TEHNIČKA MEHANIKA I

10. PREDAVANJE

SISTEM SILA SA ZAJEDNIČKOM NAPADNOM TAČKOM U PROSTORU (SISTEM SUČELJNIH SILA)

Str 72-98 knjiga Poglavlje 4 – SUČEONE SILE

ŠTA ĆEMO NAUČITI U OVOM POGLAVLJU?

- **Slaganje sistema sučeonih sila pomoću poligona sila**
- **Razlaganje sile na tri pravca koji ne leže u istoj ravni**
- **Projekcije sile na osu i ravan**
- **Analitički način slaganja sila**
- **Geometrijski i analitički uslovi ravnoteže sistema sučeonih sila u prostoru**

Str 63-98 knjiga Poglavlje 4 – SUČEONE SILE

SISTEM SUČELJNIH SILA JE SISTEM SILA ČIJE SE NAPADNE LINIJE SEKU U JEDNOJ TAČKI

- **Ako na telo deluje sistem sila čije napadne linije ne leže u istoj ravni, takav sistem sila se naziva *sistem sila u prostoru* ili *prostorni sistem sila*.**

POSTOJE TRI VRSTE ZADATAKA KOD SISTEMA SILA SA ZAJEDNIČKOM NAPADNOM TAČKOM:

1. SLAGANJE-određivanje rezultante (grafički, analitički)

2. RAZLAGANJE sile na komponente (grafički i analitički)

3. RAVNOTEŽA (grafički i analitički)

SLAGANJE SISTEMA SILA SA ZAJEDNIČKOM NAPADNOM TAČKOM

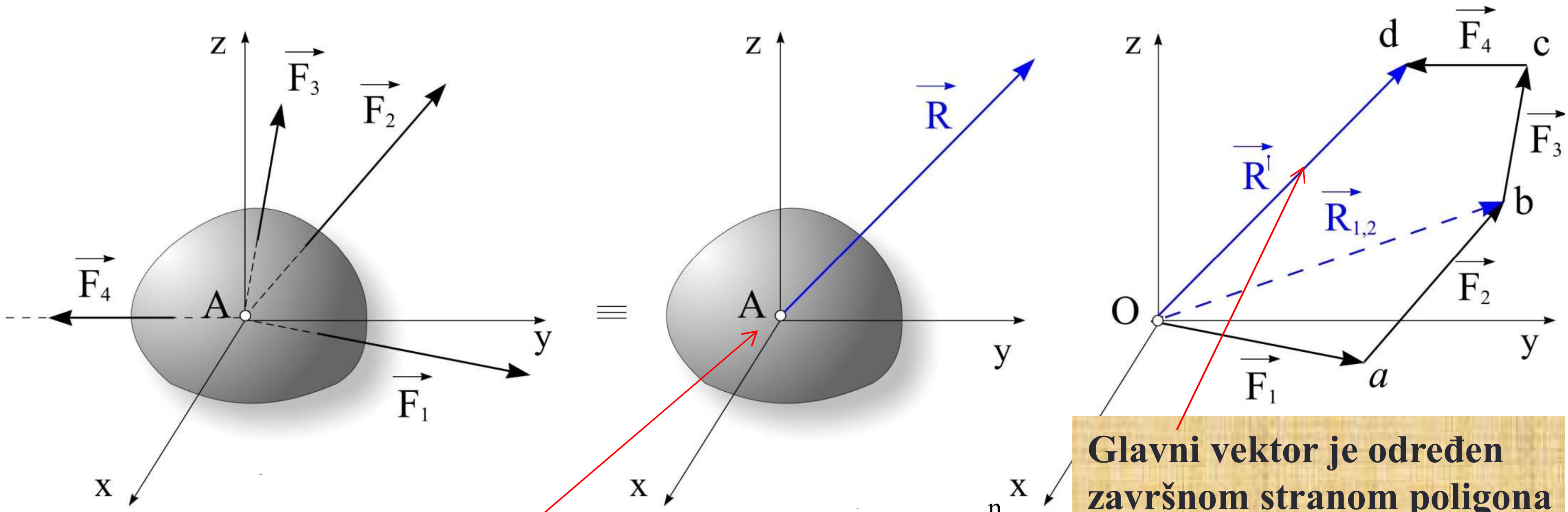
Slaganje sila je određivanje rezultante tih sila.

Grafički (geometrijski) postupak slaganja sila:

- **paralelogram sila**
- **poligon sila**

Analitički postupak slaganja sila

SLAGANJE SISTEMA SUČELJNIH SILA U PROSTORU – GEOMETRIJSKI (GRAFIČKI) NAČIN



Glavni vektor je određen završnom stranom poligona sila O*a*bcd koji ne leži u jednoj ravni

Prenošenjem glavnog vektora u napadnu tačku A sistema sila određena je njegova rezultanta

