TEHNIČKA MEHANIKA I

11. PREDAVANJE

MOMEMT SILE U ODNOSU NA TAČKU I U ODNOSU NA OSU
SPREGOVI SILA U PROSTORU
PROIZVOLJNI SISTEMI SILA U PROSTORU

Str 99-123 knjiga Poglavlje 5.1.4 – Poglavlje 5.1.10 – MOMENT SILE
Str 130-143 knjiga Poglavlje 5.3 – Spreg sila
Str 243-266 knjiga Poglavlje 11 – PROIZVOLJNI SISTEMI SILA U PROSTORU

ŠTA ĆEMO NAUČITI U OVOM POGLAVLJU?

- **Vektorska formulacija momenta sile u odnosu na tačku**
- **Analitički način određivanja momenta sile u odnosu na tačku**
- **Moment sile u odnosu na osu**
- **Analitički način određivanja momenta sile u odnosu na ose**
- **Zavisnost između momenta sile u odnosu na tačku i momenta sile u odnosu na osu**
- **Ekvivalentnost spregova**
- **Slaganje spregova u prostoru**
- **Uslovi ravnoteže spregova u prostoru**

MOMENT SILE U ODNOSU NA TAČKU

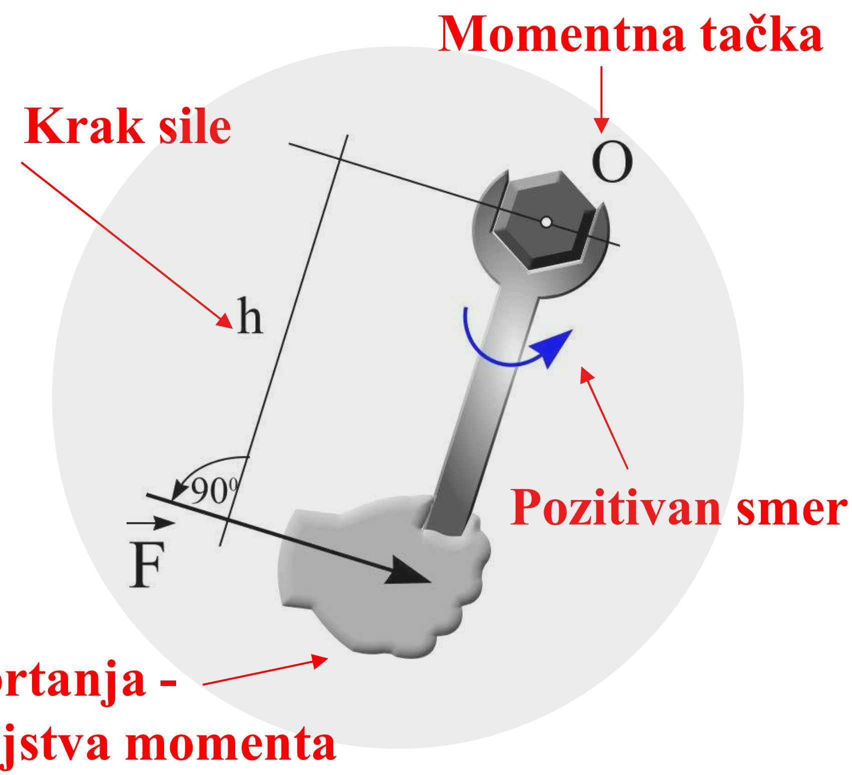
Dejstva sila ne zavise samo od njihovih intenziteta i pravaca, već i od obrtnih efekata koje one izazivaju.

Poznato je iz svakodnevnog života da mnoga tela pod dejstvom sila, tj. pod uticajem drugih tela vrše obrtna kretanja.

Mehaničke veličine kojima se definiše obrtno dejstvo sile su moment sile u odnosu na tačku, moment sile u odnosu na osu i spreg sila.

MOMENT SILE U ODNOSU NA TAČKU

Sila $\vec{F}$ teži da izazove obrtanje ključa oko tačke O, odnosno oko ose z koja prolazi kroz tačku O i upravna je na ravan obrtanja. Ovu ravan čine tačka obrtanja O i napadna linija sile $\vec{F}$

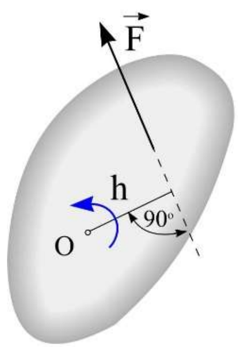


Što je veća sila ili normalno rastojanje h između tačke O i napadne linije sile, veći je intenzitet tog obrtanja

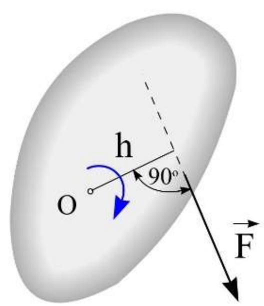
Intenzitet momenta zavisi od intenziteta sile koja izaziva rotaciju i dužine kraka h.

$$M_O\left(\vec{F}\right) = \pm\, F\, h$$

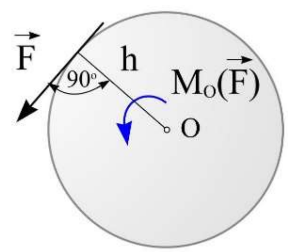
Smer je pozitivan ako teži da obrne telo u smeru suprotnom obrtanju kazaljke na satu (pozitivan matematički smer), a negativan ako teži da obrne telo u smeru obrtanja kazaljke na satu. Smer se može odrediti pravilom desne ruke.

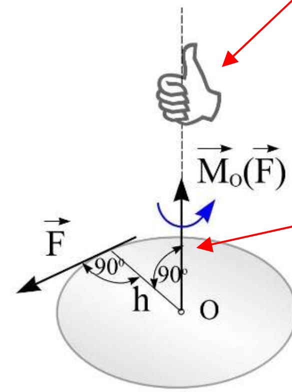


pozitivan

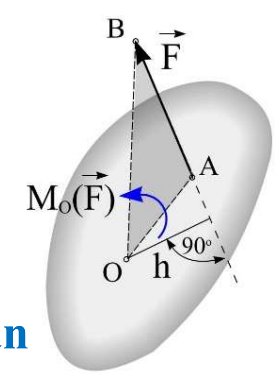


negativan

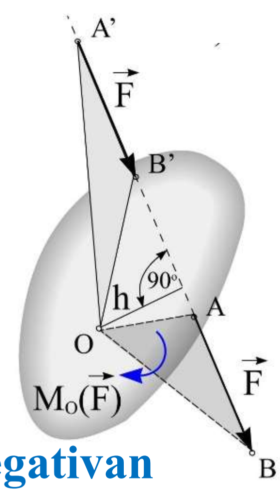




Vektor momenta sile je normalan na ravan obrtanja



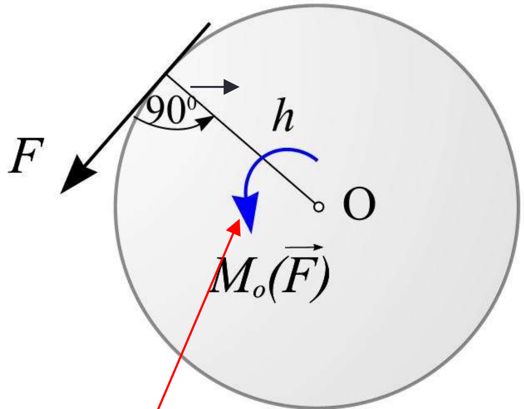
pozitivan

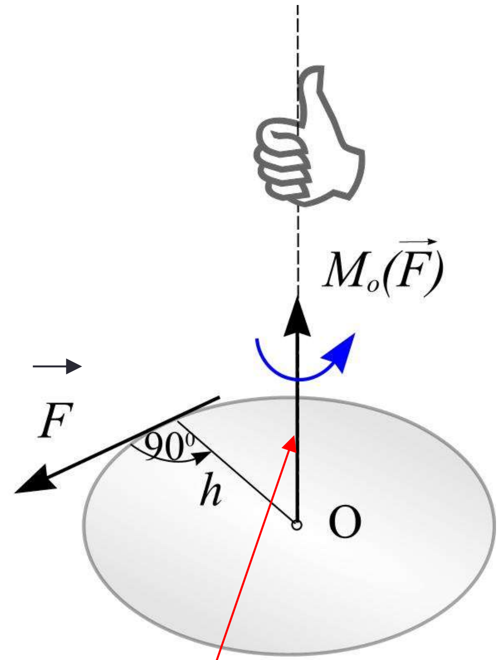


negativan

Moment sile je vektor jer ga karakteriše
- **Pravac**
- **Intenzitet**
- **Smer**

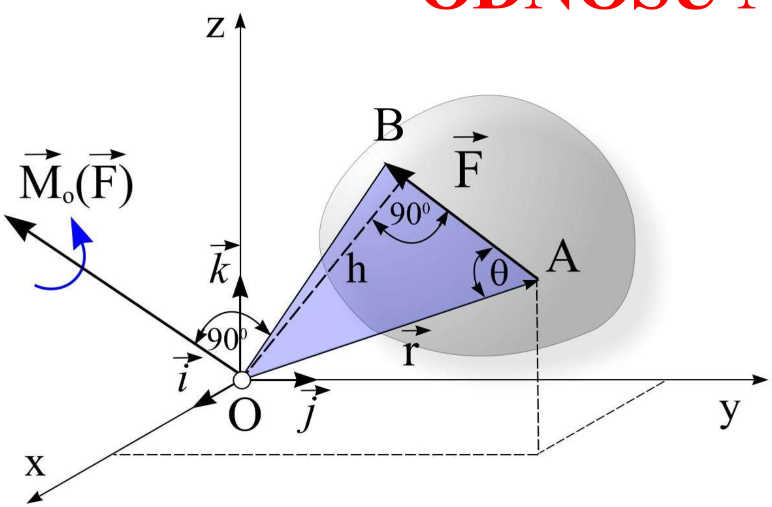
Moment sile se ne menja ako se sila premesti u bilo koji položaj duž njene napadne linije, jer proizvod F h ostaje nepromenjen.

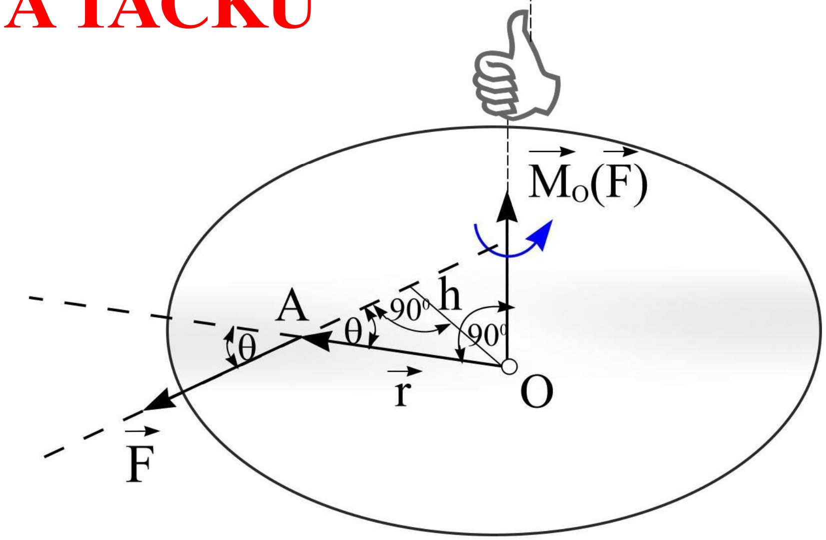




Moment sile u odnosu na tačku se ilustruje kružnom linijom sa strelicom, odnosno kružnom linijom sa strelicom i vektorom $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)$ da bi se razlikovao od vektora sile.

VEKTORSKA FORMULACIJA MOMENTA SILE U ODNOSU NA TAČKU





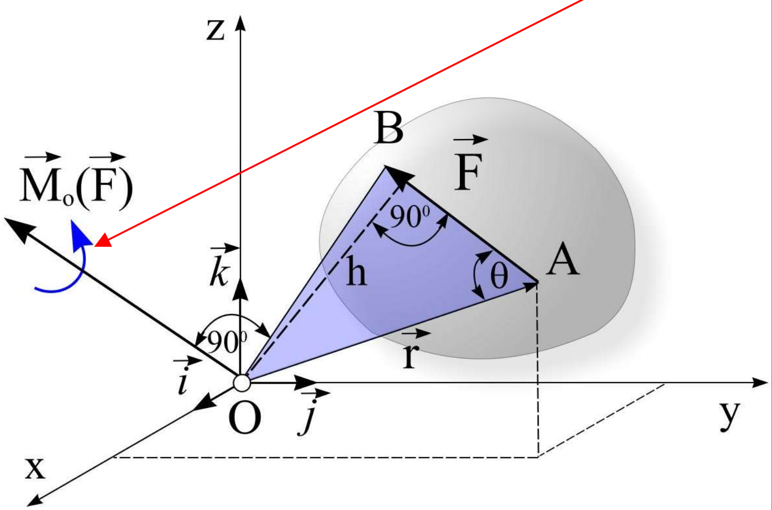
$\vec{F}$ Prostorna sila koja deluje u tački A tela

$\vec{r}$ Vektor položaja tačke A, čiji je početak u tački O, oko koje telo može da se obrće

$$\overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$

Moment sile $\vec{F}$ u odnosu na tačku O jednak je vektorskom proizvodu vektora položaja i sile.

Str 107-115 knjiga MOMENT SILE U ODNOSU NA TAČKU



vektorski proizvod dva vektora treći vektor koji je po intenzitetu jednak:

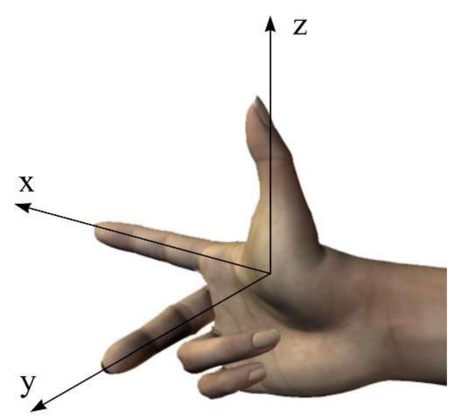
$$\boxed{M_O(\vec{F}) = r\,F \sin\theta}$$

$$r \sin\theta = h$$

$$\boxed{M_O(\vec{F}) = F\,h}$$

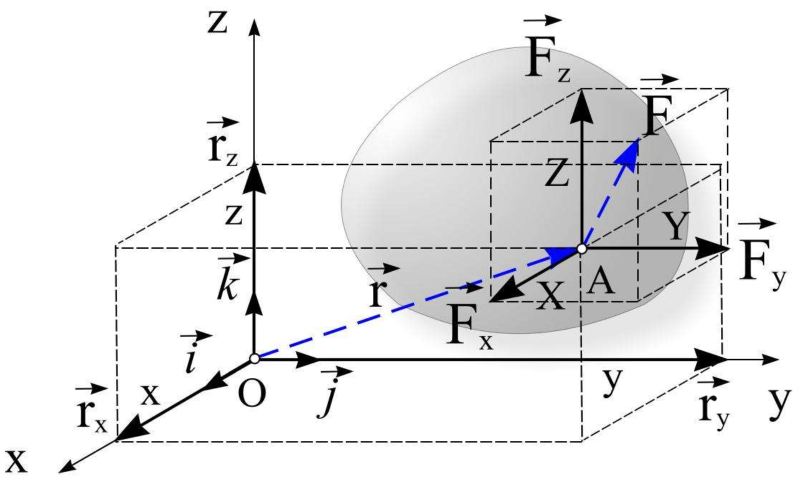
Pravac vektora definisanog vektorskim proizvodom je pravac normale povučene kroz tačku O na ravan vektora $\vec{r}$ i $\vec{F}$ tj. na ravan obrtanja OAB.

