

TEHNIČKA MEHANIKA I

12. PREDAVANJE

RAVNOTEŽA TELA POD DEJSTVOM PROSTORNOG SISTEMA SILA U PROSTORU

Str 256-266 knjiga Poglavlje 11.5 – Ravnoteže tela pod dejstvom prostornog sistema sila

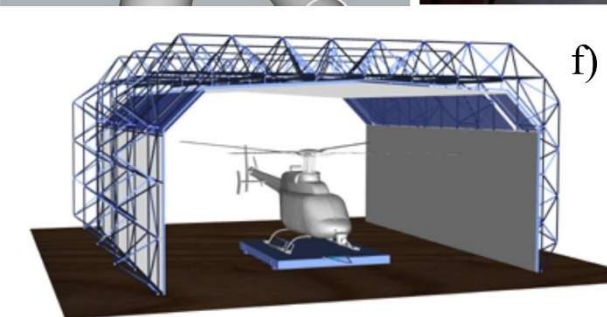
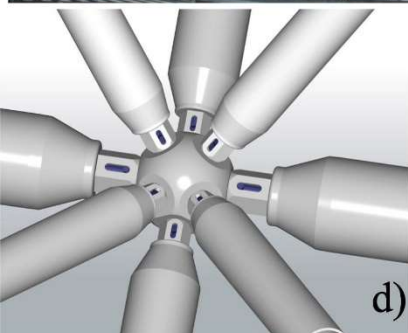
ŠTA ĆEMO NAUČITI U OVOM POGLAVLJU?

- **Veze u prostoru i oslobađanje veza krutog tela u prostoru**
- **Rešavanje problema ravnoteže krutog tela primenom uslova ravnoteže**

RAVNOTEŽA TELA POD DEJSTVOM PROSTORNOG SISTEMA SILA

Prostorni linijski nosači su nosači kod kojih ose svih štapova i sva opterećenja ne leže u istoj ravni.

Da bi nosači u prostoru bili statički određeni broj reakcija veza **ne sme da bude veći od šest**, jer se za prostorni sistem sila može formirati najviše **šest jednačina ravnoteže**.



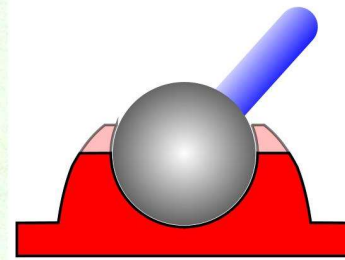
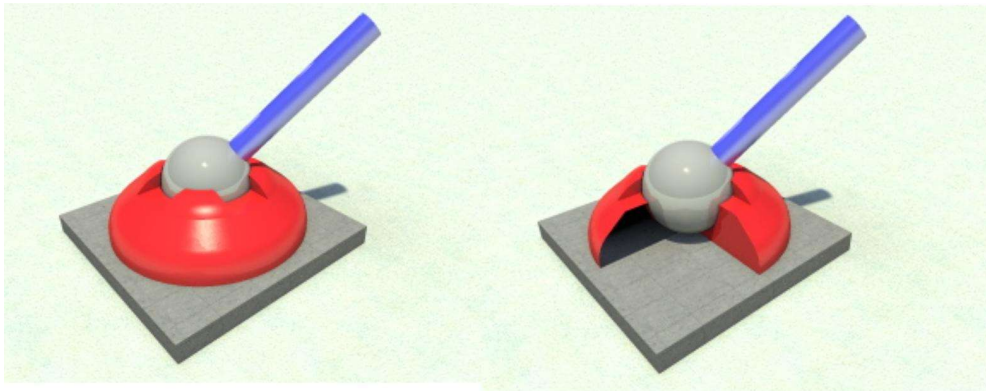
- a) Prostorna rešetka, aerodrom u Beču, Austrija;
- b) prostorni prosti štapovi, aerodrom u Madridu;
- c) žičano štapna prostorna konstrukcija, sistem Mero;
- d) čvor prostorne rešetke, sistem Mero;
- e) prostorna linijska konstrukcija, Ptičje gnezdo, Peking, Kina;
- f) prostorna rešetka, sistem Mero;
- g) prostorni štap vezan sfernim osloncem, olimpijski kompleks u Minhenu, Nemačka, 1974.