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

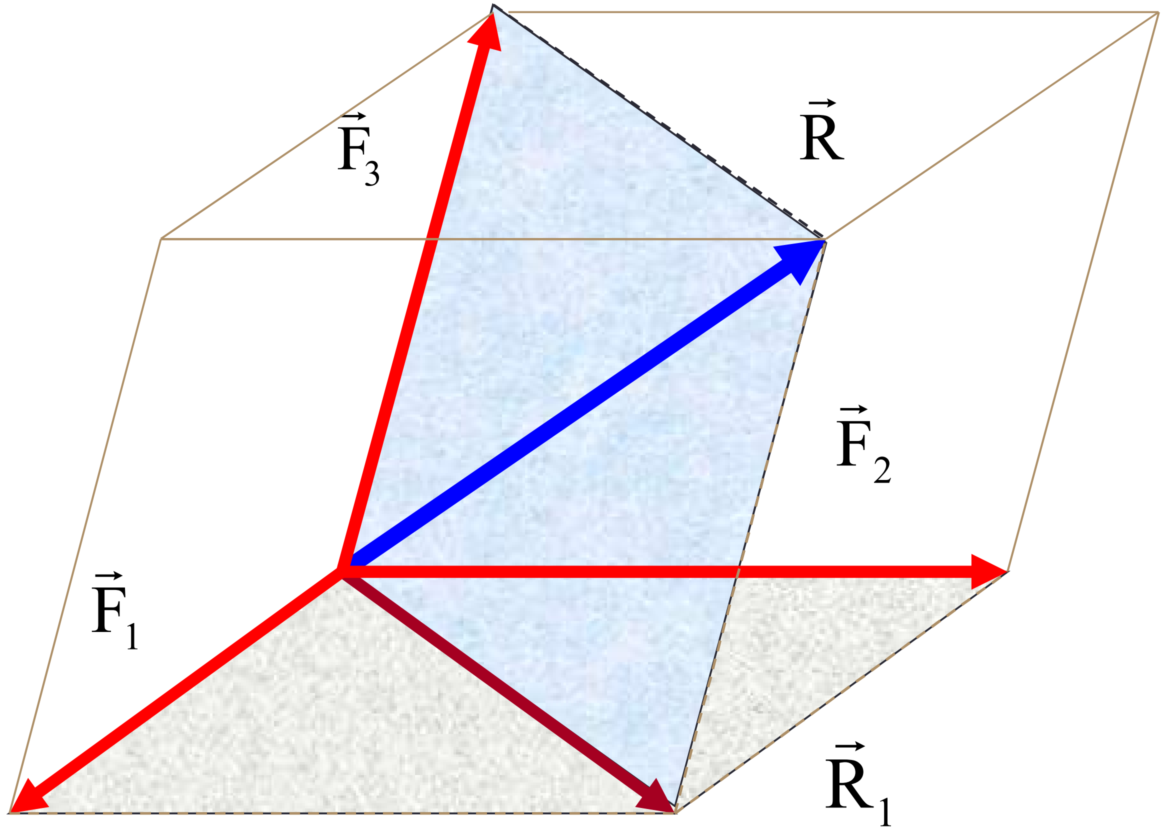
$$\vec{R} = \vec{R}'$$

Rezultanta datih sila predstavlja po veličini, pravcu i smeru završnu stranu poligona sila konstruisanog od datih sila.

Rezultanta proizvoljnog sistema sila u prostoru, koje imaju zajedničku napadnu tačku, deluje u toj tački i jednaka je vektorskom zbiru datih sila.

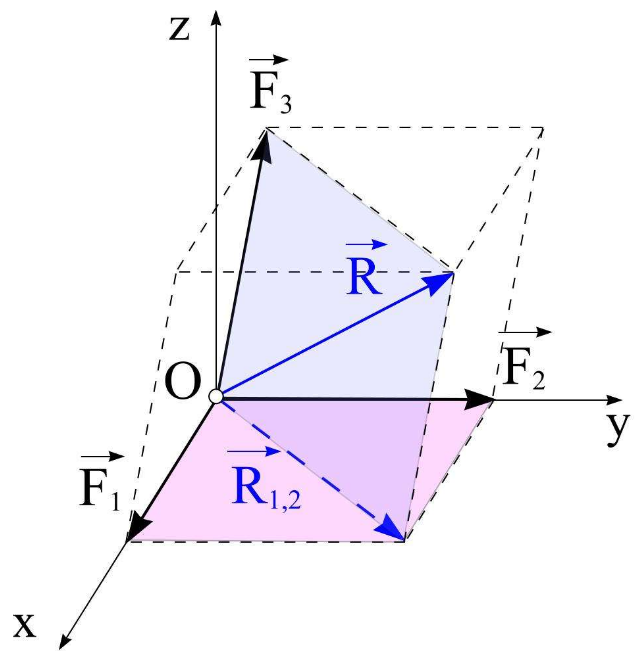
SLAGANJE – REZULTANTA TRI SUČELJNE SILE U PROSTORU. PRAVILO PARALELOPIPEDA

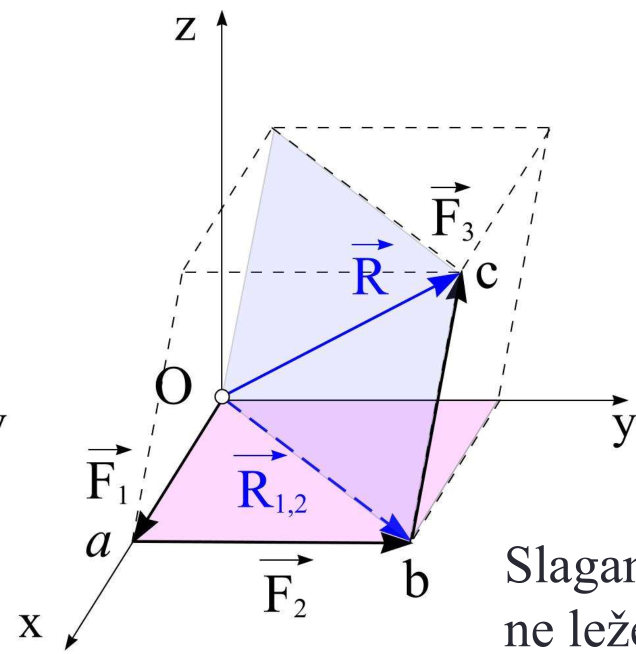
$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

