

1.5.2020. 1

TEHNIČKA MEHANIKA I

10. PREDAVANJE

SISTEM SILA SA ZAJEDNIČKOM NAPADNOM TAČKOM U PROSTORU (SISTEM SUČELJNIH SILA)

Str 72-98 knjiga Poglavlje 4 – SUČEONE SILE

1.5.2020. 2

ŠTA ĆEMO NAUČITI U OVOM POGLAVLJU?

- Slaganje sistema sučeonih sila pomoću poligona sila
- Razlaganje sile na tri pravca koji ne leže u istoj ravni
- Projekcije sile na osu i ravan
- Analitički način slaganja sila
- Geometrijski i analitički uslovi ravnoteže sistema sučeonih sila u prostoru

Str 63-98 knjiga Poglavlje 4 – SUČEONE SILE

1.5.2020. 3

SISTEM SUČELJNIH SILA JE SISTEM SILA ČIJE SE NAPADNE LINIJE SEKU U JEDNOJ TAČKI

- Ako na telo deluje sistem sila čije napadne linije ne leže u istoj ravni, takav sistem sila se naziva *sistem sila u prostoru* ili *prostorni sistem sila*.

POSTOJE TRI VRSTE ZADATAKA KOD SISTEMA SILA SA ZAJEDNIČKOM NAPADNOM TAČKOM:

1. **SLAGANJE**-određivanje rezultante (grafički, analitički)
2. **RAZLAGANJE** sile na komponente (grafički i analitički)
3. **RAVNOTEŽA** (grafički i analitički)

1.5.2020. 5

SLAGANJE SISTEMA SILA SA ZAJEDNIČKOM NAPADNOM TAČKOM

Slaganje sila je određivanje **rezultante** tih sila.

Grafički (geometrijski) postupak slaganja sila:

- paralelogram sila
- poligon sila

Analitički postupak slaganja sila

1.5.2020. 6

SLAGANJE SISTEMA SUČELJNIH SILA U PROSTORU – GEOMETRIJSKI (GRAFIČKI) NAČIN

Prenošenjem glavnog vektora u napadnu tačku A sistema sila određena je njegova rezultanta $\vec{R} = \vec{R}'$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Glavni vektor je određen završnom stranom poligona sila Oabed koji ne leži u jednoj ravni

Rezultanta datih sila predstavlja po veličini, pravcu i smeru završnu stranu poligona sila konstruisanog od datih sila.

Rezultanta proizvoljnog sistema sila u prostoru, koje imaju zajedničku napadnu tačku, deluje u toj tački i jednaka je vektorskom zbiru datih sila.

SLAGANJE – REZULTANTA TRI SUČELJNE SILE U PROSTORU. PRAVILO PARALELOPIPEDA

$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

SLAGANJE SISTEMA SUČELJNIH SILA U PROSTORU

Slaganje tri sile koje ne leže u istoj ravni postupnom primenom **pravila paralelograma.**

Slaganje tri sile koje ne leže u istoj ravni postupnom primenom **pravila trougla sile.**

$\vec{R} = \vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i$

Rezultanta prostornog sistema od tri sučeljne sile predstavlja glavnu – telesnu dijagonalu paralelopipeda čije su ivice date sile.

1.5.2020. 9

RAZLAGANJE SILE NA TRI PRAVCA KOJI NE LEŽE U ISTOJ RAVNI

$\vec{F} = \vec{F}' + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

Razlaganje sile na tri pravca L_1, L_2 i L_3 , koji ne leže u istoj ravni geometrijskim postupkom - sile može prvo primenom pravila paralelograma da se razloži na komponentu koja leži u ravni OABC i komponentu na pravcu L_3 , a zatim se komponenta razloži takođe primenom pravila paralelograma u pravcima L_1 i L_2 .

RAZLAGANJE SILE U PROSTORU

$\vec{F} = \vec{F}_1 + Z\vec{k}$

$\vec{F}_1 = X\vec{i} + Y\vec{j}$

$\vec{F} = \vec{F}_1 + Z\vec{k} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

1.5.2020. 11

SLAGANJE SISTEMA SUČEONIH SILA – ANALITIČKI POSTUPAK

- Slaganje više od dve sile primenom pravila paralelograma sile, tj. poligona sile, često zahteva mnogo geometrijskog i trigonometrijskog računanja kako bi se odredio intenzitet i pravac rezultante.
- Pri formiranju poligona sile potrebno je konstruisati orijentisane duži u odgovarajućoj razmeri, prenositi ih, nadovezivati itd. što predstavlja prilično nepraktičan postupak, naročito u slučaju prostornog sistema sile.
- Ovakvi problemi se jednostavnije rešavaju korišćenjem **analitičkog postupka**

1.5.2020. 12

PROJEKCIJA SILE NA OSU

- Primena analitičke metode za rešavanje zadataka statike zasniva se na pojmu **projekcije sile na osu.**
- Projekcija sile na osu je skalarna veličina jednaka proizvodu intenziteta sile i kosinusa ugla između pravca sile i pozitivnog smeru ose.**

$X = F \cos \alpha$ $X = F \cos \alpha = -F \cos(180^\circ - \alpha)$ $X = 0$

1.5.2020. 13

PROJEKCIJA SILE NA RAVAN

Projekcija sile \vec{F} na ravan Oxy je vektor \vec{F}_{xy} koji se nalazi između projekcija početka i vrha sile \vec{F} na tu ravan.