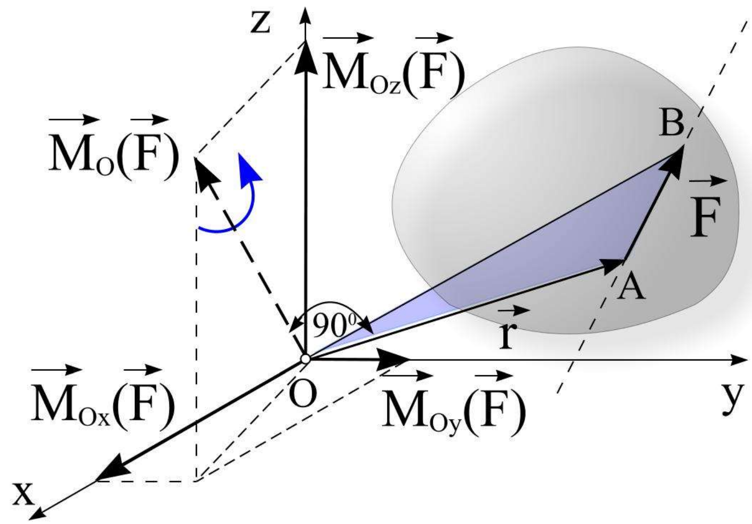
Smer momenta sile u odnosu na tačku je određen pravilom desnog zavrtnja, ili desne ruke, kao što se primenjuje kod vektorskog proizvoda.



Analitički način određivanja momenta sile u odnosu na tačku

- Određivanje momenta sile za tačku pomoću vektorskog proizvoda





$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$
$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k},$$

x, y i z koordinate napadne tačke sile

X, Y i Z projekcije sile na ose

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = (yZ - zY)\vec{i} + (zX - xZ)\vec{j} + (xY - yX)\vec{k}$$

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)=\left(yZ-zY\right)\vec{i}+\left(zX-xZ\right)\vec{j}+\left(xY-yX\right)\vec{k}$$

komponente vektora momenta sile u odnosu na tačku u pravcu koordinatnih osa

$$\vec{M}_{Ox}\left(\vec{F}\right)=\left(yZ-zY\right)\vec{i}$$

$$\vec{M}_{Oy}\left(\vec{F}\right)=\left(zX-xZ\right)\vec{j}$$

$$\vec{M}_{Oz}\left(\vec{F}\right)=\left(xY-yX\right)\vec{k}$$

analitički izrazi momenta sile u odnosu na tačku O

Ako su projekcije vektora momenta sile u odnosu na tačku poznate intenzitet vektora momenta sile u odnosu na tačku, kao i njegov pravac se sračunavaju kao:

$$\left|\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)\right|=M_O(\vec{F})=\sqrt{\left(M_{Ox}\left(\vec{F}\right)\right)^2+\left(M_{Oy}\left(\vec{F}\right)\right)^2+\left(M_{Oz}\left(\vec{F}\right)\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(yZ-zY\right)^2+\left(zX-xZ\right)^2+\left(xY-yX\right)^2},$$

$$\cos\left(\vec{i},\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)\right)=\frac{M_{Ox}\left(\vec{F}\right)}{M_O\left(\vec{F}\right)},$$

$$\cos\left(\vec{j},\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)\right)=\frac{M_{Oy}\left(\vec{F}\right)}{M_O\left(\vec{F}\right)},$$

$$\cos\left(\vec{k},\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)\right)=\frac{M_{Oz}\left(\vec{F}\right)}{M_O\left(\vec{F}\right)}.$$

Ukoliko se momentna tačka ne nalazi u koordinatnom početku može se odrediti moment sile u odnosu na tačku definisanjem vektora položaja na osnovu poznatih koordinata tačke u kojoj deluje sila (na primer B) i koordinata momentne tačke (na primer A):

$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

U tom slučaju moment sile u odnosu na tačku A je:

$$\overrightarrow{M}_A(\vec{F}) = \vec{r}_{AB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ X & Y & Z \end{vmatrix} =$$

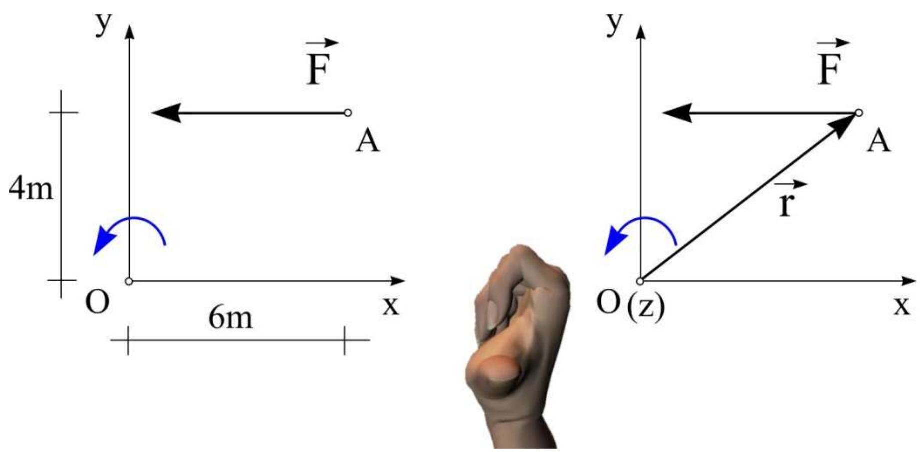
$$= \left[(y_B - y_A)Z - (z_B - z_A)Y\right]\vec{i} +$$

$$+ \left[(z_B - z_A)X - (x_B - x_A)Z\right]\vec{j} +$$

$$+ \left[(x_B - x_A)Y - (y_B - y_A)X\right]\vec{k}.$$

Primeri određivanja vektora momenta sile u odnosu na tačku

Sila intenziteta 2 kN leži u ravni xOy, paralelna je sa osom x i deluje u tački A, čije su koordinate (6 m, 4 m, 0). Odrediti vektor momenta sile u odnosu na tačku O.

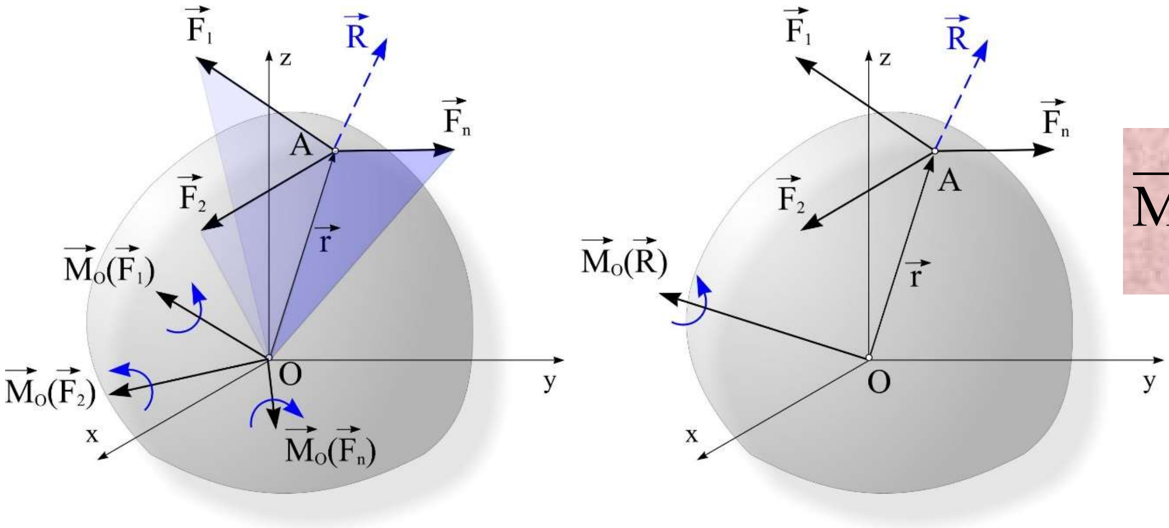


$$\vec{F} = -2\vec{i}\ \left(\text{kN}\right), \qquad \vec{r} = 6\vec{i} + 4\vec{j}\ \left(\text{m}\right)$$

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8\vec{k}\ \left(\text{kNm}\right)$$

Varinjonova teorema o momentu rezultante prostornog sistema sučeonih sila u odnosu na tačku

Moment rezultante prostornog sistema sučeljnih sila u odnosu na bilo koju tačku jednak je vektorskom (geometrijskom) zbiru momenata komponenata u odnosu na istu tačku.



$$\vec{M}_O\left(\vec{R}\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}\times\vec{F}_i\right)$$

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_1\right)=\vec{r}\times\vec{F}_1,\quad \vec{M}_O\left(\vec{F}_2\right)=\vec{r}\times\vec{F}_2,\quad \dots\quad ,\quad \vec{M}_O\left(\vec{F}_n\right)=\vec{r}\times\vec{F}_n$$

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\dots.+\vec{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

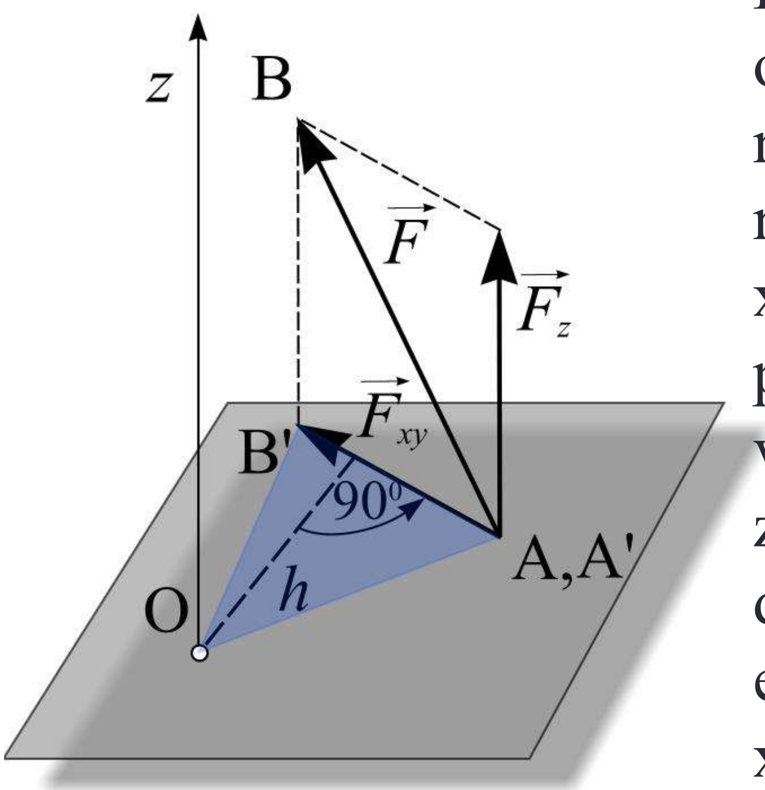
$$\vec{M}_O\left(\vec{R}\right)=\vec{r}\times\vec{R}$$

$$\vec{M}_O\left(\vec{R}\right)=\vec{r}\times\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\dots.+\vec{F}_n\right)=\vec{r}\times\vec{F}_1+\vec{r}\times\vec{F}_2+\dots+\vec{r}\times\vec{F}_n$$

MOMENT SILE U ODNOSU NA OSU

Mehanička veličina kojom se definiše obrtno dejstvo sile u odnosu na osu naziva se *momentom sile u odnosu na osu*.

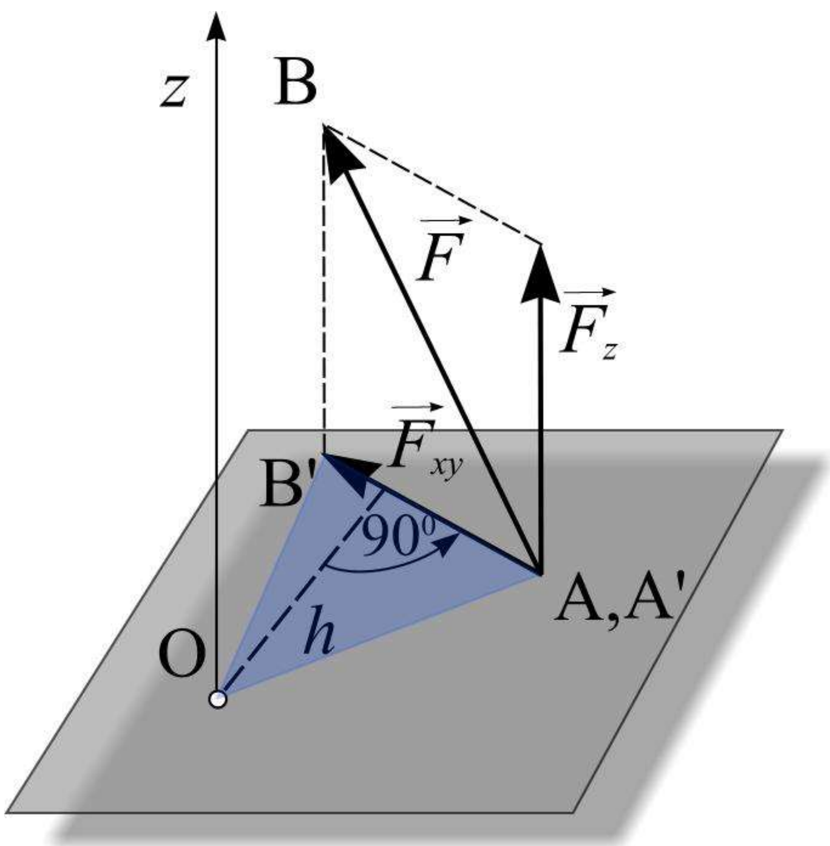
Ovo je još jedan od osnovnih pojmova statike.