VEZE U PROSTORU

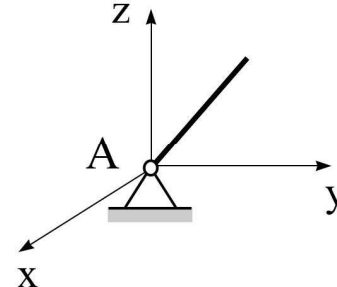
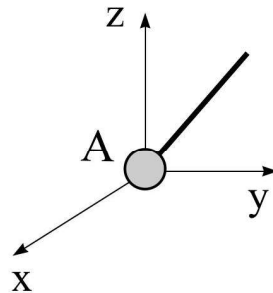
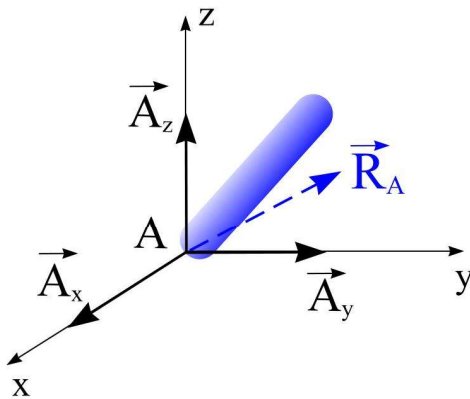
Pored veza u ravni postoje veze koje se pojavljuju samo kod prostornih problema, o kojima će ovde biti reči.

Veze prostornih nosača sa nepokretnim ravnima ostvaruju se **sfernim ili cilindričnim ležištem, uklještenjem, užadima, lakim (prostim) štapovima itd.**

VEZA OSTVARENA SFERNIM ZGLOBOM (LEŽIŠTEM)



Telo je krajem A obrađeno u obliku kugle koja može da se obrće na proizvoljan način unutar sferne površi drugog tela koje služi kao veza i koje je vezano za nepokretnu ravan.



Reakcija veze $\vec{R}_A$ sfernog zgloba je proizvoljnog pravca u prostoru, njen pravac je nepoznat, pa se ona određuje tako što se pretpostave njene tri upravne komponente $\vec{A}_x, \vec{A}_y, \vec{A}_z$

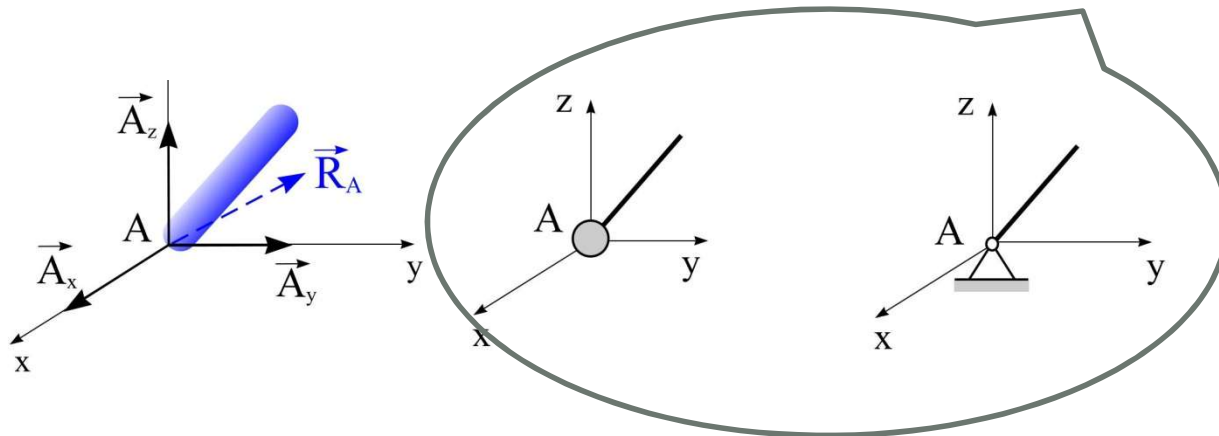
Centar kugle, tačka A, ne može da se pomeri ni u kom pravcu, a telo može da zauzme bilo koji položaj u prostoru, s obzirom da nije sprečeno njegovo obrtanje.