SLAGANJE SISTEMA SUČELJNIH SILA U PROSTORU





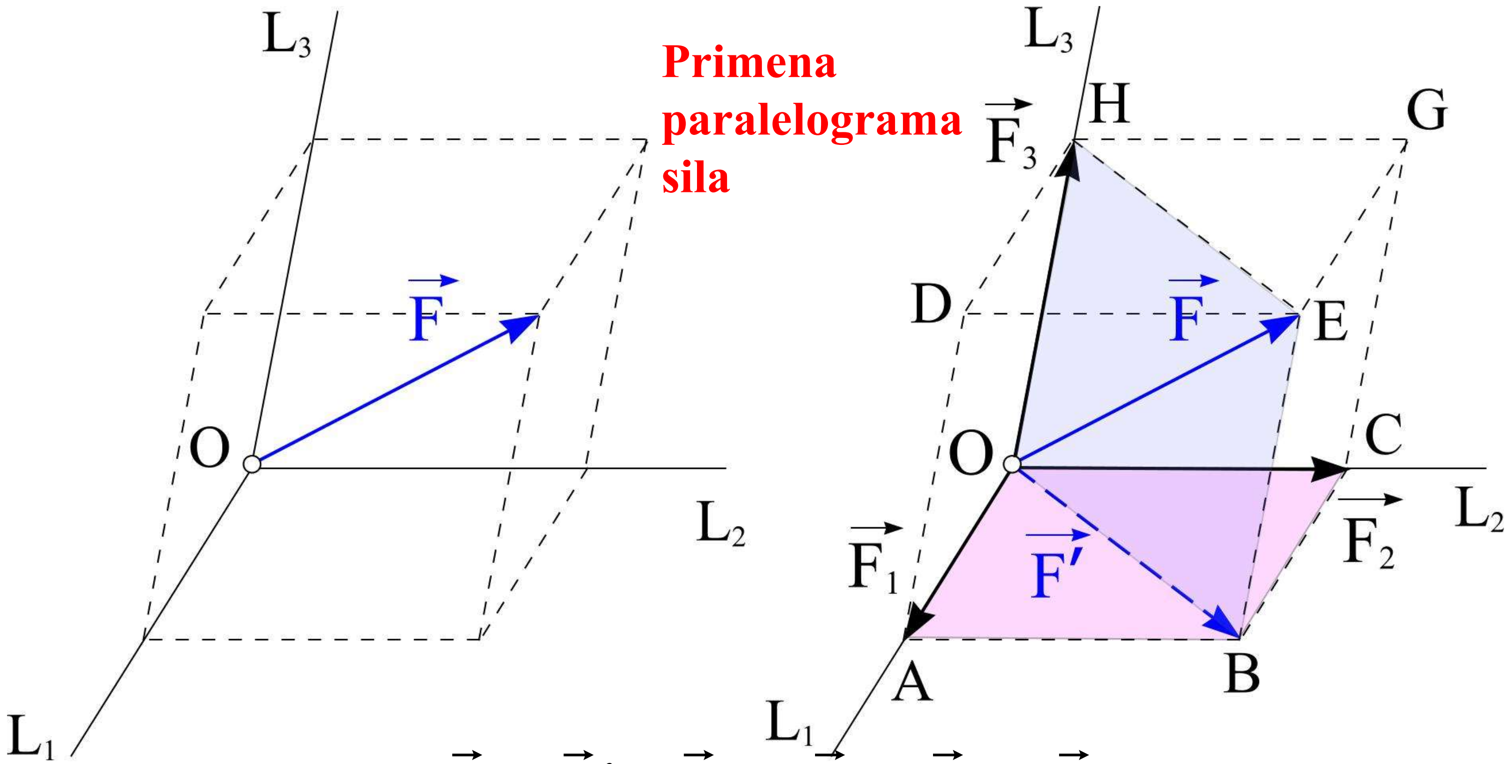
Slaganje tri sile koje ne leže u istoj ravni postupnom primenom **pravila paralelograma**.

Slaganje tri sile koje ne leže u istoj ravni postupnom primenom **pravila trougla sila**.

$$\vec{R} = \vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i$$

Rezultanta prostornog sistema od tri sučeljne sile predstavlja glavnu – telesnu dijagonalu paralelopipeda čije su ivice date sile.

RAZLAGANJE SILE NA TRI PRAVCA KOJI NE LEŽE U ISTOJ RAVNI



$$\vec{F} = \vec{F}' + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

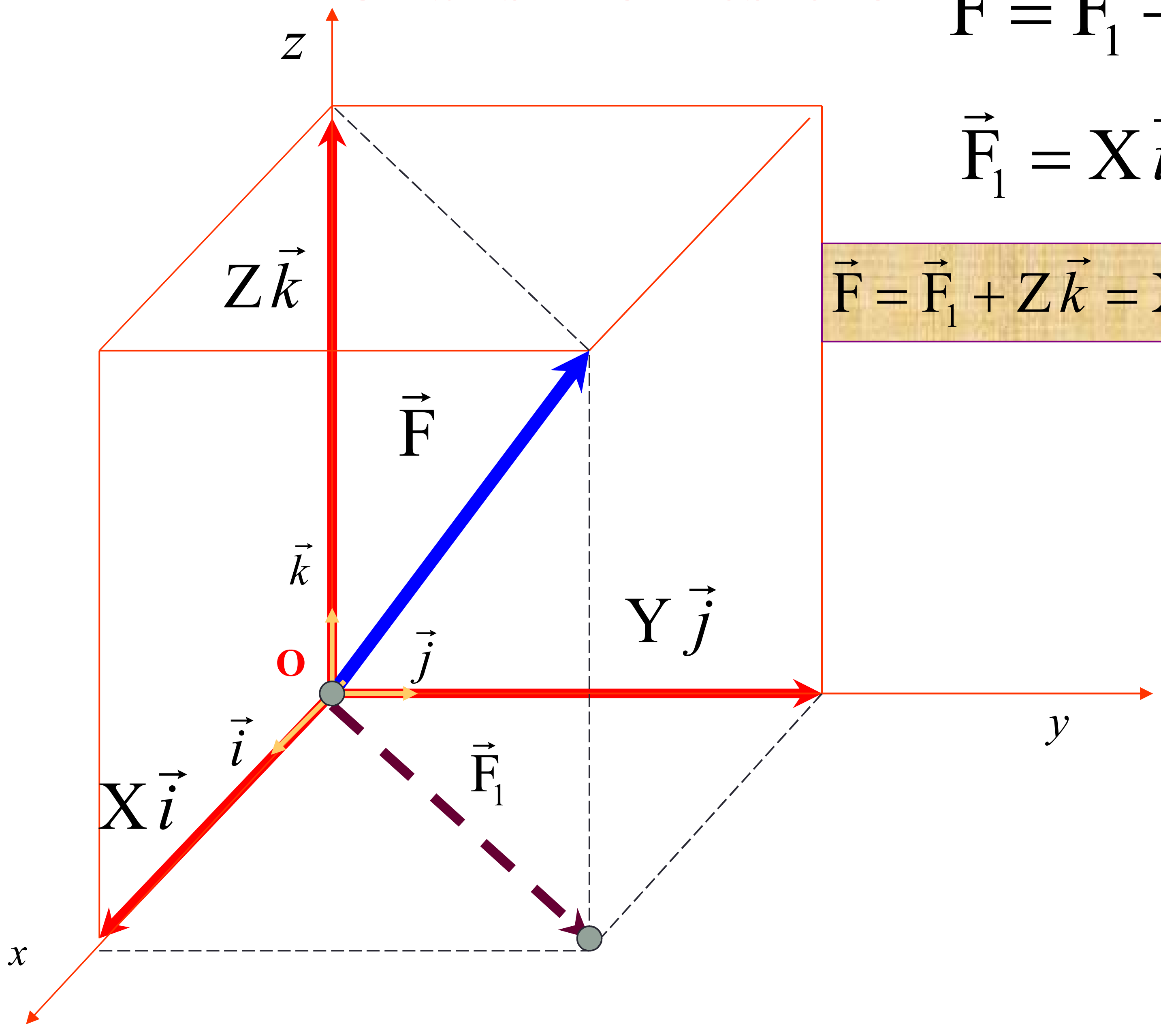
Razlaganje sile na tri pravca L_1,L_2 i L_3, koji ne leže u istoj ravni geometrijskim postupkom - sila može prvo primenom pravila paralelograma da se razloži na komponentu koja leži u ravni OABC i komponentu na pravoj L_3, a zatim se komponenta razloži takođe primenom pravila paralelograma u pravcima L_1 i L_2

