u odnosu na tačku O, u kojoj osa z prodire ravan xOy (normalno rastojanje između napadne linije sile i ose z, odnosno tačke O je isto), tj:

$$M_z\left(\vec{F}_{xy}\right) = M_O\left(\vec{F}_{xy}\right), \tag{5.25}$$

pa saglasno jednačini (5.23) sledi:

$$M_z\left(\vec{F}\right) = M_O\left(\vec{F}_{xy}\right) = \pm F_{xy}\, h\,. \tag{5.26}$$



a) b) c) d)

Slika 5.12 *a*) Moment sile u odnosu na osu z; b) sila je paralelna sa osom; c) sila seče osu; d) sila je upravna na osu.

Moment sile u odnosu na osu može se predstaviti i kao dvostruka površina trougla $OA'B'$, Slika 5.12, čija je osnovica projekcija sile na ravan, koja je upravna na osu, a vrh u tački prodora ose kroz ravan:

$$M_z\left(\vec{F}\right) = \pm 2 \cdot \text{površina}\, \Delta OA'B' = \pm F_{xy}\, h\,. \tag{5.27}$$

Na osnovu svega ovoga sledi da se pri izračunavanju momenta sile $\vec{F}$ u odnosu na osu z, ravan xOy može postaviti kroz bilo koju tačku ose z. Da bi se izračunao moment sile u odnosu na osu treba postaviti ravan normalnu na osu u bilo kojoj tački te ose, projektovati silu na tu ravan i sračunati veličinu te projekcije, povući normalu iz tačke prodora O na napadnu liniju projekcije sile na ravan i odrediti dužinu kraka h, izračunati proizvod projekcije i kraka i odrediti znak momenta.

Pri izračunavanju momenta sile u odnosu na osu treba imati u vidu sledeće specijalne slučajeve:

1) Moment sile u odnosu na osu koja je paralelna sa silom je jednak nuli, jer je $F_{xy} = 0$, Slika 5.12 b);
2) Moment sile čija napadna linija seče osu u odnosu na tu osu je jednak nuli, jer je h=0, Slika 5.12 c).

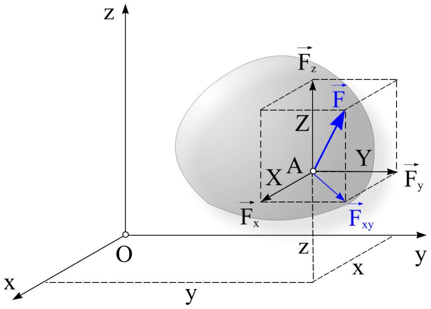
3) Ako je sila upravna na osu, tada je moment sile u odnosu na osu jednak proizvodu intenziteta sile i normalnog rastojanja između sile i ose, jer je projekcija sile na ravan ista kao i sama sila, $\vec{F}_{xy} = \vec{F}$, Slika 5.12 d).

Zaključak koji je posledica prva dva navedena slučaja je da je moment sile u odnosu na osu jednak nuli ako sila i osa leže u istoj ravni (sila je ili paralelna sa osom ili je seče).

5.1.8 Analitički način određivanja momenta sile u odnosu na koordinatne ose

Na telo deluje sila $\vec{F}$ u tački A, čije su koordinate x, y i z, Slika 5.13. Da bi se analitičkim putem definisao moment sile $\vec{F}$ u odnosu na koordinatnu osu z, treba projektovati silu na ravan xOy, a zatim komponentu $\vec{F}_{xy}$ razložiti na komponente $\vec{F}_x$ i $\vec{F}_y$ u pravcima osa x i y. Projekcije X, Y i Z sile $\vec{F}$ na pravce osa x y i z prikazane su na Slici 5.13. Ako se sada potraži moment sile $\vec{F}$ u odnosu na osu z primenom izraza (5.24) i Varinjonove teoreme, tj. izraza (5.3), dobija se:

$$M_z\left(\vec{F}\right) = M_O\left(\vec{F}_{xy}\right) = M_O\left(\vec{F}_x\right) + M_O\left(\vec{F}_y\right) = -X\,y + Y\,x\,. \tag{5.28}$$



Slika 5.13 Sila $\vec{F}$, projekcije sile X, Y i Z i napadna tačka sile A(x,y,z)