Trenje u sfernom zglobu se zanemaruje.

Kada se odrede komponente, reakcija veze je određena dijagonalom paralelopipeda konstruisanog nad komponentama, tj:

$$R_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \quad \cos \alpha = \frac{A_x}{R_A}, \quad \cos \beta = \frac{A_y}{R_A}, \quad \cos \gamma = \frac{A_z}{R_A}.$$

šematski prikaz veze



Sferni zglob je veza koja omogućava obrtanje oko bilo koje ose, a sprečava pomeranje u bilo kom pravcu u prostoru. Reakcije sfernog zgloba A_x , A_y i A_z su tri sile u pravcima koordinatnih osa.

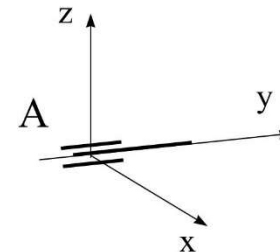
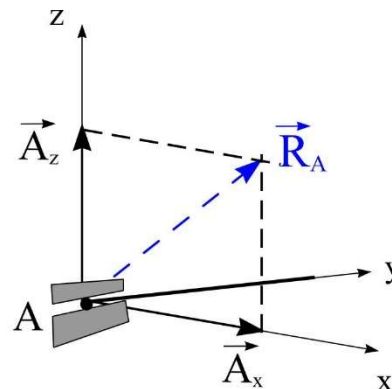
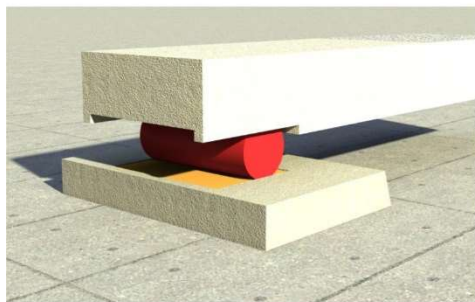
VEZA OSTVARENA CILINDRIČNIM ZGLOBOM (LEŽIŠTEM)

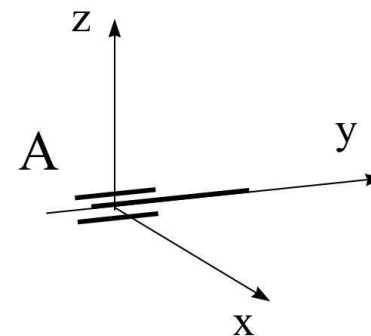
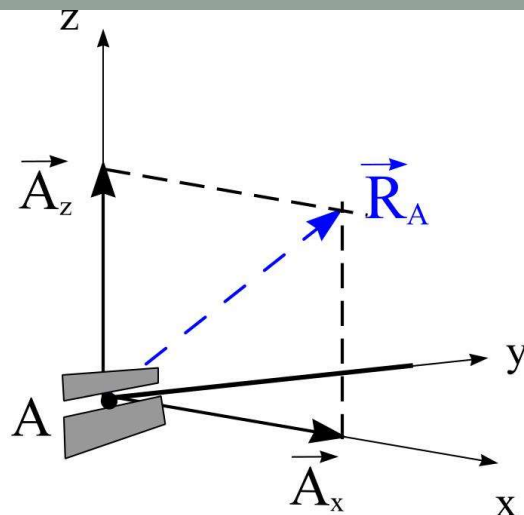
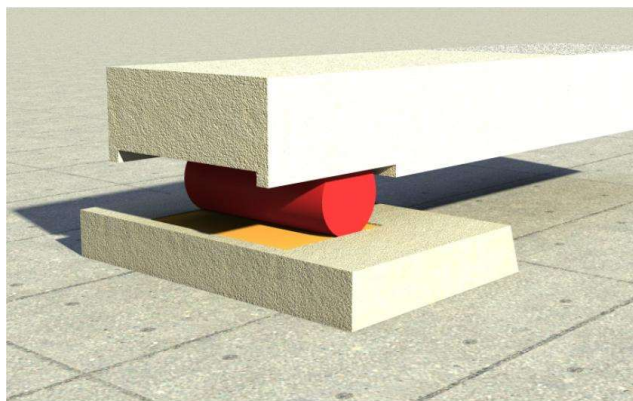
Kada na telo deluje prostorni sistem sila, veza ostvarena pokretnim osloncem je **cilindrično ležište**.