RAZLAGANJE SILE U PROSTORU

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + Z\vec{k}$$

$$\vec{F}_1 = X\vec{i} + Y\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_1 + Z\vec{k} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}}$$

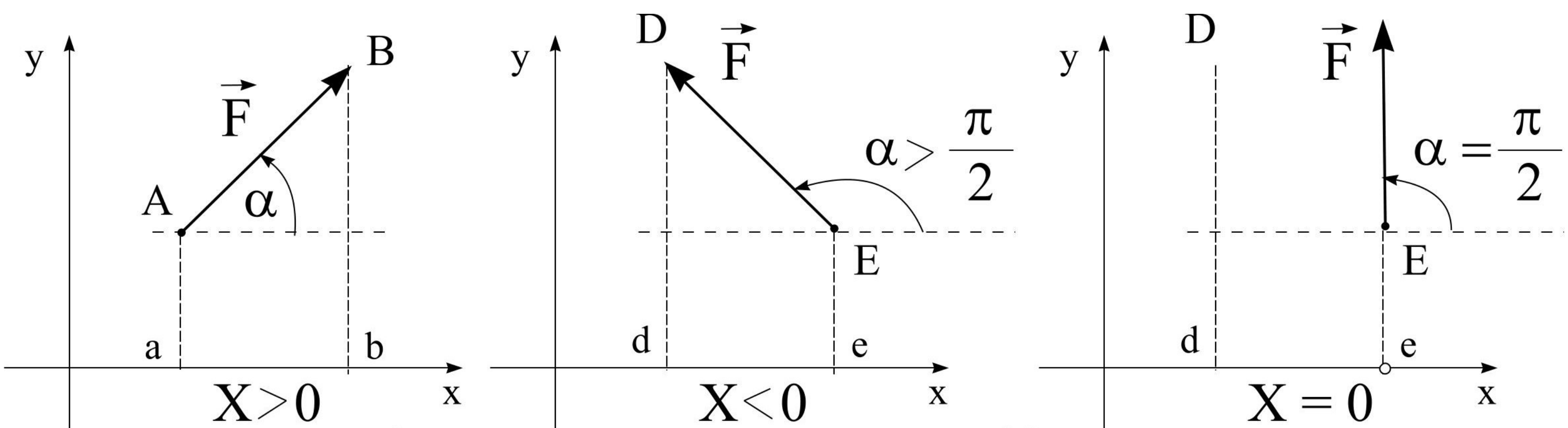


SLAGANJE SISTEMA SUČEONIH SILA – ANALITIČKI POSTUPAK

- **Slaganje više od dve sile primenom pravila paralelograma sila, tj. poligona sila, često zahteva mnogo geometrijskog i trigonometrijskog računanja kako bi se odredio intenzitet i pravac rezultante.**
- **Pri formiranju poligona sila potrebno je konstruisati orijentisane duži u odgovarajućoj razmeri, prenositi ih, nadovezivati itd. što predstavlja prilično nepraktičan postupak, naročito u slučaju prostornog sistema sila.**
- **Ovakvi problemi se jednostavnije rešavaju korišćenjem analitičkog postupka**

PROJEKCIJA SILE NA OSU

- Primena analitičke metode za rešavanje zadataka statike zasniva se na pojmu **projekcije sile na osu**.
- **Projekcija sile na osu je skalarna veličina jednaka proizvodu intenziteta sile i kosinusa ugla između pravca sile i pozitivnog smera ose.**