Da bi se odredio moment date sile F u odnosu na osu z postavi se kroz tačku A ravan xOy, koja je upravna na osu z, i razloži se sila na dve komponente: u ravni xOy i u pravcu ose z. Komponenta u pravcu ose z nema obrtni efekat oko ose z, već samo teži da pomeri telo u pravcu ose z, što znači da je celokupni obrtni efekat date sile u odnosu na osu z jednak obrtnom efektu komponente $\vec{F}_{xy}$ koja leži u ravni xOy upravnoj na osu z

$$M_z\left(\vec{F}\right) = M_z\left(\vec{F}_{xy}\right)$$

Moment sile u odnosu na osu z izaziva obrtanje oko te ose, što znači da je ravan obrtanja xOy. Intenzitet momenta sile u odnosu na osu određuje se analogno intenzitetu momenta sile u odnosu na tačku:

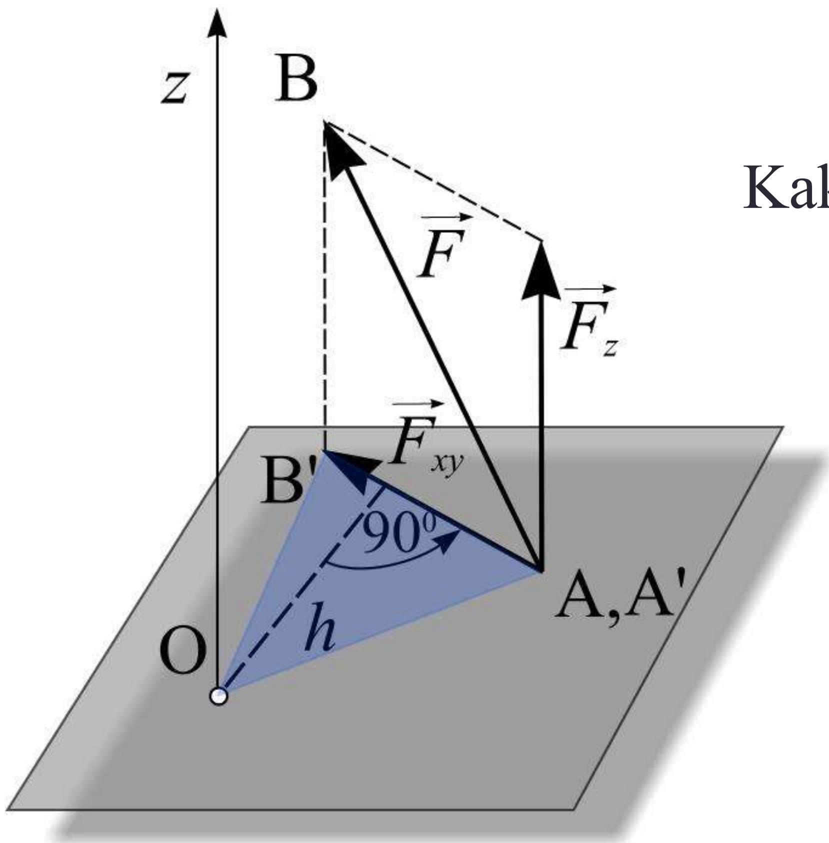


$$M_z(\vec{F}) = \pm F_{xy}\, h$$

Moment sile za osu je jednak proizvodu projekcije sile na ravan upravnu na osu i dužine normale spuštene iz presečne tačke ose i ravni na pravac projekcije sile.

Kako je moment sile $\vec{F}_{xy}$ u odnosu na osu z isti kao moment sile $\vec{F}_{xy}$ u odnosu na tačku O, u kojoj osa z prodire ravan xOy (normalno rastojanje između napadne linije sile i ose z, odnosno tačke O je isto), to je:

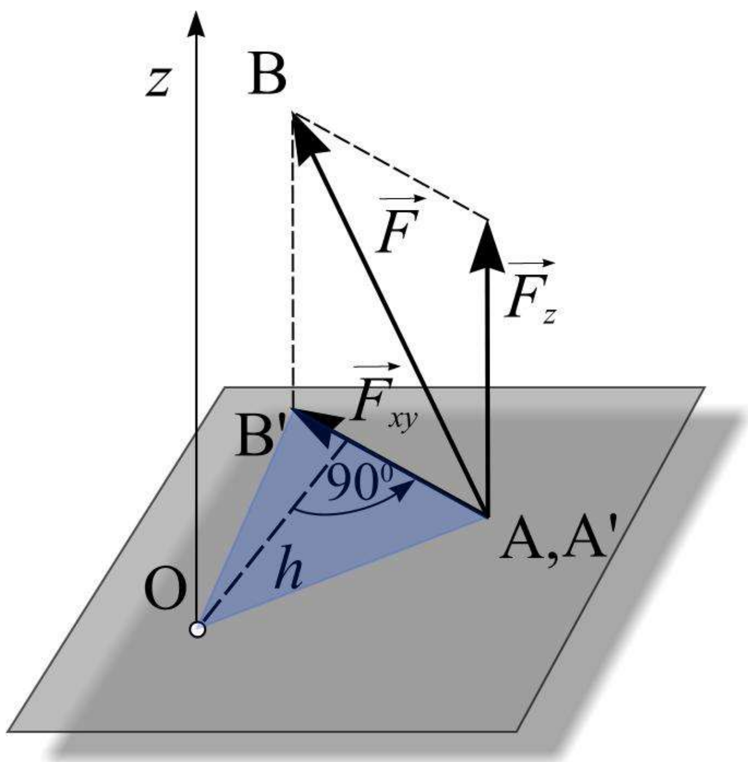
$$\boxed{M_z\left(\vec{F}_{xy}\right) = M_O\left(\vec{F}_{xy}\right)}$$



Kako je: $M_z\left(\vec{F}\right) = M_z\left(\vec{F}_{xy}\right)$

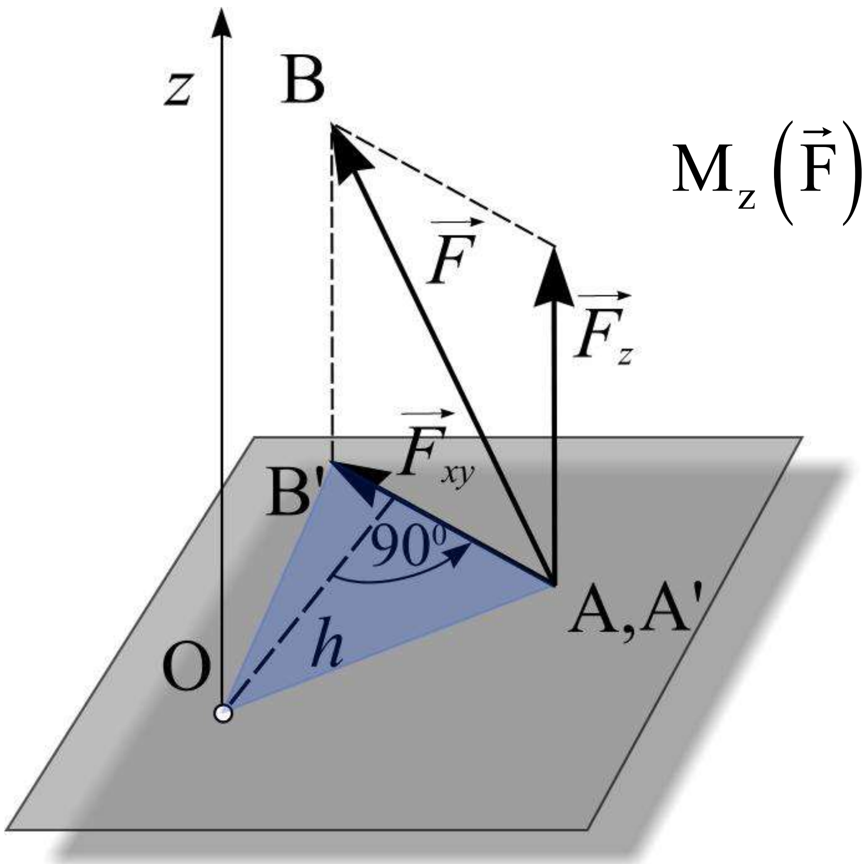
$$\boxed{M_z\left(\vec{F}\right) = M_O\left(\vec{F}_{xy}\right) = \pm F_{xy}\, h}$$

Moment sile za osu je skalarna veličina



Moment sile za osu je pozitivan ako, gledano iz pozitivnog kraja ose, projekcija sile hoće da okrene telo **u smeru suprotnom od smera kazaljke na satu**, dnosno, ako se, gledano prema vrhu ose vidi obrtanje projekcije sile u smeru **dasnog zavrtnja**.

Moment sile za osu je jednak dvostrukoj površini trougla čija je osnovica projekcija sile na ravan, koja je upravna na osu, a vrh mu je u tački prodora ose i normalne ravni.



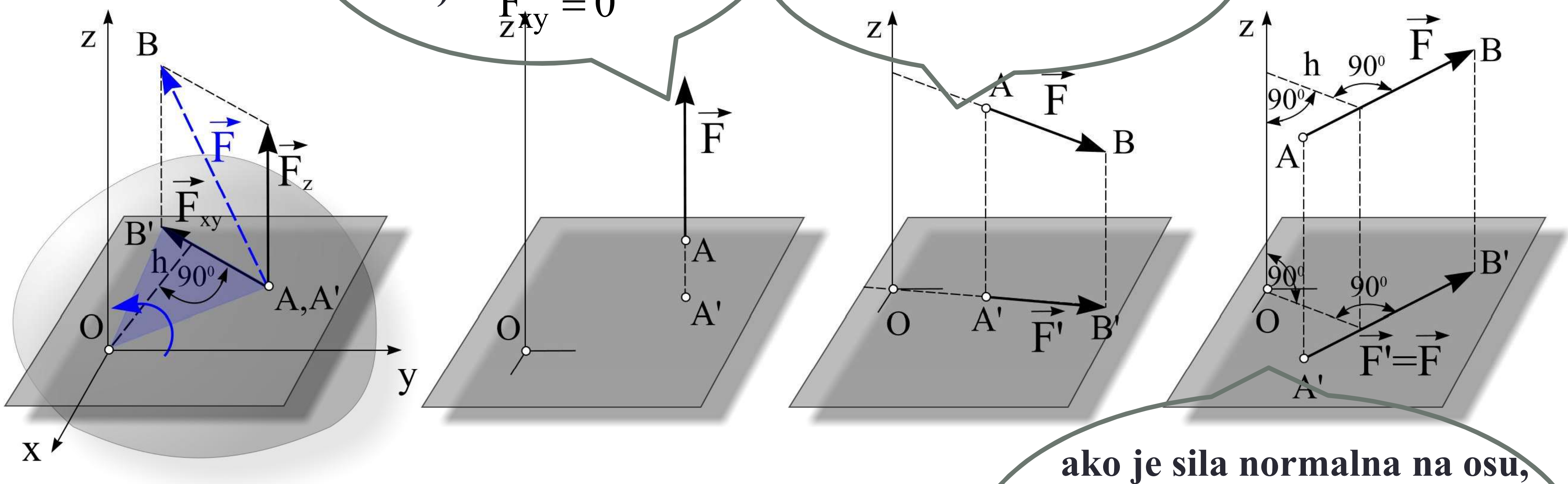
$$M_z\left(\vec{F}\right) = \pm 2 \cdot \text{površina}\, \Delta OA'B' = \pm F_{xy}\, h$$

Da bi se izračunao moment sile u odnosu na osu treba postaviti ravan normalnu na osu u bilo kojoj tački te ose, projektovati silu na tu ravan i sračunati veličinu te projekcije, povući normalu iz tačke prodora O na napadnu liniju projekcije sile na ravan i odrediti dužinu kraka h, izračunati proizvod projekcije i kraka i odrediti znak momenta.

Moment sile za osu je:

Jednak nuli ako je sila paralelna sa osom (sila i osa leže u istoj ravni) $\vec{F}_{xy} = 0$

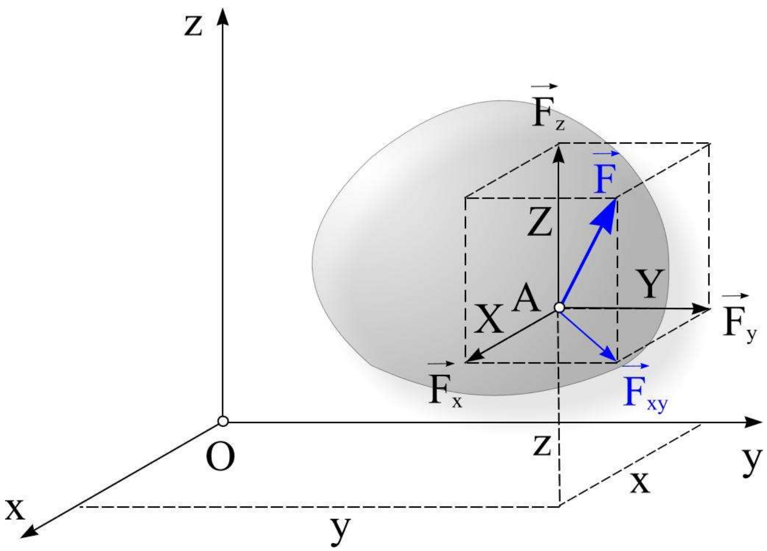
Jednak nuli ako napadna linija sile seče osu h=0



ako je sila normalna na osu, moment sile za osu je jednak proizvodu intenziteta sile i rastojanja između sile i ose jer je $\vec{F}_{xy} = \vec{F}$

Zaključak koji je posledica prva dva navedena slučaja je da je **moment sile u odnosu na osu jednak nuli ako sila i osa leže u istoj ravni (sila je ili paralelna sa osom ili je seče).**

ANALITIČKI NAČIN ODREĐIVANJA MOMENTA SILE U ODNOSU NA KOORDINATNE OSE



Da bi odredili moment sile F u odnosu na koordinatnu osu z, treba projektovati silu F na ravan xOy, a zatim komponentu $\vec{F}_{xy}$ razložiti na komponente

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = M_O(\vec{F}_x) + M_O(\vec{F}_y) = -X\,y + Y\,x$$

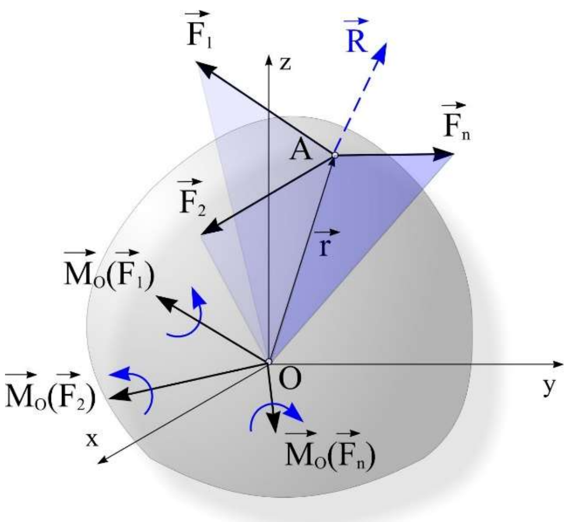
Analognim putem se određuju i momenti sile u odnosu na ose x i y