Ova veza sprečava kretanje u ravni normalnoj na pravac mogućeg kretanja osovine.

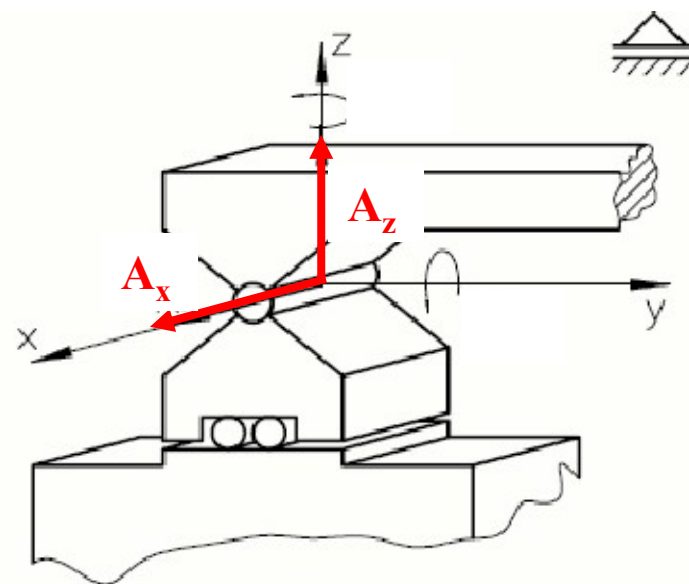
Reakcija veze $\vec{R}_A$ cilindričnog ležišta leži u toj ravni i nema komponentu u pravcu ose ležišta, tj. u pravcu ose y.

Ukoliko je ležište u pravcu y ose, reakcija veze $\vec{R}_A$ ima komponente $\vec{A}_x$ i $\vec{A}_z$ u ravni xOz





Cilindrično ležište je veza koja omogućava obrtanje oko bilo koje ose, dozvoljava pomeranje u pravcu u kojem se on nalazi, a sprečava pomeranja u ostala dva pravca, pa su reakcije veza u tim pravcima.



VEZA OSTVARENA UKLJEŠTENJEM

Veza koja ne dopušta pomeranje ni u jednom pravcu, niti obrtanje oko bilo koje ose je uklještenje.

Za razliku od problema u ravni, u slučaju prostornog sistema sila, primenom pete aksiome, u svim elementima kontaktnih površi javljaju se sile veze koje predstavljaju proizvoljni prostorni sistem sila.

Redukcijom ovih sila u težište A poprečnog preseka, dobijaju se **redukciona rezultanta** $\vec{R}_A$