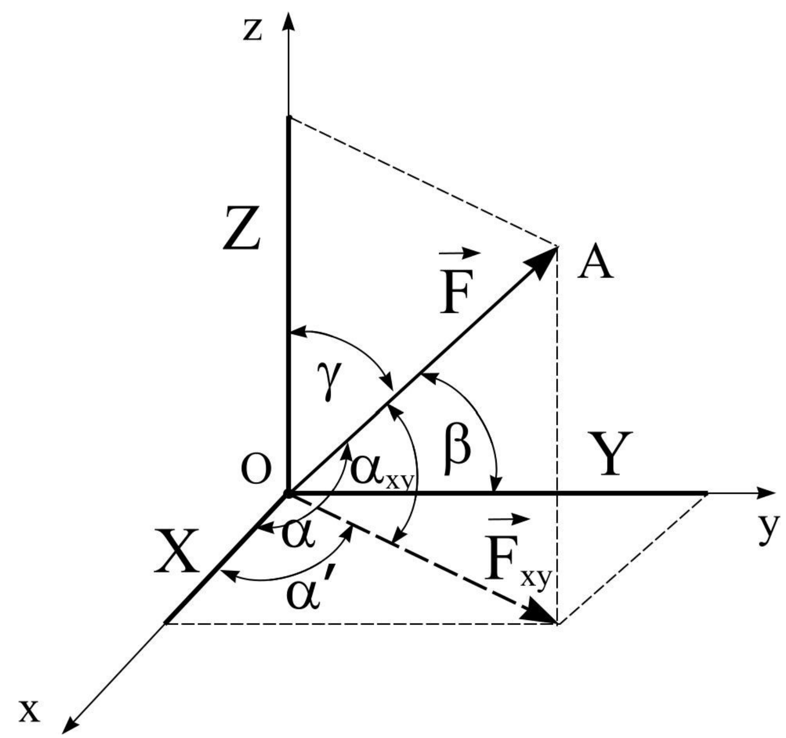


$$X = F\cos\alpha$$

$$X = F\cos\alpha = -F\cos\left(180^0 - \alpha\right)$$

PROJEKCIJA SILE NA RAVAN

Projekcija sile $\vec{F}$ na ravan Oxy je vektor $\vec{F}_{xy}$ koji se nalazi između projekcija početka i vrha sile $\vec{F}$ na tu ravan.



Za razliku od projekcije sile na osu, projekcija sile na ravan je vektor, jer ona nije okarakterisana samo svojom brojčanom vrednošću, već i pravcem i smerom u ravni xOy. Intenzitet ove projekcije je:

$$F_{xy} = F\cos\alpha_{xy}$$

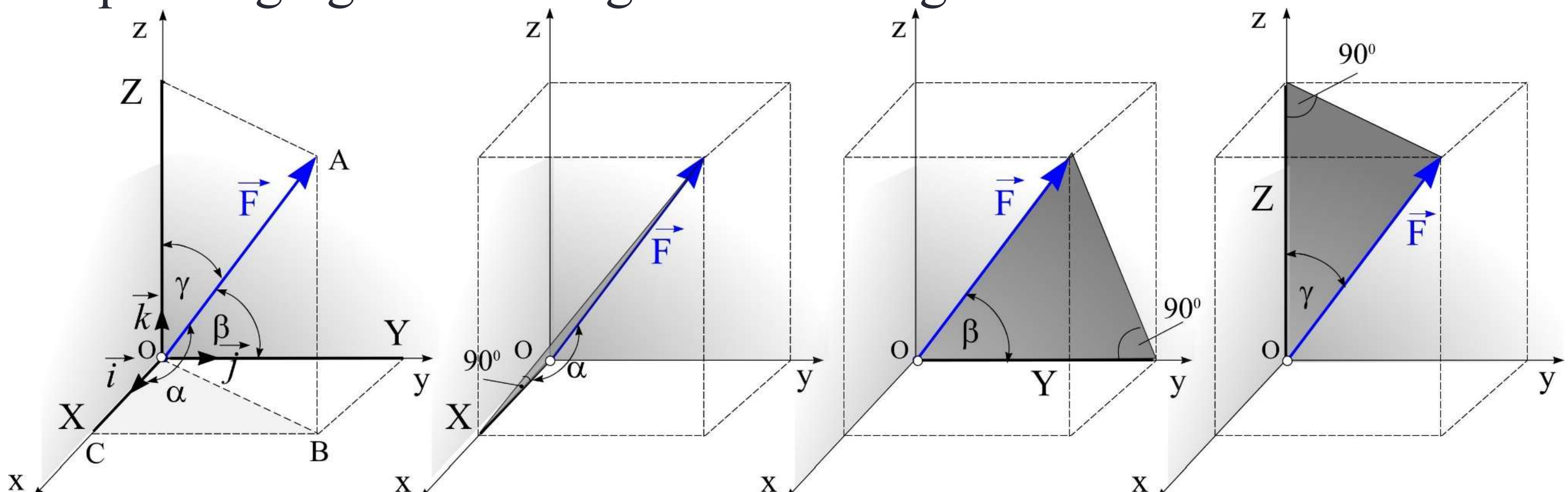
U nekim slučajevima, kada treba odrediti projekciju sile na osu, pogodno je prvo odrediti projekciju sile na ravan u kojoj se nalazi osa, a zatim nju projektovati na datu osu.