Analognim putem se određuju i momenti sile $\vec{F}$ u odnosu na koordinatne ose x i y, pa izrazi za određivanje momente sile $\vec{F}$ u odnosu na koordinatne ose analitičkim putem glase:

$$\begin{aligned} M_x\left(\vec{F}\right) &= y\,Z - z\,Y, \\ M_y\left(\vec{F}\right) &= z\,X - x\,Z, \\ M_z\left(\vec{F}\right) &= x\,Y - y\,X. \end{aligned} \tag{5.29}$$

5.1.9 Varinjonova teorema o momentu rezultante sistema sučeonih sila u odnosu na osu

Varinjonova teorema za sistem sučeonih sila u odnosu na osu se dokazuje potpuno analogno dokazu za tačku, pokazanom u poglavlju 5.1.6. Izraz (5.29) za moment rezultante $\vec{R}$ u odnosu na osu x glasi:

$$M_x\left(\vec{R}\right) = y\,Z_R - z\,Y_R\,. \tag{5.30}$$

Zamenom $Z_R = \sum Z_i$ i $Y_R = \sum Y_i$ u izrazu (5.30) dobija se:

$$M_x\left(\vec{R}\right) = y\sum Z_i - z\sum Y_i = \sum\left(y\,Z_i - z\,Y_i\right). \tag{5.31}$$

Moment sile $\vec{F}_i$ u odnosu na osu x je:

$$M_x\left(\vec{F}_i\right) = y\,Z_i - z\,Y_i\,. \tag{5.32}$$

Zamenom (5.32) u (5.31) dobija se izraz za moment rezultante sistema sučeonih sila u odnosu na osu x:

$$M_x\left(\vec{R}\right) = \sum M_x\left(\vec{F}_i\right). \tag{5.33}$$

Ovakva jednačina može se izvesti u odnosu na bilo koju osu. U odnosu na ose y i z moment rezultante sistema sučeonih sila određuje se primenom izraza:

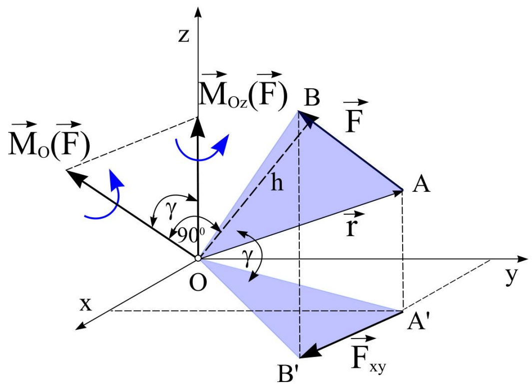
$$\begin{aligned} M_y\left(\vec{R}\right) &= \sum M_y\left(\vec{F}_i\right), \\ M_z\left(\vec{R}\right) &= \sum M_z\left(\vec{F}_i\right). \end{aligned} \tag{5.34}$$

5.1.10 Zavisnost između momenta sile u odnosu na tačku i momenta sile u odnosu na osu

Između momenta sile u odnosu na tačku i momenta sile u odnosu na osu koja prolazi kroz tu tačku postoji zavisnost koja se može dokazati na više načina.

Na telo u tački A deluje sila $\vec{F}$. Moment ove sile u odnosu na tačku O je vektor $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)$, koji je upravan na ravan OAB, Slika 5.14. Intenzitet ovog vektora može se predstaviti kao:

$$M_O(\vec{F}) = F\,h = 2\cdot \text{površina } \Delta OAB\,. \tag{5.35}$$



Slika 5.14 Veza između momenta sile u odnosu na tačku i momenta sile u odnosu na osu

Ako se kroz tačku O postavi ravan xOy, upravna na osu z, i na nju projektuje sila $\vec{F}$, onda će moment sile $\vec{F}$ u odnosu na osu z na osnovu (5.27) biti:

$$M_z\left(\vec{F}\right) = M_O\left(\vec{F}_{xy}\right) = 2 \cdot \text{površina } \Delta OA'B'. \tag{5.36}$$

Sa Slike 5.14 očigledno je da trougao $OA'B'$ predstavlja projekciju trougla OAB na ravan xOy. Ugao između ravni u kojima leže ovi trouglovi, jednak je uglu γ između normala na te ravni, pa je:

$$\text{površina } \Delta OA'B' = \text{površina } \Delta OAB \cos\gamma . \tag{5.37}$$