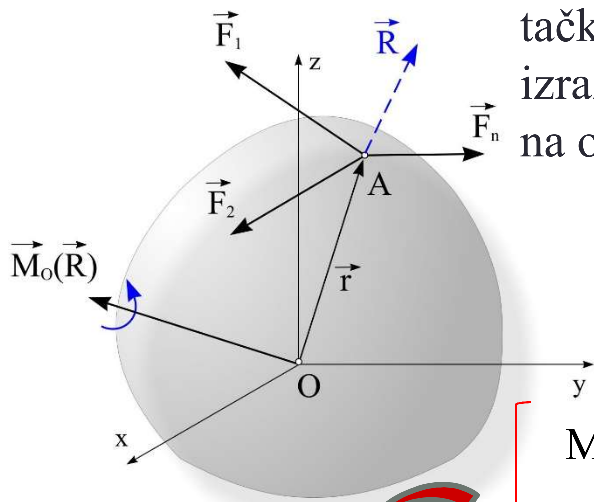
$$\left.\begin{aligned} M_x(\vec{F}) &= y\,Z - z\,Y, \\ M_y(\vec{F}) &= z\,X - x\,Z, \\ M_z(\vec{F}) &= x\,Y - y\,X. \end{aligned}\right\}$$

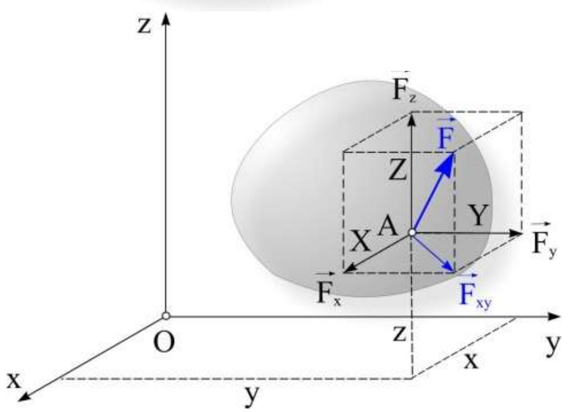
Izrazi za određivanje momenta sile u odnosu na koordinatne ose analitičkim putem

VARINJONOVA TEOREMA O MOMENTU REZULTANTE SISTEMA SUČEONIH SILA U ODNOSU NA OSU

Varinjonova teorema za sistem sučeonih sila u odnosu na osu se dokazuje potpuno analogno dokazu za tačku, pokazanom u **13.** Analitički izraz za moment rezultante u odnosu na osu x glasi:







$$M_x\left(\vec{R}\right) = y\,Z_R - z\,Y_R$$

$$M_x\left(\vec{R}\right) = y\sum Z_i - z\sum Y_i = \sum\left(y\,Z_i - z\,Y_i\right)$$

$$M_x\left(\vec{F}_i\right) = y\,Z_i - z\,Y_i$$

$$M_x\left(\vec{R}\right) = \sum M_x\left(\vec{F}_i\right)$$

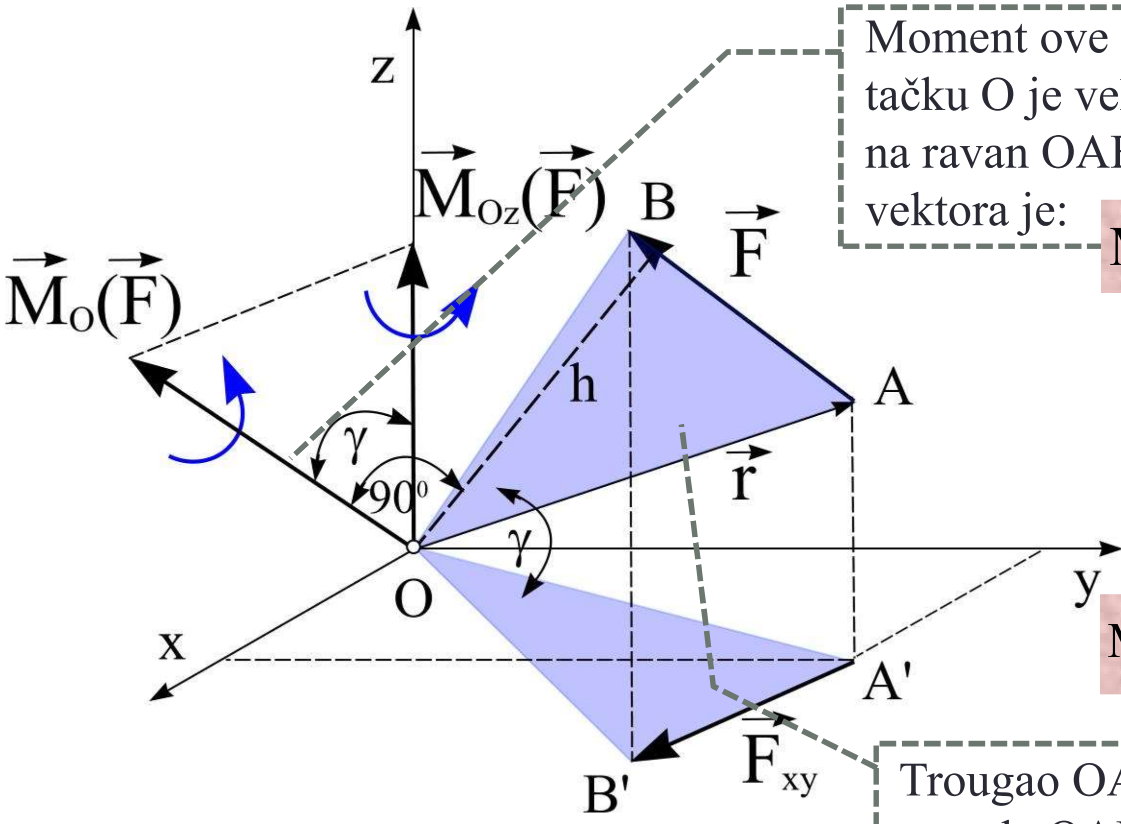
moment rezultante sistema sučeonih sila u odnosu na osu x

$$M_y\left(\vec{R}\right) = \sum M_y\left(\vec{F}_i\right),$$

$$M_z\left(\vec{R}\right) = \sum M_z\left(\vec{F}_i\right).$$

u odnosu na ose y i z

ZAVISNOST IZMEĐU MOMENTA SILE U ODNOSU NA TAČKU I MOMENTA SILE U ODNOSU NA OSU



Moment ove sile u odnosu na tačku O je vektor koji je upravan na ravan OAB – intenzitet ovog vektora je:

$$M_O(\vec{F}) = F\,h = 2 \cdot \text{površina } \Delta OAB$$

Ako se kroz tačku O postavi ravan xOy, upravna na osu z, i na nju projektuje sila, onda će moment te sile u odnosu na osu z biti:

$$M_z\left(\vec{F}\right) = M_O\left(\vec{F}_{xy}\right) = 2 \cdot \text{površina } \Delta OA'B'$$

Trougao OA’B’ je projekcija trougla OAB na ravan xy

Ugao između ravni u kojima leže ovi trouglovi, jednak je uglu γ između normala na te ravni, pa je:

$$\text{površina } \Delta OA'B' = \text{površina } \Delta OAB \cos\gamma \qquad / \cdot 2$$

$$\underbrace{2\,\text{površina}\;\;\Delta OA'B'}_{M_z\left(\vec{F}\right)} = \underbrace{\underbrace{2\,\text{površina}\;\Delta OAB}_{M_O\left(\vec{F}\right)}\cos\gamma}_{M_{Oz}\left(\vec{F}\right)}$$

$$M_z\left(\vec{F}\right) = M_O\left(\vec{F}\right)\cos\gamma$$

$$\boxed{M_z\left(\vec{F}\right) = M_z = M_O\left(\vec{F}\right)\cos\gamma = M_{Oz}\left(\vec{F}\right)}$$

Moment sile u odnosu na osu kroz posmatranu tačku jednak je projekciji momenta sile u odnosu na tačku na tu osu.

$$M_x\left(\vec{F}\right) = \left(yZ - zY\right), \qquad M_{Ox}\left(\vec{F}\right) = \left(yZ - zY\right),$$

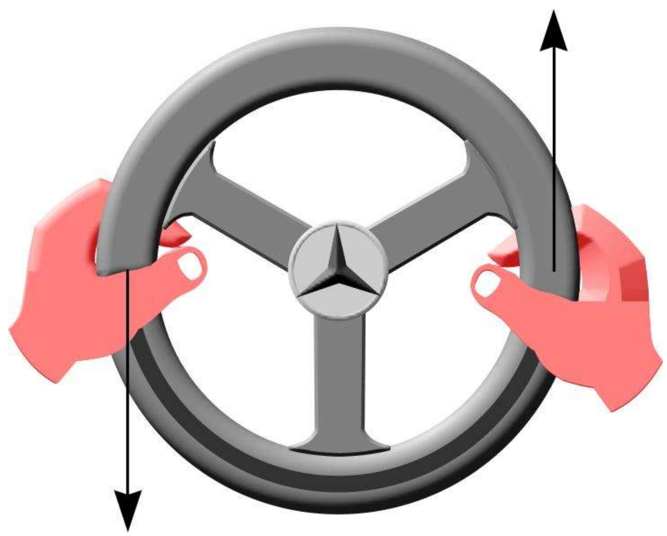
$$M_y\left(\vec{F}\right) = \left(zX - xZ\right), \qquad M_{Oy}\left(\vec{F}\right) = \left(zX - xZ\right),$$

$$M_z\left(\vec{F}\right) = \left(xY - yX\right), \qquad M_{Oz}\left(\vec{F}\right) = \left(xY - yX\right),$$

$$\boxed{\begin{aligned} M_x\left(\vec{F}\right) &= M_{Ox}\left(\vec{F}\right), \\ M_y\left(\vec{F}\right) &= M_{Oy}\left(\vec{F}\right), \\ M_z\left(\vec{F}\right) &= M_{Oz}\left(\vec{F}\right). \end{aligned}}$$

SPREG SILA

- **Spreg sila je sistem od dve paralelne sile istog intenziteta, suprotnih smerova, koje deluju na međusobnom rastojanju d.**
- **Sistem sila, koji obrazuje spreg, očigledno se ne nalazi u ravnoteži (nije zadovoljena aksioma dva), iako je rezultanta sprega sila jednaka nuli.**



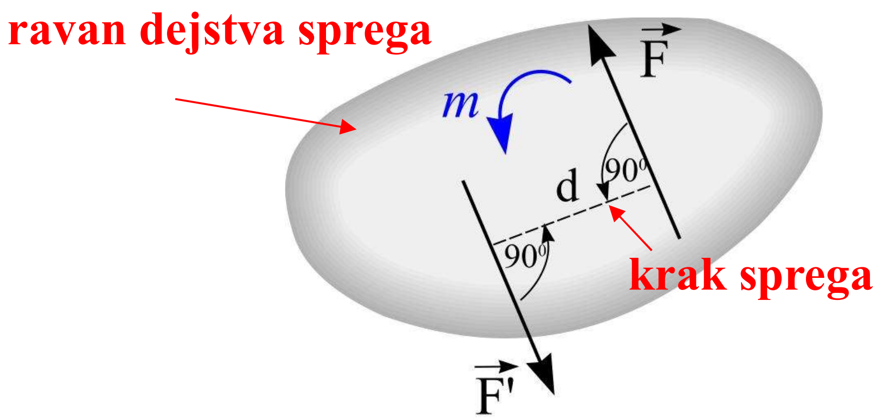
Str 130-143 knjiga

SPREG SILA

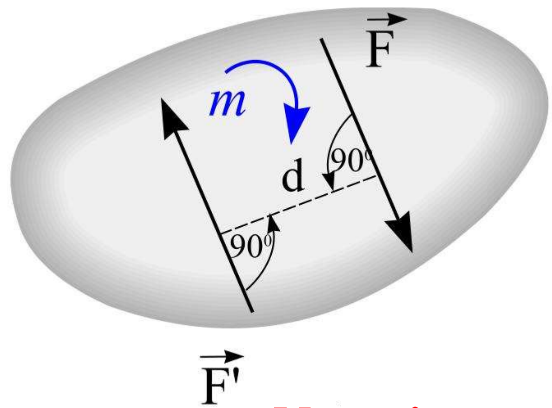
Kako je rezultanta sila sprega jednaka nuli, dejstvo sprega na telo se svodi na obrtni efekat koji zavisi od:

- **intenziteta sila sprega F i dužine kraka d;**
- **položaja ravni dejstva sprega;**
- **smera obrtanja sprega.**

Moment izazvan spregom sila zove se moment sprega.