$$X = F_{xy}\cos\alpha' = F\cos\alpha_{xy}\cos\alpha',$$

$$Y = F_{xy}\sin\alpha' = F\cos\alpha_{xy}\sin\alpha'.$$

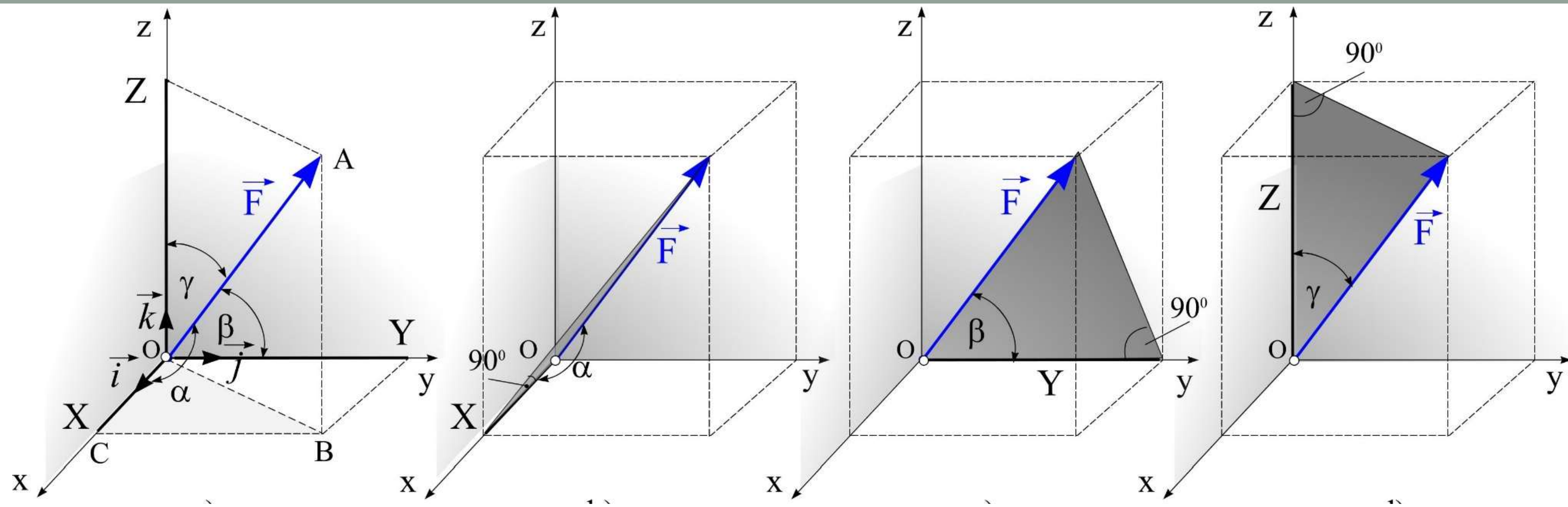
ANALITIČKI NAČIN DEFINISANJA SILE

- Vektor koji predstavlja **silu u prostoru** može se prikazati u analitičkom obliku, ako je poznat intenzitet sile F i njen pravac, odnosno uglovi α, β i γ koje sila zaklapa sa koordinatnim osama. **Veličine F, α, β i γ potpuno određuju datu silu.**
- Sila je određena ako su poznate njene **projekcije X, Y i Z** na ose pravouglog Dekartovog koordinatnog sistema



$$X = F\cos\alpha, \quad Y = F\cos\beta, \quad Z = F\cos\gamma$$

Vektor sile: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$



Ako su poznate projekcije sile X, Y i Z, onda se intenzitet sile određuje primenom Pitagorine teoreme na trouglove OBC i OAB

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

Intenzitet sile u prostoru je jednak dijagonali paralelopipeda čije su ivice projekcije X, Y i Z, a njen pravac je definisan kosinusima uglova koje ona zaklapa sa osama:

$$\cos\alpha = \frac{X}{F}, \qquad \cos\beta = \frac{Y}{F}, \qquad \cos\gamma = \frac{Z}{F}.$$

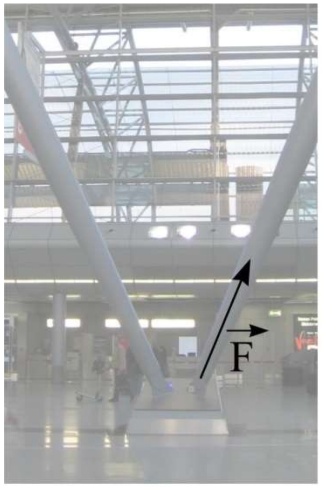
PRIMER ODREĐIVANJA PROJEKCIJA SILA U PROSTORU

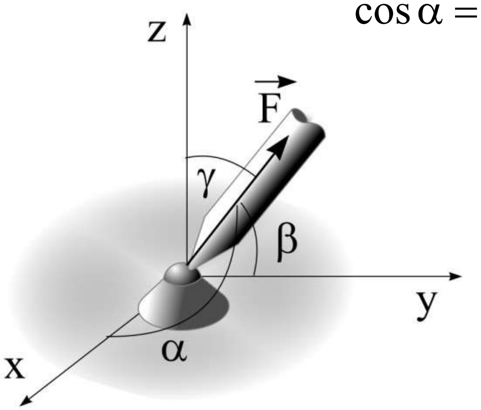
Štap prikazan na slici napregnut je silom F= 40 kN. Vektor sile izraziti preko njegovih komponenata, ako je poznato da je ugao koji vektor zaklapa sa y osom $\beta = 45^0$, a sa z osom $\gamma = 60^0$.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2 45^0 + \cos^2 60^0 = 1,$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\cos^2 45^0 - \cos^2 60^0} = \sqrt{1-(0,707)^2-(0,5)^2} = \pm 0,5.$$





Dobijena su dva rešenja od kojih je samo jedno realno.

Ugao je ili $\alpha = \arccos(+0,5) = 60^0$ ili

$$\alpha = \arccos(-0,5) = -60^0 = 180^0 - 60^0 = 120^0$$

Kako su projekcije sile na ose y i z pozitivne, jer su uglovi β i γ oštri, na osnovu slike se može zaključiti da je projekcija sile na osu x negativna, tj. da se sila nalazi u drugom oktantu, a to znači da je **realno drugo rešenje.**

Projekcije vektora sile:

$$X = F\cos\alpha = F\cos 120^0 = 40(-0,5) = -20\,\mathrm{kN},$$

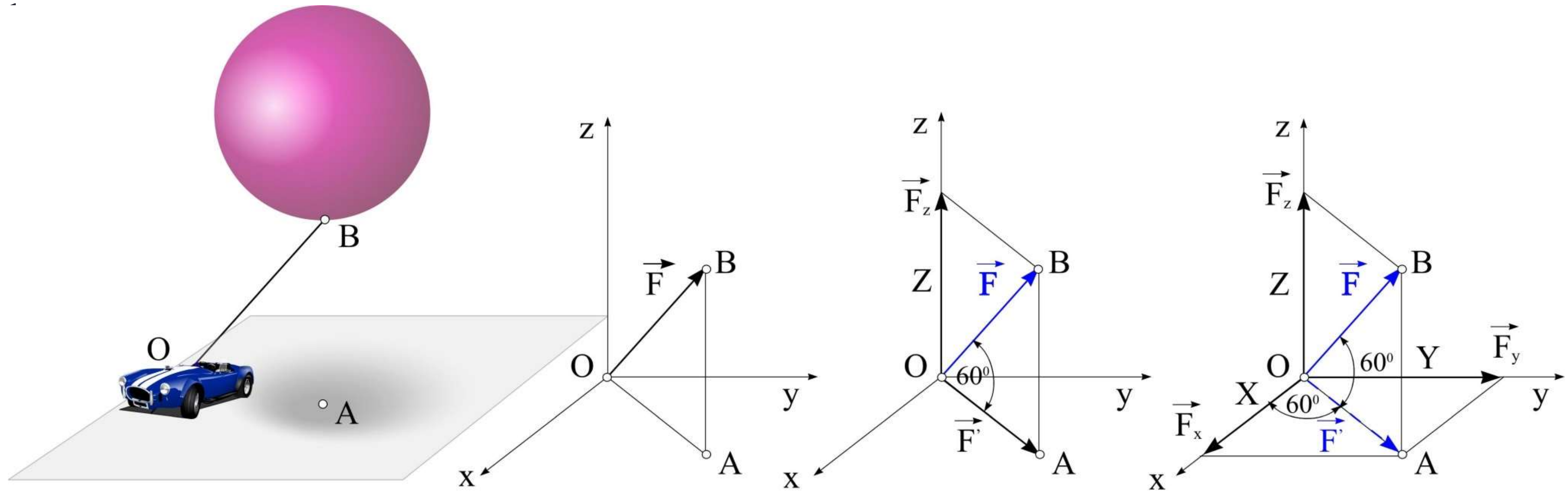
$$Y = F\cos\beta = F\cos 45^0 = 40\frac{\sqrt{2}}{2} = 28,28\,\mathrm{kN},$$

$$Z = F\cos\gamma = F\cos 60^0 40 = 40\frac{\sqrt{3}}{2} = 34,64\,\mathrm{kN}.$$

Vektor sile: $\vec{F} = -20\vec{i} + 28,28\vec{j} + 34,64\vec{k} \quad (\mathrm{kN})$

PRIMER ODREĐIVANJA PROJEKCIJA SILA U PROSTORU

Uže prikazano na slici drži balon. Sila u užetu je 700 N. Projekcija tačke B na horizontalnu ravan xOy je u tački A. Ako je ugao između OA i x ose 60^0, a između OA i vektora sile takođe 60^0, odrediti projekcij sile na ose x, y i z i predstaviti silu preko njenih



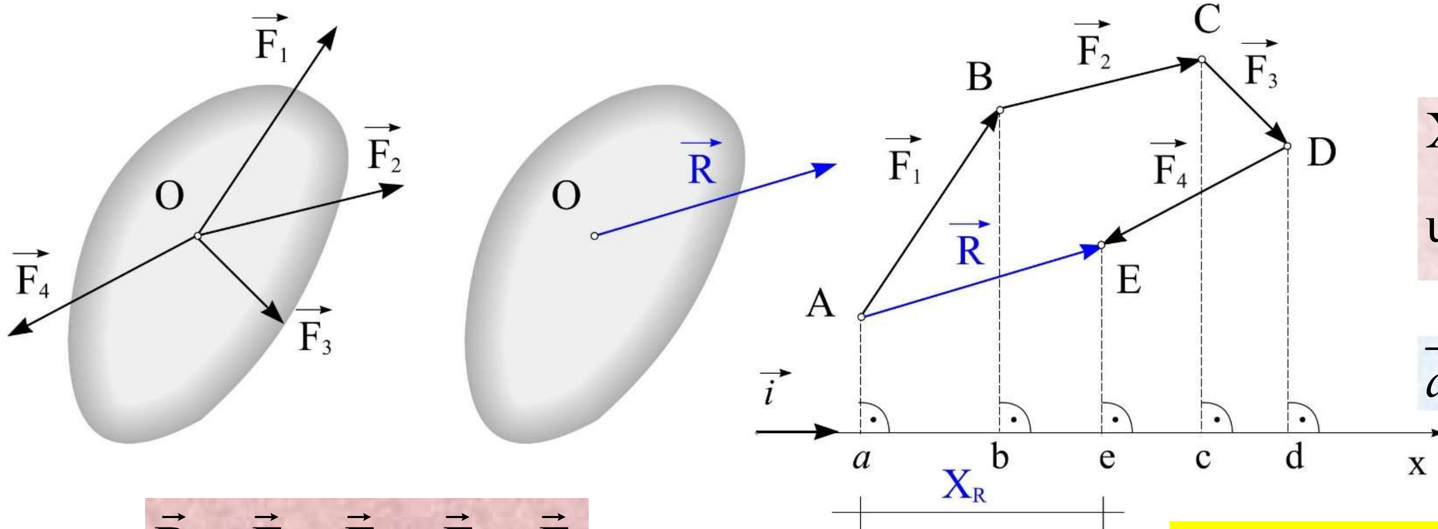
$$F' = F\cos 60^0 = 700\frac{1}{2} = 350\,\text{N},\quad Z = F\sin 60^0 = 700\frac{\sqrt{3}}{2} = 606{,}22\,\text{N},$$

$$X = F'\cos 60^0 = 350\frac{1}{2} = 175\,\text{N},\quad Y = F'\sin 60^0 = 350\frac{\sqrt{3}}{2} = 303{,}11\,\text{N}.$$

$$\vec{F} = 175\vec{i} + 303{,}11\vec{j} + 606{,}22\vec{k}\quad (\text{N})$$

PROJEKCIJA ZBIRA VEKTORA NA OSU

Teorema: **Projekcija rezultante više vektora na neku osu jednaka je algebarskom zbiru projekcija komponentnih vektora na tu istu osu.**



$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = u_F\left(\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} - \overline{de}\right)$$

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} - \overline{de} = \overline{ae}$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = u_F\,\overline{ae} = X_R$$

$$X_1 = u_F\,\overline{ab}, \quad X_2 = u_F\,\overline{bc}, \quad X_3 = u_F\,\overline{cd}, \quad X_4 = -u_F\,\overline{de},$$

$$X_R = u_F\,\overline{ae}$$

$$\boxed{X_R = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i}$$

ANALITIČKI NAČIN ODREĐIVANJA REZULTANTE PROSTORNOG SISTEMA SUČELJNIH SILA

Da bi se analitičkim postupkom odredio intenzitet, pravac i smer rezultante jednog sistema sila, potrebno je odrediti projekcije svih sila na ose odabranog referentnog koordinatnog sistema Oxyz.