Za razliku od projekcije sile na osu, projekcija sile na ravan je vektor, jer ona nije okarakterisana samo svojom broječanom vrednošću, već i pravcem i smerom u ravni xOy. Intenzitet ove projekcije je:

$$F_{xy} = F \cos \alpha_{xy}$$

U nekim slučajevima, kada treba odrediti projekciju sile na osu, pogodno je prvo odrediti projekciju sile na ravan u kojoj se nalazi osa, a zatim nju projektovati na datu osu.

$$X = F_{xy} \cos \alpha' = F \cos \alpha_{xy} \cos \alpha'$$

$$Y = F_{xy} \sin \alpha' = F \cos \alpha_{xy} \sin \alpha'$$

1.5.2020. 14

ANALITIČKI NAČIN DEFINISANJA SILE

- Vektor koji predstavlja silu u prostoru može se prikazati u analitičkom obliku, ako je poznat intenzitet sile F i njen pravac, odnosno uglovi α , β i γ koje sila zaklapa sa koordinatnim osama. **Veličine F, α , β i γ potpuno određuju datu silu.**
- Sila je određena ako su poznate njene **projekcije X, Y i Z** na ose pravouglog Dekartovog koordinatnog sistema

$$X = F \cos \alpha, \quad Y = F \cos \beta, \quad Z = F \cos \gamma$$

Vektor sile: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

1.5.2020. 15

Ako su poznate projekcije sile X, Y i Z, onda se intenzitet sile određuje primenom Pitagorine teoreme na trouglove OBC i OAB

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Intenzitet sile u prostoru je jednak dijagonali paralelepipeda čije su ivice projekcije X, Y i Z, a njen pravac je definisan kosinusima uglova koje ona zaklapa sa osama:

$$\cos \alpha = \frac{X}{F}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{F}$$

1.5.2020. 16

PRIMER ODREĐIVANJA PROJEKCIJA SILA U PROSTORU

Štap prikazan na slici napregnut je silom $F = 40$ kN. Vektor sile izraziti preko njegovih komponenta, ako je poznato da je ugao koji vektor zaklapa sa y osom $\beta = 45^\circ$, a sa z osom $\gamma = 60^\circ$.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ} = \sqrt{1 - (0,707)^2 - (0,5)^2} = \pm 0,5$$

Dobijena su dva rešenja od kojih je samo jedno realno.
 Ugao je ili $\alpha = \arccos(+0,5) = 60^\circ$ ili $\alpha = \arccos(-0,5) = -60^\circ = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Kako su projekcije sile na ose y i z pozitivne, jer su uglovi β i γ ostri, na osnovu slike se može zaključiti da je projekcija sile na osu x negativna, tj. da se sila nalazi u drugom oktantu, a to znači da je **realno drugo rešenje**.

Projekcije vektora sile:
 $X = F \cos \alpha = F \cos 120^\circ = 40(-0,5) = -20$ kN,
 $Y = F \cos \beta = F \cos 45^\circ = 40 \frac{\sqrt{2}}{2} = 28,28$ kN,
 $Z = F \cos \gamma = F \cos 60^\circ = 40 \frac{\sqrt{3}}{2} = 34,64$ kN

Vektor sile: $\vec{F} = -20\vec{i} + 28,28\vec{j} + 34,64\vec{k}$ (kN)

1.5.2020. 17

PRIMER ODREĐIVANJA PROJEKCIJA SILA U PROSTORU

Uže prikazano na slici drži balon. Sila u užetu je 700 N. Projekcija tačke B na horizontalnu ravan xOy je u tački A. Ako je ugao između OA i x ose 60° , a između OA i vektora sile takođe 60° , odrediti projekciju sile na ose x, y i z i predstaviti silu preko njenih

$$F' = F \cos 60^\circ = 700 \frac{1}{2} = 350 \text{ N}, \quad Z = F \sin 60^\circ = 700 \frac{\sqrt{3}}{2} = 606,22 \text{ N},$$

$$X = F' \cos 60^\circ = 350 \frac{1}{2} = 175 \text{ N}, \quad Y = F' \sin 60^\circ = 350 \frac{\sqrt{3}}{2} = 303,11 \text{ N}.$$

$$\vec{F} = 175\vec{i} + 303,11\vec{j} + 606,22\vec{k} \text{ (N)}$$

1.5.2020. 18

PROJEKCIJA ZBIRA VEKTORA NA OSU

Teorema: Projekcija rezultante više vektora na neku osu jednaka je algebarskom zbiru projekcija komponentnih vektora na tu istu osu.