Ako se obe strane jednačine (5.37) pomnože sa 2 i u nju unesu (5.35) i (5.36), dobija se:

$$M_z\left(\vec{F}\right) = M_O\left(\vec{F}\right)\cos\gamma . \tag{5.38}$$

Kako proizvod $M_O\left(\vec{F}\right)\cos\gamma$ predstavlja projekciju vektora $\overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}\right)$ na osu z, Slika 5.14, to jednačina (5.38) može da se predstavi u obliku:

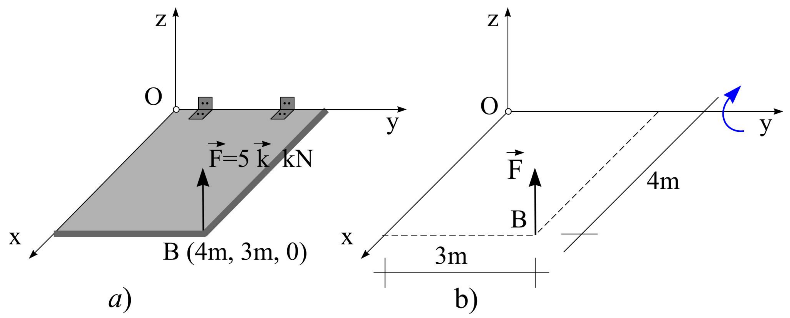
$$M_z\left(\vec{F}\right) = M_z = M_O\left(\vec{F}\right)\cos\gamma = M_{Oz}\left(\vec{F}\right). \tag{5.39}$$

Može se zaključiti da između momenta sile u odnosu na tačku i momenta sile u odnosu na osu postoji sledeća zavisnost: *moment sile $\vec{F}$ u odnosu na osu kroz posmatranu tačku jednak je projekciji momenta sile u odnosu na tačku na tu osu.*
Upoređenjem izraza (5.29) i (5.14) zaključuje se da je ova veza praktično već pokazana:

$$\begin{aligned}
&M_x\left(\vec{F}\right) = \left(yZ - zY\right), && M_{Ox}\left(\vec{F}\right) = \left(yZ - zY\right), && M_x\left(\vec{F}\right) = M_{Ox}\left(\vec{F}\right),\\
&M_y\left(\vec{F}\right) = \left(zX - xZ\right), && M_{Oy}\left(\vec{F}\right) = \left(zX - xZ\right), \quad \rightarrow && M_y\left(\vec{F}\right) = M_{Oy}\left(\vec{F}\right),\\
&M_z\left(\vec{F}\right) = \left(xY - yX\right), && M_{Oz}\left(\vec{F}\right) = \left(xY - yX\right), && M_z\left(\vec{F}\right) = M_{Oz}\left(\vec{F}\right).
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Primeri određivanja momenta sile u odnosu na osu

Primer 5.9
Odrediti moment sile F=5 kN u odnosu na osu y, Slika P 5.9.



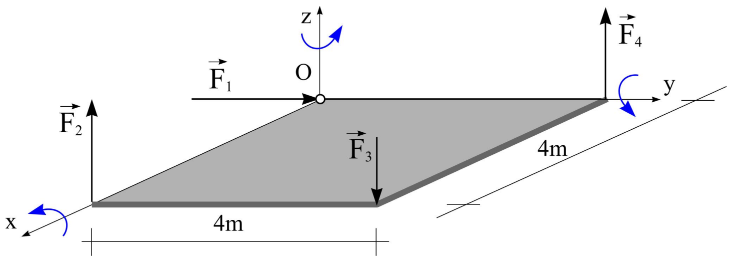
Slika P 5.9 *a*) Sila je normalna na ravan xOy; b) negativan moment sile u odnosu na osu y.

Sila deluje u pravcu pozitivne ose z, a normalno rastojanje između napadne linije sile i ose y je 4m. Smer momenta sile u odnosu na osu y je negativan, s obzirom da sila teži da izazove obrtanje oko ose y suprotno od smera desnog zavrtnja, Slika P 5.9 b), pa je moment sile u odnosu na osu y:

$$M_z\left(\vec{F}\right) = -F\,h = -5 \cdot 4 = -20\,\text{kNm} .$$

Primer 5.10

Na pravougaonu ploču deluje sistem sila, Slika P 5.10. Sila $\vec{F}_1$ intenziteta 10 kN je u pravcu ose y, dok su ostale sile paralelne sa osom z, a njihovi intenziteti su $F_2 = 4\,\text{kN}$, $F_3 = 6\,\text{kN}$ i $F_4 = 2\,\text{kN}$. Odrediti moment svake od sila u odnosu na ose x, y i z.