Pozitivan moment sprega
spreg teži da obrne telo u smeru suprotnom obrtanju kazaljke na satu



$$m = \pm F d$$

Negativan moment sprega
spreg teži da obrne telo u smeru obrtanja kazaljke na satu

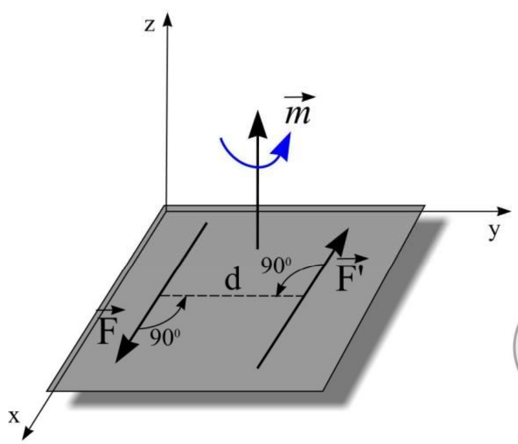
VEKTOR MOMENTA SPREG SILA

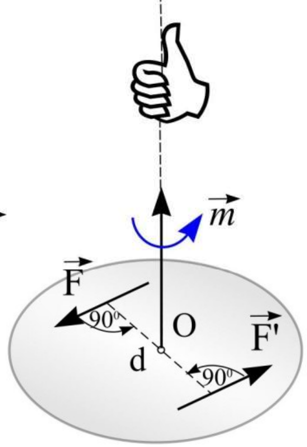
Intenzitet momenta sprega sila jednak je proizvodu intanziteta jedne od sila i normalnog rastojanja između napadnih linija sila sprega:

$$m = \pm F d$$

Za određivanje obrtnog dejstva, koje izaziva spreg sila, potrebno je poznavati **intenzitet momenta sprega sila, ravan dejstva sprega i smer obrtanja u toj ravni**. Prema tome, moment sprega sila je vektorska veličina i obeležava se sa $\vec{m}$

$$\vec{m} = m\vec{k} = (Fd)\vec{k}$$





Pozitivan znak vektora momenta sprega – obrtanje u smeru desnog zavrtnja

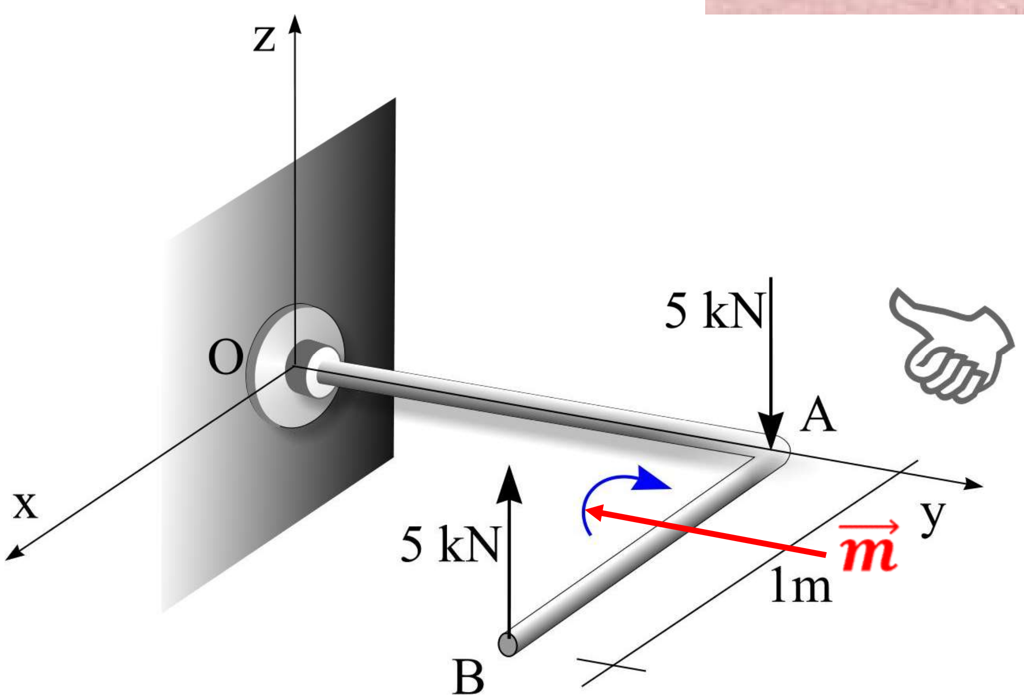
Moment sprega sila, kao i moment sile, meri se u **njutnmetrima**.

Primer

Odrediti moment sprega sila koji deluje na cev. Cev OAB je u horizontalnoj ravni, dok su sile sprega paralelne sa osom z.

Sile sprega se nalaze u ravni xOz tako da izazivaju obrtanje u toj ravni, tj. oko ose y, normalne na ravan. Intenzitet momenta sprega je:

$$m = \mathrm{F\ d} = 5 \cdot 1 = 5\ \mathrm{kNm}$$



Primenjujući pravilo desne ruke, ili desnog zavrtnja zaključuje se da je moment sprega negativan, tj. usmeren u negatinom smeru ose y, pa vektor momenta datog sprega glasi:

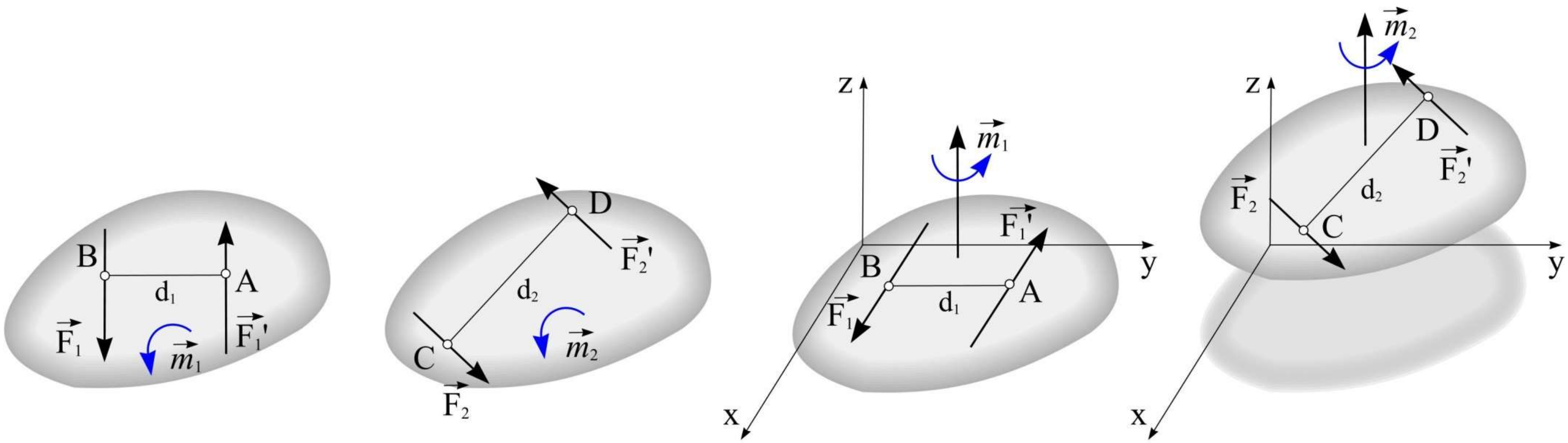
$$\vec{m} = -5\,\vec{j}\quad \mathrm{kNm}$$

EKVIVALENTNOST SPREGOVA SILA

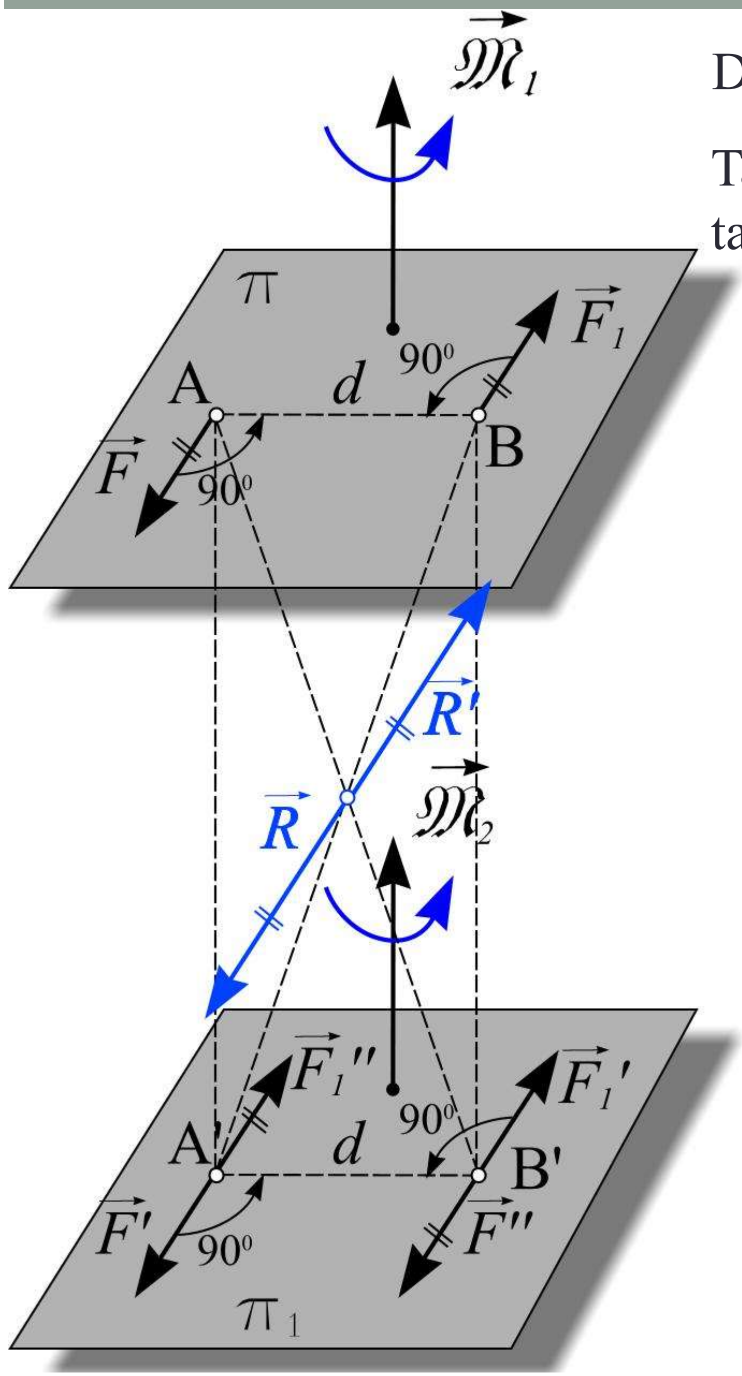
Dva sprega su ekvivalentna ako imaju isto dejstvo na telo – ako imaju isti pravac (iste ravni dejstva spregova ili paralelne ravni dejstva), iste intenzitete i iste smerove.

Ekvivalentnost je znači ispunjena ako je:

$$\vec{m}_1 = \vec{m}_2$$



$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$



Dat je spreg sila $(\vec{F}, \vec{F}_1)$ u ravni π, čiji je krak AB.

Tačke A i B se projektuju na ravan π_1 paralelnu ravni π, tako da se dobijaju tačke A' i B'.

$$(\vec{F}', \vec{F}_1'') \equiv 0 \qquad (\vec{F}'', \vec{F}_1') \equiv 0$$

$\vec{F}', \vec{F}_1'', \vec{F}'', \vec{F}_1'$ su istog intenziteta i paralelne silama datog sprega

$$\vec{F} + \vec{F}'' = \vec{R} \qquad \vec{F}_1 + \vec{F}_1'' = \vec{R}_1$$

$$(\vec{R}\,,\, \vec{R}_1) \equiv 0$$

Dobijen je spreg sila $(\vec{F}', \vec{F}_1')$ u ravni π_1

$$\vec{m}_1 = \vec{m}_2$$

Osobine spregova sila:

Spreg datog pravca, smera i intenziteta može se zameniti drugim spregom sila pod uslovom da su sile novog sprega u istoj ili paralelnoj ravni, da je smer dejstva i intenzitet (proizvod sile i kraka) isti.

Dejstvo sprega na telo se ne menja ako se u njegovoj ravni premesti u proizvoljni položaj.

Spregu se može menjati intenzitet sila ili krak sprega, a da se pri tom moment sprega ne promeni.

Dejstvo datog sprega sila na telo se ne menja ako se istovremeno promeni intenzitet sila sprega i krak sprega tako da moment sprega ostane nepromenjen. Intenzitet sile $\vec{F}_2$ ako je poznat krak sprega d_2, može da se odredi na osnovu izraza

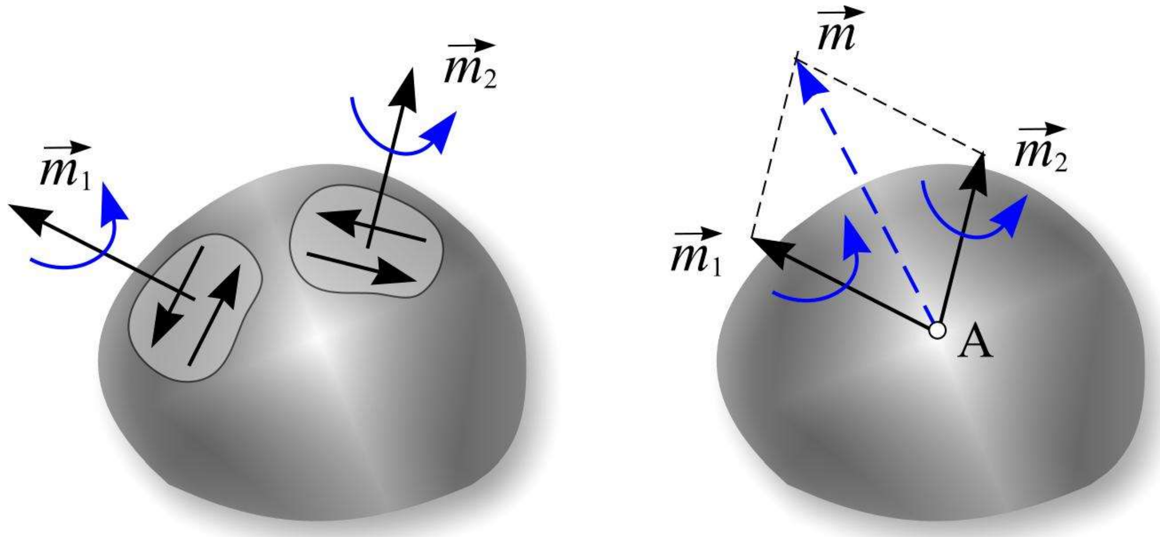
$$F_2 = \frac{m_1}{d_2}$$

Spreg sila se može premestiti u bilo koju ravan, paralelnu ravni dejstva, pri čemu se dejstvo sprega sila na telo ne menja, jer se pri premeštanju sprega sila u paralelnu ravan ne menja vektor momenta sprega:

$$\vec{m}_1 = \vec{m}_2$$

SLAGANJE I RAVNOTEŽA SPREGOVA U PROSTORU

Pošto su momenti spregova slobodni vektori, oni mogu da se premeste u bilo koju tačku A na telu i da se vektorski saberu.



Dva sprega sila koji deluju u različitim ravnima tela mogu da se zamene njihovim odgovarajućim momentima a onda ova dva slobodna vektora mogu da se premeste u proizvoljnu tačku A i saberu kako bi se dobio rezultujući moment sprega

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$$

Dva sprega, koji leže u različitim ravnima, ekvivalentni su jednom spregu, čiji je moment jednak vektorskom (geometrijskom) zbiru momenata datih spregova.

Str 135 knjiga

Ako više od dva sprega sila deluje na telo vektor momenta rezultujućeg sprega je:

$$\vec{m} = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i$$

Da bi sistem spregova bio u ravnoteži moment rezultujućeg sprega mora biti jednak nuli:

$$\vec{m} = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i = 0$$

Uslov ravnoteže sistema spregova u prostoru je da poligon konstruisan od vektora koji predstavljaju momente spregova, koji deluju na kruto telo, mora biti zatvoren.