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = u_r(ab + bc + cd - de) = \overline{ab + bc + cd - de} = \overline{ae} = X_R$$

$$X_R = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i$$

1.5.2020.

19

ANALITIČKI NAČIN ODREĐIVANJA REZULTANTE PROSTORNOG SISTEMA SUČELJNIH SILA

Da bi se analitičkim postupkom odredio intenzitet, pravac i smer rezultante jednog sistema sila, potrebno je odrediti projekcije svih sila na ose odabranog referentnog koordinatnog sistema $Oxyz$.

$$X_R = \sum X_i, \quad Y_R = \sum Y_i, \quad Z_R = \sum Z_i$$

$$R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2}, \quad \text{intenzitet rezultante sistema sučelnih sila}$$

$$\cos \alpha_R = \frac{X_R}{R}, \quad \cos \beta_R = \frac{Y_R}{R}, \quad \cos \gamma_R = \frac{Z_R}{R}, \quad \text{pravac rezultante sistema sučelnih sila}$$

\vec{R} Rezultanta sistema sila sa zajedničkom napadnom tačkom jednaka je vektorskom zbiru svih sila i deluje u zajedničkoj napadnoj tački

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Rezultanta se definiše na drugi način kao vektorski zbir komponentata:

$$\vec{R} = X_R \vec{i} + Y_R \vec{j} + Z_R \vec{k}$$

$$X_R = \sum X_i, \quad Y_R = \sum Y_i, \quad Z_R = \sum Z_i$$

Intenzitet rezultante

u ravni

$$R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2}$$

u prostoru

$$R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2}$$

Pravac rezultante

u ravni

$$\cos \alpha_R = \frac{X_R}{R}, \quad \cos \beta_R = \frac{Y_R}{R}$$

u prostoru

$$\cos \alpha_R = \frac{X_R}{R}, \quad \cos \beta_R = \frac{Y_R}{R}, \quad \cos \gamma_R = \frac{Z_R}{R}$$

1.5.2020.

22

RAVNOTEŽA SISTEMA SUČELJNIH SILA

Potrebni i dovoljni uslovi ravnoteže sistema sučelnih sila koje deluju na kruto telo je da je rezultanta tih sila (glavni vektor) jednaka nuli

$$\vec{R}' = \vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$$

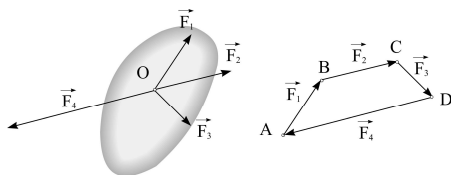
Ovo je **vektorski uslov ravnoteže** sistema sučelnih sila.

1.5.2020.

23

GEOMETRIJSKI USLOV RAVNOTEŽE SISTEMA SUČELJNIH SILA

Kako se rezultanta određuje postupnom primenom pravila paralelograma, ili kao završna strana poligona konstruisanog od tih sila, to **rezultanta može da bude jednaka nuli samo kada se vrh poslednje sile u poligonu sila poklapa sa početkom prve sile, tj. kada je poligon sila zatvoren.**



Sistem sučelnih sila je u ravnoteži ako je poligon sila zatvoren.

1.5.2020.

24

ANALITIČKI USLOVI RAVNOTEŽE SISTEMA SUČELJNIH SILA U PROSTORU

$$R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2} = 0$$

$$X_R = \sum X_i, \quad Y_R = \sum Y_i, \quad Z_R = \sum Z_i$$

Da bi rezultanta bila jednaka nuli moraju da budu sve tri projekcije rezultante na ose izabranog koordinatnog sistema jednake nuli

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0.$$

Ovo su analitički uslovi ravnoteže prostornog sistema sučelnih sila.

U slučaju prostornog sistema sučelnih sila potrebno da budu zadovoljena tri uslova ravnoteže: **algebarski zbir projekcija sila na svaku od osa Dekartovog koordinatnog sistema mora biti jednak nuli.**

Najvažnije u ovom poglavlju

- **Kako se određuje rezultanta prostornog sistema sučeljnih sila**
- **Kako se razlaže sila na tri pravca koji ne leže u istoj ravni**
- **Kako se sila predstavlja analitički preko svojih komponenata, odnosno projekcija**
- **Koji su uslovi ravnoteže sistema sučeljnih sila u prostoru**