$$X_R = \sum X_i, \quad Y_R = \sum Y_i, \quad Z_R = \sum Z_i$$

$$R = \sqrt{X_R{}^2 + Y_R{}^2 + Z_R{}^2},$$ intenzitet rezultante sistema sučeljnih sila

$$\cos\alpha_R = \frac{X_R}{R}, \quad \cos\beta_R = \frac{Y_R}{R}, \quad \cos\gamma_R = \frac{Z_R}{R},$$ pravac rezultante sistema sučeonih sila

$\vec{R}$ **Rezultanta sistema sila sa zajedničkom napadnom tačkom jednaka je vektorskom zbiru svih sila i deluje u zajedničkoj napadnoj tački**

$$\boxed{\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}$$

Rezultanta se definiše na drugi način kao vektorski zbir komponenata:

$$\vec{R} = X_R\,\vec{i} + Y_R\,\vec{j} + Z_R\,\vec{k}$$

$$X_R = \sum X_i, \quad Y_R = \sum Y_i, \quad Z_R = \sum Z_i$$

Intenzitet rezultante

u ravni

$$R = \sqrt{X_R{}^2 + Y_R{}^2}$$

u prostoru

$$R = \sqrt{X_R{}^2 + Y_R{}^2 + Z_R{}^2}$$

Pravac rezultante

u ravni

$$\cos\alpha_R = \frac{X_R}{R}, \quad \cos\beta_R = \frac{Y_R}{R}$$

u prostoru

$$\cos\alpha_R = \frac{X_R}{R}, \quad \cos\beta_R = \frac{Y_R}{R}, \quad \cos\gamma_R = \frac{Z_R}{R}$$

RAVNOTEŽA SISTEMA SUČELJNIH SILA

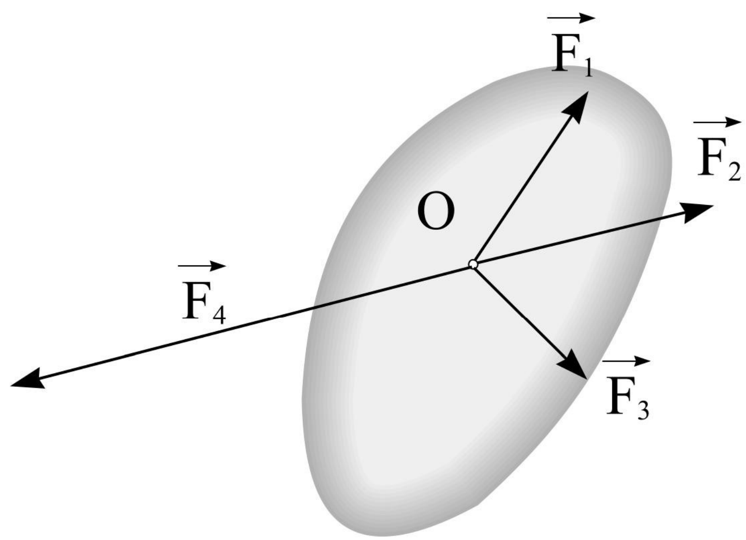
Potreban i dovoljan uslov ravnoteže sistema sučeljnih sila koje deluju na kruto telo je da je rezultanta tih sila (glavni vektor) jednaka nuli

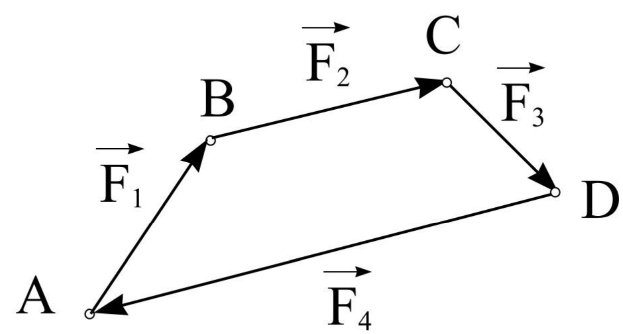
$$\vec{R}' = \vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$$

Ovo je **vektorski uslov ravnoteže** sistema sučeljnih sila.

GEOMETRIJSKI USLOV RAVNOTEŽE SISTEMA SUČELJNIH SILA

Kako se rezultanta određuje postupnom primenom pravila paralelograma, ili kao završna strana poligona konstruisanog od tih sila, to **rezultanata može da bude jednaka nuli samo kada se vrh poslednje sile u poligonu sila poklapa sa početkom prve sile, tj. kada je poligon sila zatvoren.**





Sistem sučeljnih sila je u ravnoteži ako je poligon sila zatvoren.

ANALITIČKI USLOVI RAVNOTEŽE SISTEMA SUČELJNIH SILA U PROSTORU

$$R = \sqrt{X_R^{\,2} + Y_R^{\,2} + Z_R^{\,2}} = 0$$

$$X_R = \sum X_i, \quad Y_R = \sum Y_i, \quad Z_R = \sum Z_i$$

Da bi rezultanta bila jednaka nuli moraju da budu sve tri projekcije rezultante na ose izabranog koordinatnog sistema jednake nuli

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0.$$

Ovo su analitički uslovi ravnoteže prostornog sistema sučeonih sila.
U slučaju prostornog sistema sučeljnih sila potrebno da budu zadovoljena tri uslova ravnoteže: **algebarski zbir projekcija sila na svaku od osa Dekartovog koordinatnog sistema mora biti jednak nuli**.

Najvažnije u ovom poglavlju

- Kako se određuje rezultanta prostornog sistema sučeljnih sila
- Kako se razlaže sila na tri pravca koji ne leže u istoj ravni
- Kako se sila predstavlja analitički preko svojih komponenata, odnosno projekcija
- Koji su uslovi ravnoteže sistema sučeljnih sila u prostoru