PROIZVOLJNI SISTEMI SILA U PROSTORU

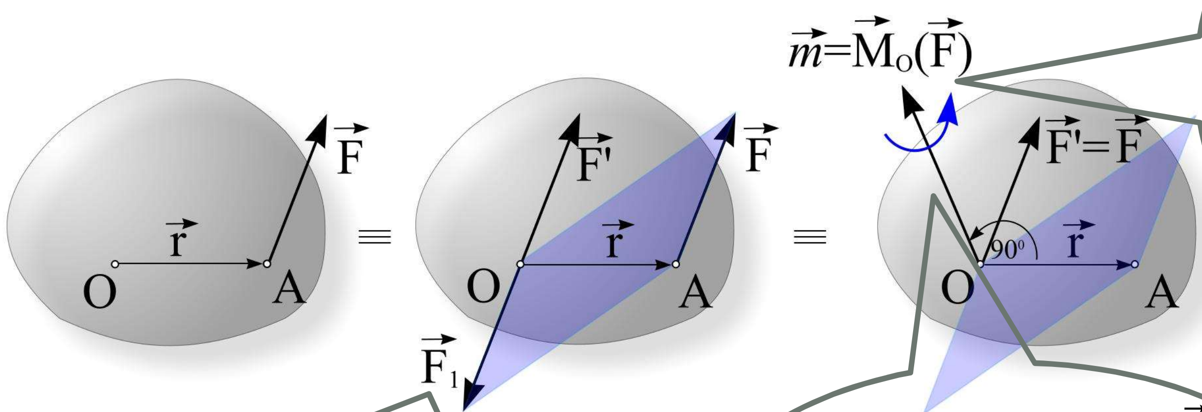
Str 243-266 knjiga Poglavlje 11 – PROIZVOLJNI SISTEMI SILA U PROSTORU

REDUKCIJA SILE U TAČKU

Teorema o redukciji sile u tačku: Sila, koja deluje na kruto telo, se može premestiti (redukovati) paralelno u bilo koju tačku tela van njene napadne linije ako se pri tome doda spreg, čiji je moment jednak momentu te sile u odnosu na tačku u koju se sila prenosi.

Vektor momenta sprega je upravan na ravan dejstva sprega, a njegov intenzitet je

$\boxed{m = F\,h}$



Dejstvo ove sile se ne menja, ako se u bilo kojoj tački O doda uravnoteženi sistem sila $\boxed{\vec{F}_1 \text{ i } \vec{F}'}$ na osnovu **A3**, pri čemu je

$\boxed{\vec{F}' = \vec{F},\ \vec{F}_1 = -\vec{F}}$

Kako je moment sile $\vec{F}$ u odnosu na tačku O intenziteta $\boxed{M_O(\vec{F}) = F\,h}$ i predstavlja vektor upravan na ravan koja sadrži silu $\vec{F}$ i tačku O

$\boxed{\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F}}$

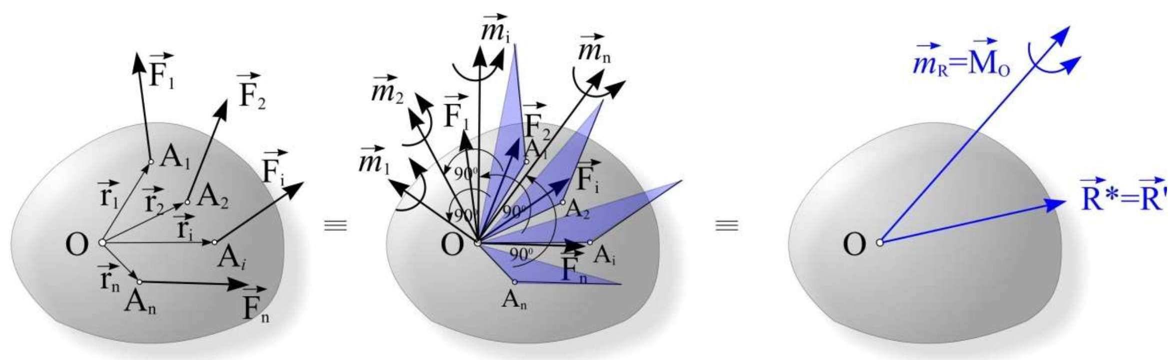
moment sprega jednak je momentu sile u odnosu na tačku

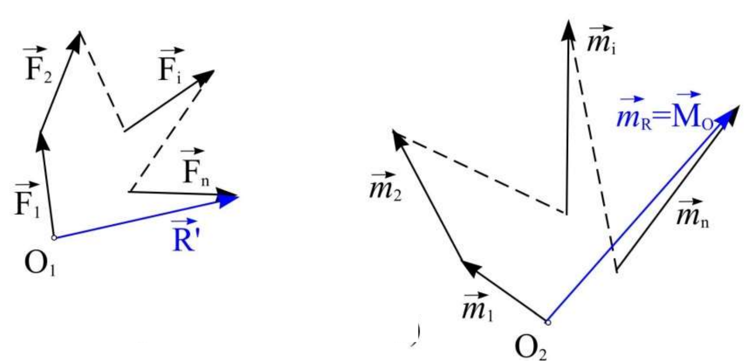
$\boxed{\vec{m} = \vec{M}_O\left(\vec{F}\right)}$

Str 145 knjiga Poglavlje 6.1 – Redukcija sile u tački

REDUKCIJA PROSTORNOG SISTEMA SILA U TAČKU

Teorema o redukciji prostornog sistema sila u ravni u tačku: svaki prostorni sistem sila, koji deluje na kruto telo, može se zameniti jednom silom $\vec{R}^*$ (redukciona rezultanta), koja je jednaka vektorskom zbiru svih sila sistema – **glavnom vektoru** $\vec{R}'$ sa napadnom tačkom O i jednim spregom sila (rezultujući redukcioni spreg), čiji je moment $\vec{m}_R$ jednak vektorskom zbiru momenata komponentnih spregova, tj. **glavnom momentu** $\vec{M}_O$ sistema sila u odnosu na tačku O.



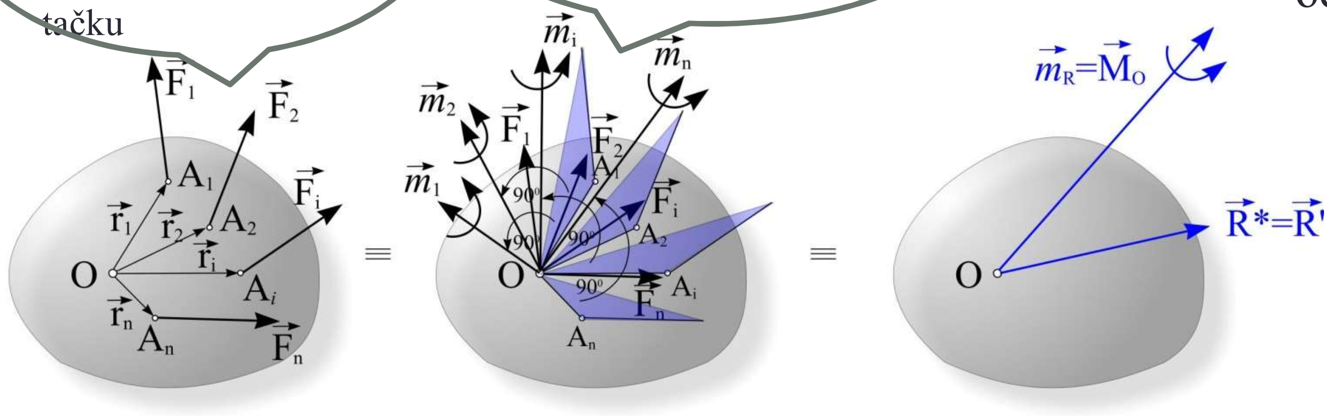


Svaka od sila može redukovati u tačku O primenom teoreme o redukciji jedne sile u tačku

Dobija se sistem sučeonih sila paralelno prenesenih u redukcionu tačku O i sistem redukcionih spregova

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$

$\vec{m}_1, \vec{m}_2, \ldots, \vec{m}_n$



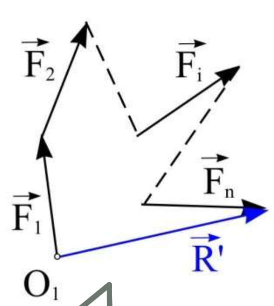
Momenti spregova su jednaki momentima sila u odnosu na redukcionu tačku

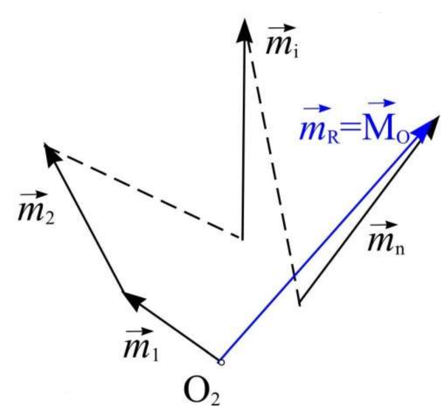
$$\vec{m}_1 = \vec{M}_O\left(\vec{F}_1\right) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1,$$

$$\vec{m}_2 = \vec{M}_O\left(\vec{F}_2\right) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2,$$

$$\vec{m}_i = \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i,$$

$$\vec{m}_n = \vec{M}_O\left(\vec{F}_n\right) = \vec{r}_n \times \vec{F}_n$$





Sile koje deluju u tački O mogu se zameniti jednom silom, **redukcionom rezultantom**:

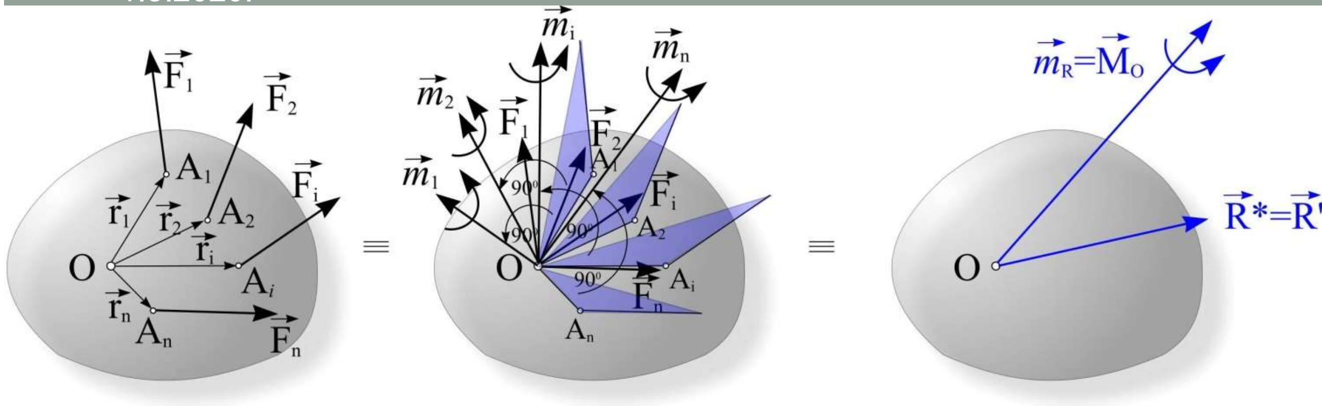
$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

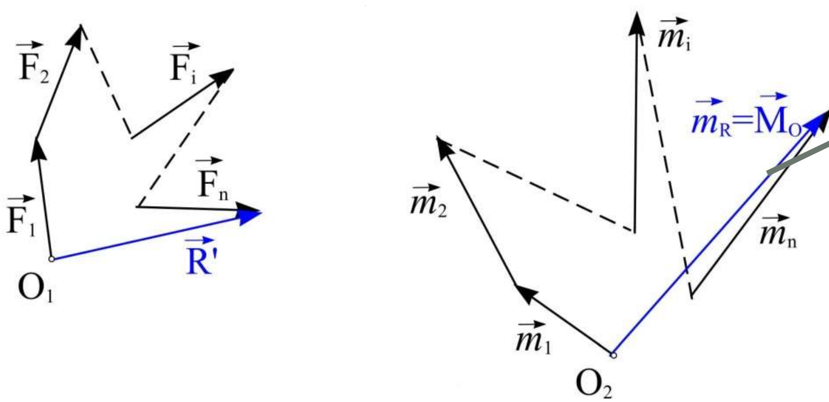
$$\vec{R}^* = \vec{R}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

glavni vektor jednak je geometrijskom (vektorskom) zbiru sila

$$\vec{R}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i,$$

Redukciona rezultanta jednaka je glavnom vektoru sa napadnom tačkom u redukcionoj tački O, zbog čega se i zove redukciona rezultanta





Sistem spregova se može složiti čime se dobija **rezultujući redukcioni spreg**, čiji je moment

$$\vec{m}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Moment rezultujućeg redukcionog sprega jednak je vektorskom (geometrijskom) zbiru momenata redukcionih spregova.

$$\vec{m}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) = \vec{M}_O$$

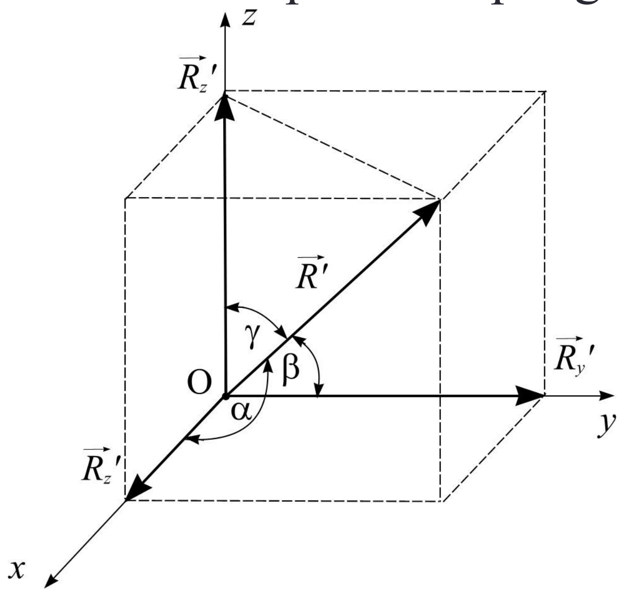
Vektorski zbir momenata svih sila sistema u odnosu na proizvoljnu tačku O naziva se glavni moment sistema sila u odnosu na tačku O

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)$$

moment rezultujućeg redukcionog sprega jednak glavnom momentu

ODREĐIVANJE GLAVNOG VEKTORA I GLAVNOG MOMENTA ANALITIČKIM PUTEM

U slučaju proizvoljnog prostornog sistema sila određivanje glavnog vektora i glavnog momenta se ne vrši konstrukcijom poligona sila s obzirom da je teško konstruisati prostorni poligon, već analitičkim putem.