Slika P 5.10 Sile i naznačeni pozitivni znaci momenta sile u odnosu na ose x, y i z

a) Određivanje momenata sila u odnosu na osu x

Sila $\vec{F}_1$ deluje na ploču u tački O tako da je moment te sile u odnosu na osu x, kao i u odnosu na ose y i z, jednak nuli. Napadna tačka sile $\vec{F}_2$ je na x osi, pa je moment i ove sile u odnosu na osu x nula. Sile $\vec{F}_3$ i $\vec{F}_4$ su paralelne sa osom z, njihovo normalno rastojanje do ose x je 4 m, pa su momenti ovih sila u odnosu na osu x u skladu sa konvencijom o pozitivnom znaku:

$$M_x\left(\vec{F}_3\right) = -F_3\,h = -6 \cdot 4 = -24\,\text{kNm},$$

$$M_x\left(\vec{F}_4\right) = F_4\,h = 2 \cdot 4 = 8\,\text{kNm}.$$

b) Određivanje momenata sila u odnosu na osu y

Moment sile $\vec{F}_1$ u odnosu na osu y je jednak nuli. Napadna tačka sile $\vec{F}_4$ se nalazi na y osi, pa je moment i ove sile u odnosu na osu y jednak nuli. Sile $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ su paralelne sa osom z, njihovo normalno rastojanje do ose y je 4 m, pa su momenti ovih sila u odnosu na osu y:

$$M_y\left(\vec{F}_2\right) = -F_2\,h = -4 \cdot 4 = -16\,\text{kNm},$$

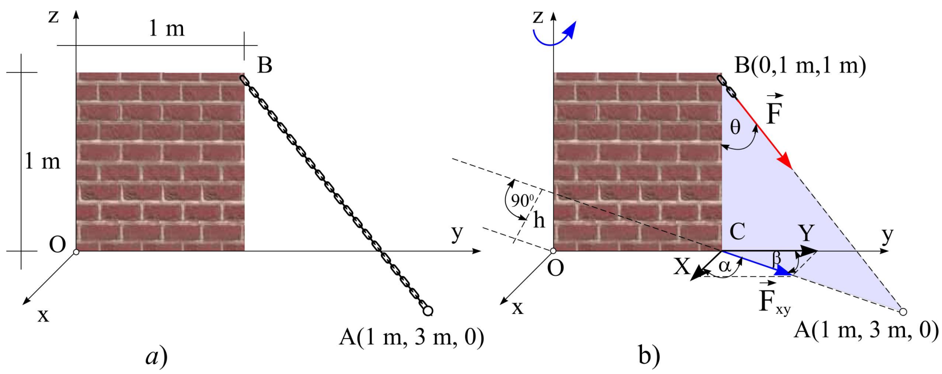
$$M_y\left(\vec{F}_3\right) = F_3\,h = 6 \cdot 4 = 24\,\text{kNm}.$$

b) Određivanje momenata sila u odnosu na osu z

Moment sile $\vec{F}_1$ u odnosu na osu z je jednak nuli. Sile $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ i $\vec{F}_4$ su paralelne sa osom z, pa su momenti ovih sila u odnosu na osu z jednaki nuli, što znači da dati sistem sila ne izaziva obrtanje ploče u odnosu na osu z.

Primer 5.11

Sila zatezanja u lancu AB je 50 N. Odrediti moment ove sile u odnosu na osu z.



Slika P 5.11 *a*) Lanac; b) pravac sile je određen koordinatama tačaka A i B.

Sila zatezanja u kablu je prostorna u pravcu $\overline{BA}$, Slika P 5.11 b). Kao što je napred pokazano, moment sile u odnosu na osu je jednak proizvodu projekcije sile na ravan upravnu na osu i normalog rastojanja h između projekcije sile i presečne tačke ose i ravni, izraz (5.24). Prijekcija sile $\vec{F}$ na horizontalnu ravan može se odrediti iz pravouglog trougla BCA (poglavlje 4.2.1 – projekcije sile na osu i ravan):

$$F_{xy} = F\sin\theta,$$

ali, kako normalno rastojanje h između projekcije sile na ravan xOy i ose z, Slika P 5.10 b), nije jednostavno odrediti, to treba projekciju sile na horizontalnu ravan razložiti na ortogonalne komponente u x i y pravcu i odrediti sumu momenata ovih komponenata u odnosu na osu z, tj. primeniti analitički postupak za određivanje momenta sile u odnosu na osu, izraz (5.29).