$$\vec{R}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i,$$

$$X_R' = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i,$$

$$Y_R' = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\beta_i,$$

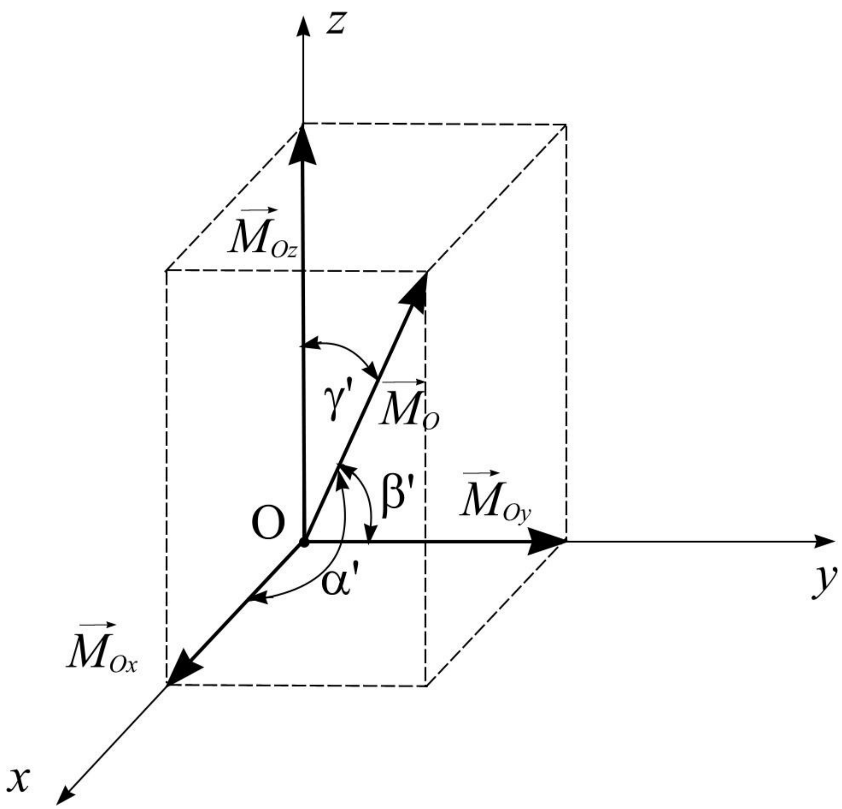
$$Z_R' = \sum_{i=1}^{n} Z_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\gamma_i,$$

projekcije glavnog vektora na koordinatne ose

INTENZITET GLAVNOG VEKTORA	$R' = R^* = \sqrt{(X_R')^2 + (Y_R')^2 + (Z_R')^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^2}$
PRAVAC GLAVNOG VEKTORA	$\cos\alpha_R = \frac{X_R'}{R'}, \quad \cos\beta_R = \frac{Y_R'}{R'}, \quad \cos\gamma_R = \frac{Z_R'}{R'}$

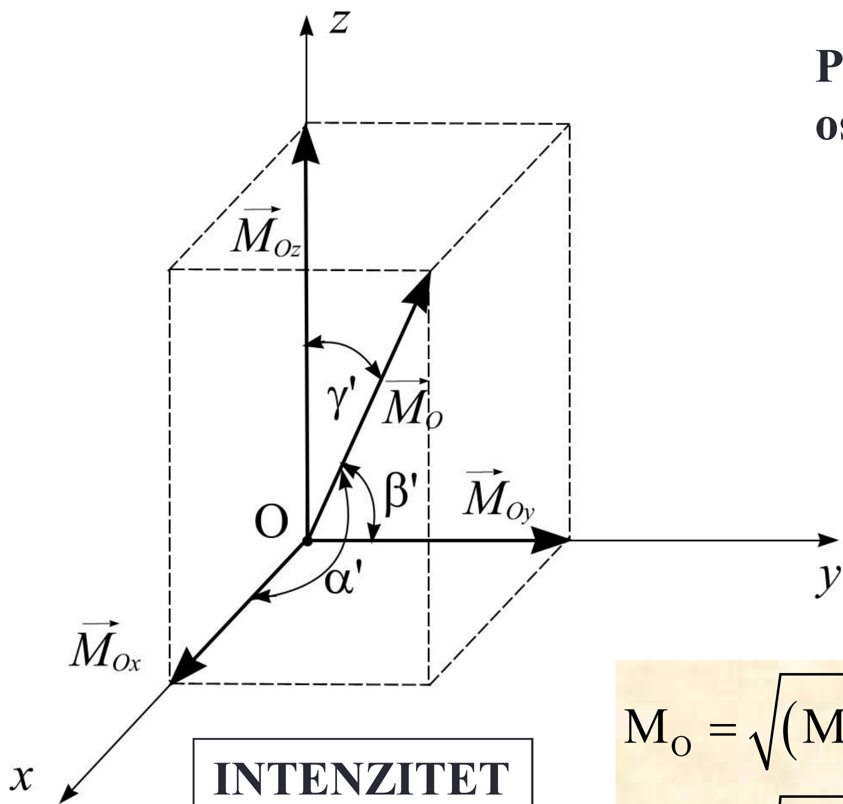
Intenzitet, pravac i smer glavnog vektora ne zavise od izbora redukcione tačke, jer poligon sila ostaje nepromenjen bez obzira u koju se tačku tela sile sistema redukuju.

Glavni moment zavisi od izbora redukcione tačke. Pri promeni redukcione tačke, zbog promene vektora položaja napadnih tačaka sila u odnosu na redukcionu tačku, doći do promene glavnog momenta.



$$\vec{m}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Analitički postupak za određivanje glavnog momenta svodi se na određivanje projekcija glavnog momenta na koordinatne ose, primenu analitičkog načina određivanja momenta sile u odnosu na tačku i Varinjonove teoreme.



Projekcije glavnog momenta na koordinatne ose su:

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} M_{Ox}\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i\, Z_i - z_i\, Y_i\right),$$

$$M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} M_{Oy}\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(z_i\, X_i - x_i\, Z_i\right),$$

$$M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} M_{Oz}\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i\, Y_i - y_i\, X_i\right),$$

INTENZITET GLAVNOG MOMENTA

$$M_O = \sqrt{\left(M_{Ox}\right)^2 + \left(M_{Oy}\right)^2 + \left(M_{Oz}\right)^2},$$

$$M_O = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} M_{Ox}\left(\vec{F}_i\right)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} M_{Oy}\left(\vec{F}_i\right)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} M_{Oz}\left(\vec{F}_i\right)\right)^2}.$$

PRAVAC GLAVNOG MOMENTA

$$\cos\alpha_{M_O} = \frac{M_{ox}}{M_O} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{Ox}\left(\vec{F}_i\right)}{M_O},\quad \cos\beta_{M_O} = \frac{M_{oy}}{M_O} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{Oy}\left(\vec{F}_i\right)}{M_O},\quad \cos\gamma_{M_O} = \frac{M_{oz}}{M_O} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{Oz}\left(\vec{F}_i\right)}{M_O}$$

SVOĐENJE PROSTORNOG SISTEMA SILA NA PROSTIJI OBLIK

Redukciona rezultanta (glavni vektor) i redukcioni rezultujući spreg (glavni moment) zajedno čine torzer. Njihovo slaganje se ne može izvršiti neposredno vektorskim sabiranjem.
To je u stvari svođenje sistema sila na prostiji oblik.

Analizom međusobnog odnosa glavnog vektora i glavnog momenta može se ustanoviti na kakav najprostiji oblik može da se svede prostorni sistem sila. Mogu da nastupe sledeći slučajevi:

1. **Sistem sila je u ravnoteži**
2. **Sistem sila se svodi na spreg sila**
3. **Sistem sila se svodi na rezultantu koja prolazi kroz redukcionu tačku**
4. **Sistem sila se svodi na rezultantu koja ne prolazi kroz redukcionu tačku**
5. **Sistem sila se svodi na dinamu čija osa prolazi kroz redukcionu tačku**
6. **Sistem sila se svodi na dinamu čija osa ne prolazi kroz redukcionu tačku**

1. Sistem sila je u ravnoteži

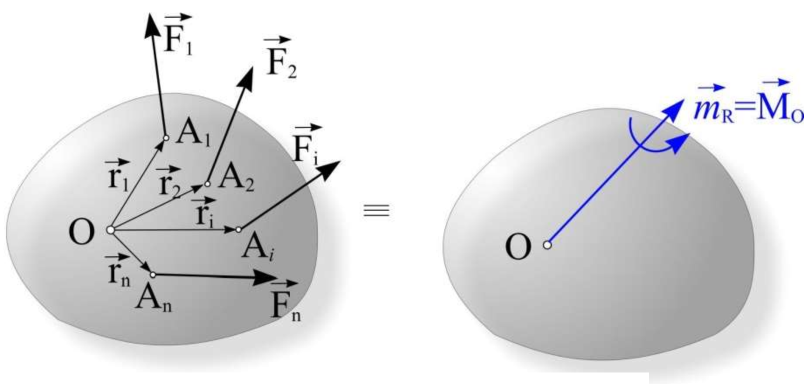
Ako je za dati sistem sila $\vec{R}' = 0, \quad \vec{M}_O = 0$

onda se dati sistem sila nalazi u ravnoteži, što će biti posebno obrađeno kasnije.

2. Sistem sila se svodi na spreg sila

Ako je za dati sistem sila $\vec{R}' = 0, \quad \vec{M}_O \neq 0.$

onda se dati sistem sila svodi na spreg sila, čiji je moment određen jednačinom:



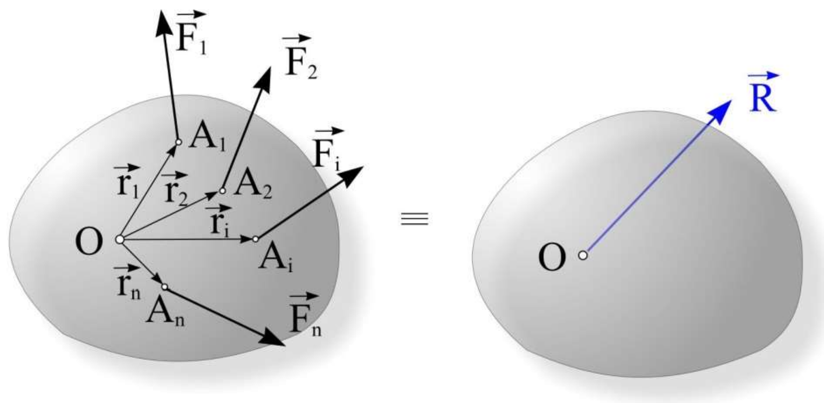
$$\vec{m}_R = \vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)$$

Slobodno kruto telo pod dejstvom ovakvog sistema sila vrši **čisto obrtano kretanje**.

3. Sistem sila se svodi na rezultantu koja prolazi kroz redukcionu tačku

Ako je za dati sistem sila $\vec{R}' \neq 0, \qquad \vec{M}_O = 0.$

onda se dati sistem sila svodi na rezultantu $\vec{R} = \vec{R}'$ koja prolazi kroz redukcionu tačku O.

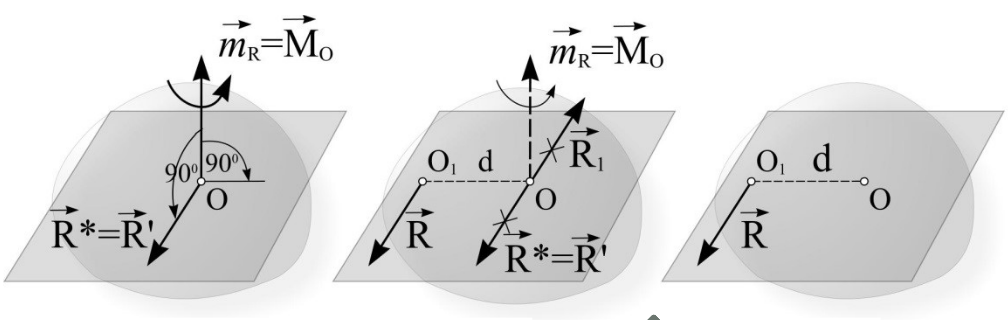


Slobodno telo pod dejstvom takvog sistema sila može da vrši čisto translatorno kretanje (ako se tačka O poklapa sa težištem tela).

4. Sistem sila se svodi na rezultantu koja ne prolazi kroz redukcionu tačku

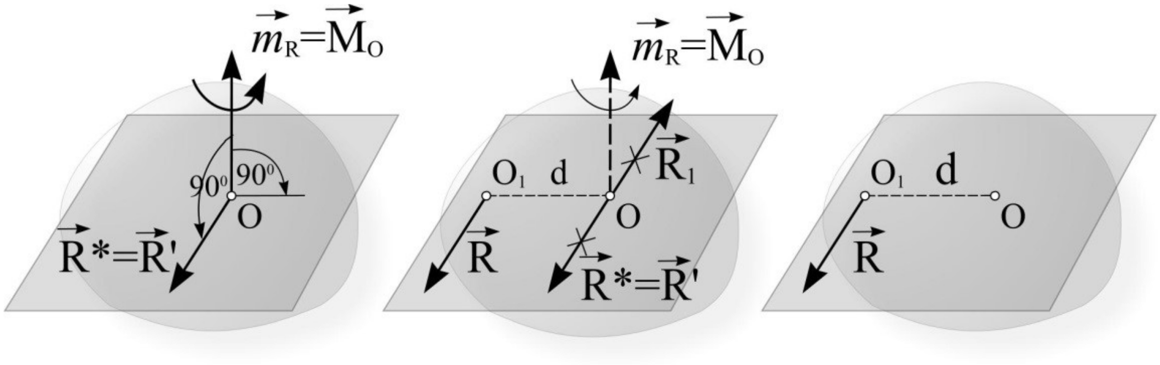
Ako je za dati sistem sila $\vec{R}' \neq 0, \quad \vec{M}_O \neq 0,$

i pri tome su glavni vektor i glavni moment upravni vektori $\vec{m}_R = \overrightarrow{M_O} \perp \vec{R}'$
onda se dati sistem sila svodi na rezultantu $\vec{R}$ koja je jednaka glavnom vektoru, ali koja ne prolazi kroz tačku O.



sistem sila se svodi na ortogonalni torzer, pa se dalje može uprostiti i svesti na rezultantu

Ako se redukcioni spreg predstavi silama $\vec{R}'$ i $\vec{R}_1$ koje su istog intenziteta kao $\vec{R}$ i postavi tako da jedna od sila sprega deluje u tački O i da se njena napadna linija poklapa sa napadnom linijom redukcione rezultante dobija se uravnoteženi sistem sila u tački O, koji na osnovu A3 može da se ukloni.



Kako na telo sada deluje samo jedna sila, to znači da se sistem sila svodi na **rezultantu koja deluje u tački O_1**.

Rastojanje $OO_1=d$ određuje se iz izraza

$$d = \frac{M_O}{R'}$$

Ovaj slučaj u stvarnosti nastaje kod proizvoljnog sistema paralelnih sila, ili kad su sve sile u jednoj ravni, ako je njihov glavni vektor različit od nule.

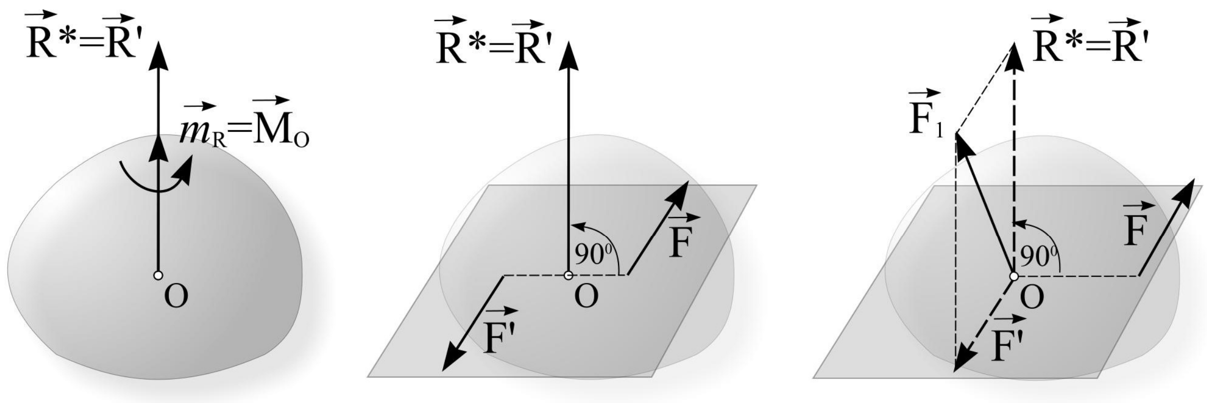
U slučaju da se sistem sila svodi na ortogonalni torzer, sistem se dalje može uprostiti i svesti na rezultantu $\vec{R}$

5. Sistem sila se svodi na dinamu čija osa prolazi kroz redukcionu tačku

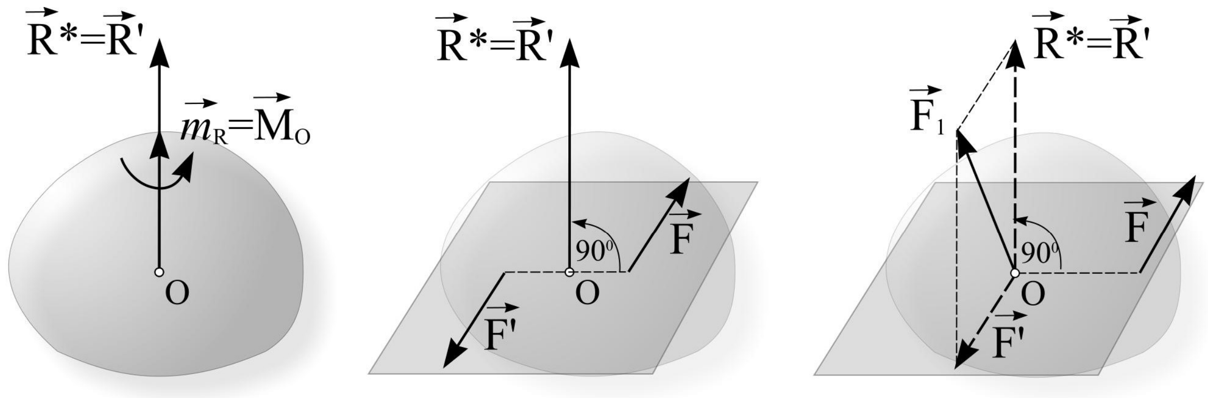
Ako je za dati sistem sila $\vec{R}' \neq 0 \quad \vec{m}_R = \overrightarrow{M_O} \neq 0$

i pri tome su glavni vektor i glavni moment kolinearni vektori, tj. $\vec{m}_R = \overrightarrow{M_O} \parallel \vec{R}'$

onda se dati sistem svodi na silu $\vec{R}^* = \vec{R}'$ i spreg sila $\vec{F}, \vec{F}'$
koji leži u ravni upravnoj na silu



Dobijeni sistem koji čine sila i spreg sila koji su kolinearni zove se **dinamički zavrtanj** ili **dinama**, a prava duž koje je usmeren vektor $\vec{R}^* = \vec{R}'$ naziva se **osa diname**.



Dalje uprošćenje ovakvog sistema sila nije moguće, jer ga je nemoguće svesti na jednu silu, rezultantu, ili na jedan spreg.
Slobodno kruto telo pod dejstvom takvog sistema sila može da vrši samo **složeno, zavojno kretanje: pomeranje tela u pravcu i smeru sile, uz obrtanje oko tog pravca.** Takvo kretanje vrši zavrtanj kada se gura i obrće.

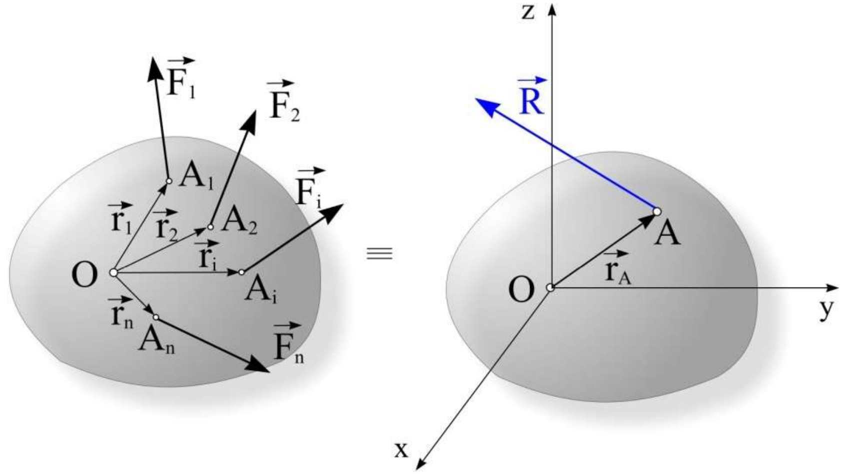
Ako se smerovi glavnog vektora i glavnog momenta poklapaju dinama je desna, a ako su suprotnog smera, dinama je leva.

6. Sistem sila se svodi na dinamu čija osa ne prolazi kroz redukcionu tačku

Ako je za dati sistem sila $\vec{R}' \neq 0, \quad \vec{M}_O \neq 0,$

i pri tome glavni vektor i glavni moment nisu međusobno ni upravni, ni kolinearni vektori, onda se dati sistem sila svodi na dinamu, čija osa ne prolazi kroz redukcionu tačku O.

VARINJONOVA TEOREMA ZA PROSTORNI SISTEM SILA



Na slajdu 13 je dokazana Varinjonova teorema o momentu rezultante sistema sučeonih sila u ravni i prostoru. Međutim, ona važi i za proizvoljni prostorni sistem sila pod uslovom da se sistem sila svodi na rezultantu - ako je glavni vektor tog sistema različit od nule, a glavni moment jednak nuli (slučaj 3), ili ako su i glavni vektor i glavni moment različiti od nule i upravni su vektori (slučaj 4).

VARINJONOVA TEOREMA O MOMENTU REZULTANTE PROIZVOLJNOG PROSTORNOG SISTEMA SILA U ODNOSU NA TAČKU glasi:

Ako se proizvoljni sistem sila svodi na rezultantu onda je moment rezultante prostornog sistema sila u odnosu na bilo koju tačku O jednak vektorskom zbiru momenata sila tog sistema u odnosu na istu tačku O.

Kako je dejstvo rezultante na telo ekvivalentno dejstvu datog sistema sila na telo, $\vec{R} \equiv \left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ sledi da su im i obrtna dejstva u odnosu na bilo koju tačku ekvivalentna, tj:

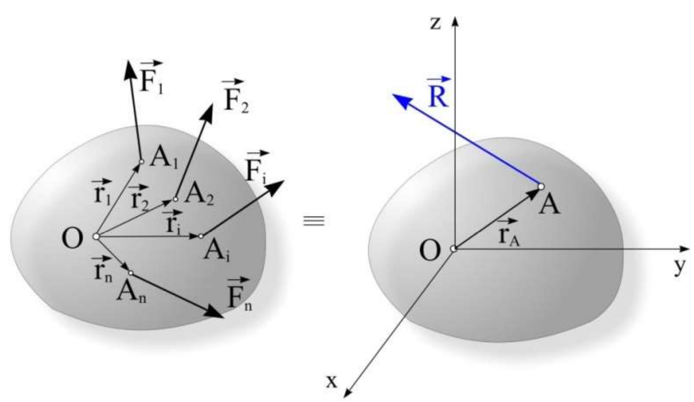
$$\vec{M}_O\left(\vec{R}\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)$$

$$\vec{r}_A \times \vec{R} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right)$$

čime je Varinjonova teorema o momentu rezultante u odnosu na tačku dokazana.

VARINJONOVA TEOREMA O MOMENTU REZULTANTE PROIZVOLJNOG PROSTORNOG SISTEMA SILA U ODNOSU NA OSU glasi:

Ako se proizvoljni sistem sila svodi na rezultantu onda je moment rezultante prostornog sistema sila u odnosu na bilo koju osu jednak algebarskom zbiru momenata sila tog sistema u odnosu na istu osu.



Da bi se dokazala ova teorema posmatra se osa x koja prolazi kroz tačku O. Projektovanjem jednačine

$$\vec{M}_O\left(\vec{R}\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)$$

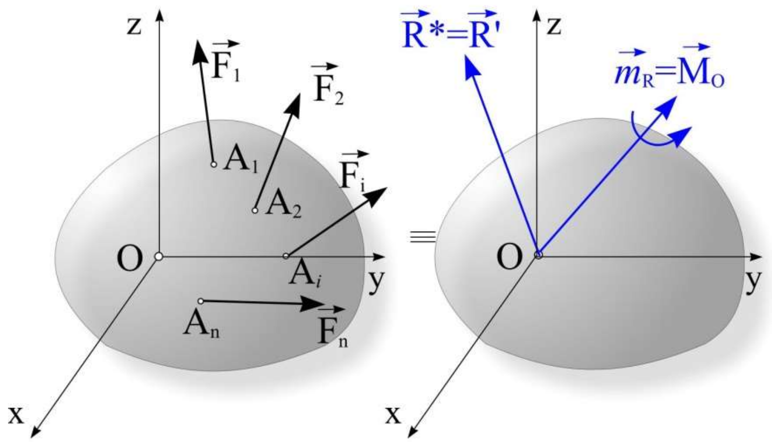
na osu x i primenom veze između momenta sile u odnosu na tačku i momenta sile u odnosu na osu:

$$\boxed{\begin{aligned} M_x\left(\vec{F}\right)&=M_{Ox}\left(\vec{F}\right),\\ M_y\left(\vec{F}\right)&=M_{Oy}\left(\vec{F}\right),\\ M_z\left(\vec{F}\right)&=M_{Oz}\left(\vec{F}\right).\end{aligned}}$$

$$\boxed{M_x\left(\vec{R}\right)=\sum_{i=1}^{n}M_x\left(\vec{F}_i\right)}$$

čime je Varinjonova teorema o momentu rezultante u odnosu na osu dokazana.

USLOVI RAVNOTEŽE PROIZVOLJNOG PROSTORNOG SISTEMA SILA



Da bi proizvoljni prostorni sistem sila bio u ravnoteži potrebno je da redukciona rezultanta (glavni vektor) i moment rezultujućeg redukcionog sprega (glavni moment) tog sistema sila budu istovremeno jednaki nuli.

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{R}' = \vec{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0, \\ &\vec{m}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}_i\right) = \overrightarrow{M_O} = 0. \end{aligned}} \quad \Bigg\} \text{ uslovi ravnoteže u vektorskom obliku}$$

USLOVI RAVNOTEŽE U ANALITIČKOM OBLIKU

$$R' = R^* = \sqrt{\left(X_R'\right)^2 + \left(Y_R'\right)^2 + \left(Z_R'\right)^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^2} = 0$$

$$M_O = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} M_{Ox}\left(\vec{F}_i\right)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} M_{Oy}\left(\vec{F}_i\right)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} M_{Oz}\left(\vec{F}_i\right)\right)^2} = 0$$

$$X_R' = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i = 0, \qquad M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} M_{Ox}\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i Z_i - z_i Y_i\right) = 0,$$

$$Y_R' = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\beta_i = 0, \qquad M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} M_{Oy}\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(z_i X_i - x_i Z_i\right) = 0,$$

$$Z_R' = \sum_{i=1}^{n} Z_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\gamma_i = 0, \qquad M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} M_{Oz}\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i Y_i - y_i X_i\right) = 0.$$

Primenom veze između momenta sile u odnosu na tačku i momenta sile u odnosu na osu,

$$\boxed{\begin{aligned} M_x\left(\vec{F}\right) &= M_{Ox}\left(\vec{F}\right), \\ M_y\left(\vec{F}\right) &= M_{Oy}\left(\vec{F}\right), \\ M_z\left(\vec{F}\right) &= M_{Oz}\left(\vec{F}\right). \end{aligned}}$$

za analitičke uslove ravnoteže proizvoljnog prostornog sistema sila dobija se:

Analitički uslove ravnoteže proizvoljnog prostornog sistema sila predstavljaju sistem od šest nezavisnih jednačina ravnoteže:

sistem od šest nezavisnih jednačina ravnoteže

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0,$$

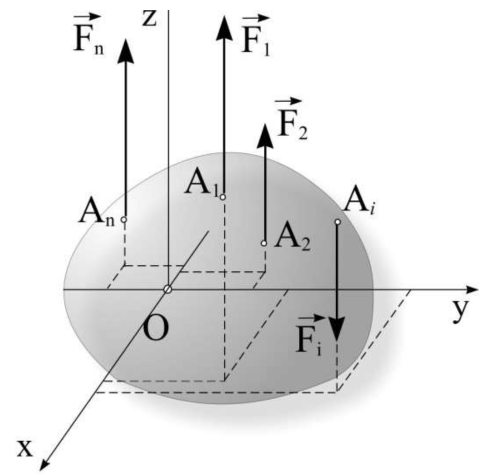
potrebni uslovi da se slobodno kruto telo ne pomera translatorno duž koordinatnih osa

$$\sum_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right) = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_i\right) = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_i\right) = 0,$$

potrebni uslovi da se slobodno telo ne obrće oko tih osa

Da bi proizvoljni prostorni sistem sila bio u ravnoteži potrebno je i dovoljno da algebarski zbir projekcija svih sila na ose Dekartovog koordinatnog sistema bude jednak nuli i algebarski zbir momenata svih sila sistema u odnosu na te ose bude jednak nuli.

PROSTORNI SISTEM PARALELNIH SILA



Ako na telo deluje sistem paralelnih sila i ako se koordinatni sistem izabere tako da jedna od osa bude paralelna silama sistema, analitički uslovi ravnoteže se znatno pojednostavljuju.
Kako su sve sile sistema upravne na ose x i y, a paralelne sa osom z, za svaku od sila sistema je:

$$X_i = 0, \quad Y_i = 0, \quad M_z\left(\vec{F}_i\right) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n$$

pa se šest jednačina ravnoteže redukuje samo na tri:

uslovi ravnoteže prostornog sistema paralelnih sila

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_i\right) = 0.$$

Za ravnotežu prostornog sistema paralelnih sila koji deluje na telo potrebno je i dovoljno da algebarski zbir projekcija svih sila na osu z koja je paralelna silama, kao i algebarski zbir momenata svih sila u odnosu na druge dve ose, x i y , bude jednak nuli.