Pravac sile je definisan tačkama A(1 m, 3 m, 0) i B(1 m, 1 m, 0), pa je dužina duži $\overline{BA}$:

$$\overline{BA} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2},$$

$$\overline{BA} = \sqrt{(1-0)^2 + (3-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{11} = 3,32\,\text{m}.$$

Za određivanje sinusa ugla θ, osim hipotenuze $\overline{BA}$, potrebna je i kateta $\overline{CA}$, čija je dužina na osnovu poznatih koordinata tačaka A(1 m, 3 m, 0) i C(0, 1 m, 0):

$$\overline{CA} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2},$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(1-0)^2 + (3-1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{10} = 3,16\,\text{m},$$

pa je:

$$\sin\theta = \frac{\overline{CA}}{\overline{BA}} = \frac{3,16}{3,32} = 0,9518.$$

Projekcija sile na ravan xOy je:

$$F_{xy} = F\sin\theta = 50\cdot 0,9518 = 47,59\,\text{Nm}.$$

Uglovi α i β na osnovu koordinata tačaka A i C su:

$$\cos\alpha = \frac{|x_A - x_C|}{\overline{CA}} = \frac{|1-0|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,316227,$$

$$\cos\beta = \frac{|y_A - y_C|}{\overline{CA}} = \frac{|3-1|}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = 0,632455.$$

Projekcije sile $\vec{F}$ u x i y pravcu su:

$$X = F\cos\alpha = 50\cdot 0,316228 = 15,81\,\text{kN},$$

$$Y = F\cos\beta = 50\cdot 0,632455 = 31,62\,\text{kN},$$

dok je moment sile $\vec{F}$ u odnosu na osu z, primenom izraza (5.29):

$$M_z\left(\vec{F}\right) = x\,Y - y\,X = \left(0\cdot 31,62 - 1\cdot 15,81\right) = -15,81\,\text{Nm},$$

gde su x i y koordinate tačke C, tj. normalna rastojanja između projekcija X i Y sile $\vec{F}$ i ose z.

VAŽNE NAPOMENE

- Mehanička veličina kojom se definiše obrtno dejstvo sile oko neke ose je moment sile u odnosu na osu
- Moment sile u odnosu na osu jednak je proizvodu intenziteta sile i normalnog rastojanja između napadne linije sile i ose. Kod problema u ravni moment sile u odnosu na tačku i moment sile u odnosu na osu su isti
- Kod problema u prostoru moment sile u odnosu na osu se određuje kao proizvod projekcije sile na ravan upravnu na osu i dužine normale spuštene iz presečne tačke ose i ravni na pravac projekcije sile $M_z\left(\vec{F}\right) = M_O\left(\vec{F}_{xy}\right) = \pm F_{xy}\,h$
- Moment sile u odnosu na osu je skalarna veličina, jer je karakteriše samo intenzitet, a pravac je pravac ose
- Moment sile u odnosu na osu je pozitivan ukoliko se, gledano iz pozitivnog kraja ose, vidi da projekcija sile teži da okrene telo u smeru suprotnom od smera obrtanja kazaljke na satu, odnosno, ako se, gledano prema vrhu ose vidi obrtanje projekcije sile u smeru dasnog zavrtnja
- Moment sile koja je paralelna sa osom ili seče osu u odnosu na tu osu jednak je nuli
- Između momenta sile u odnosu na osu i momenta te sile u odnosu na bilo koju tačku koja leži na toj osi, postoji sledeća zavisnost: moment sile $\vec{F}$ u odnosu na osu kroz posmatranu tačku jednak je projekciji momenta sile u odnosu na tačku na tu osu, $M_x\left(\vec{F}\right) = M_{Ox}\left(\vec{F}\right)$, $M_y\left(\vec{F}\right) = M_{Oy}\left(\vec{F}\right)$, $M_z\left(\vec{F}\right) = M_{Oz}\left(\vec{F}\right)$. Ovo ima veoma značajnu primenu u praktičnim problemima