i **redukcioni spreg** $\vec{m}_R = \vec{M}_A$

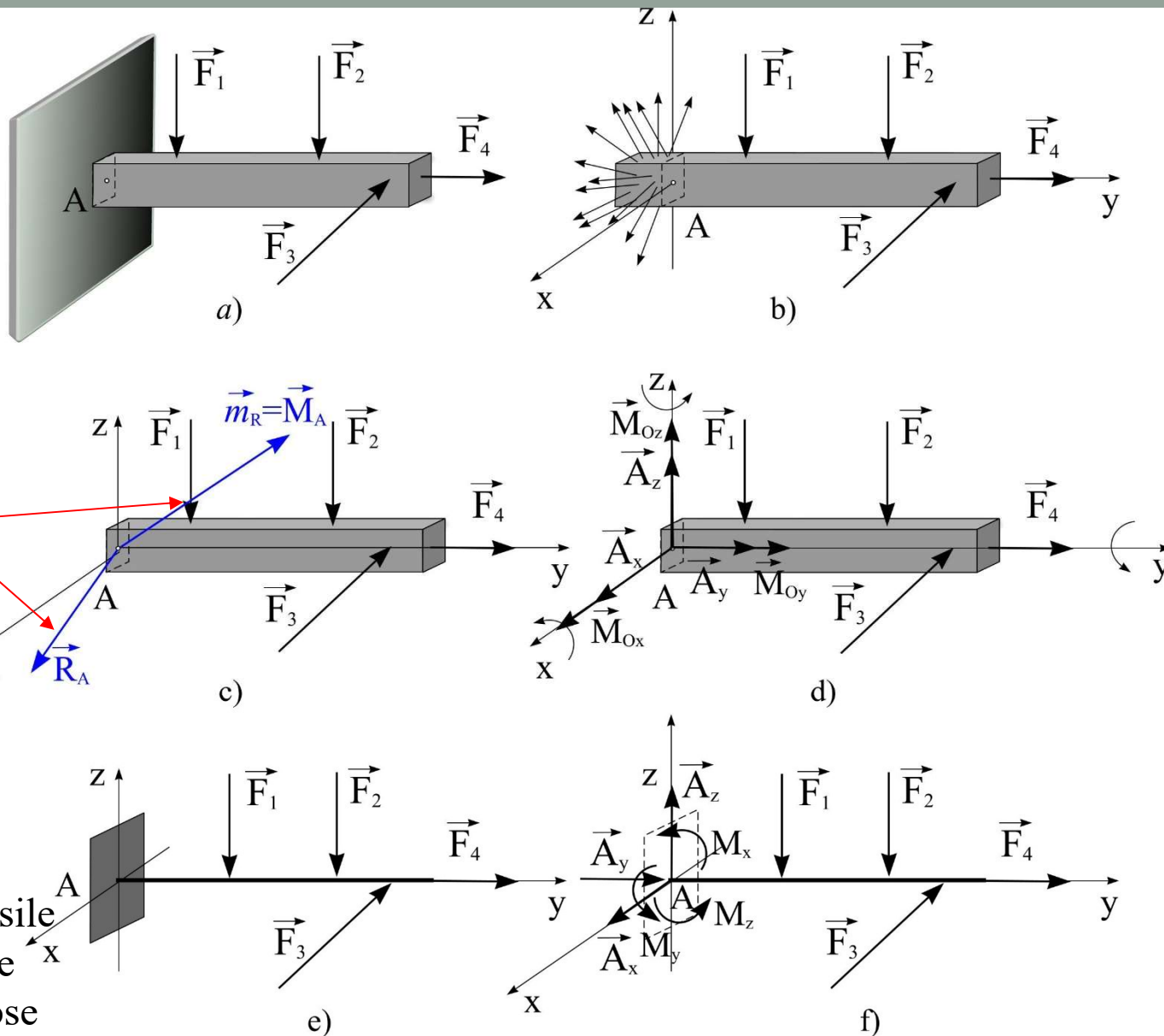
Redukciona
rezultanta je
prostorni vektor i
ima tri komponente

$$\vec{A}_x, \vec{A}_y, \vec{A}_z$$

Redukcioni spreg –
glavni moment $\vec{M}_A$
je prostorni vektor
čije su projekcije

$\vec{M}_{Ox}, \vec{M}_{Oy}, \vec{M}_{Oz}$
koje su na osnovu veze
između momenta sile u
odnosu na osu i momenta sile
u odnosu na tačku, jednake
momentima u odnosu na ose

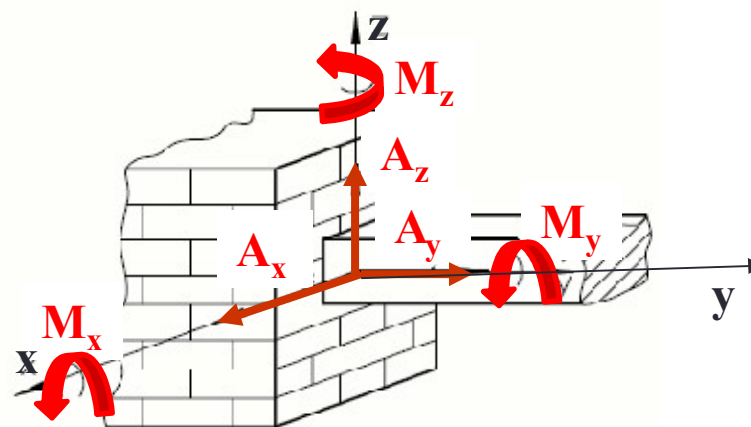
M_x, M_y i M_z i zovu se
momenti uklještenja.



Za slučaj prostornog sistema sila ova veza ima 6 komponentata

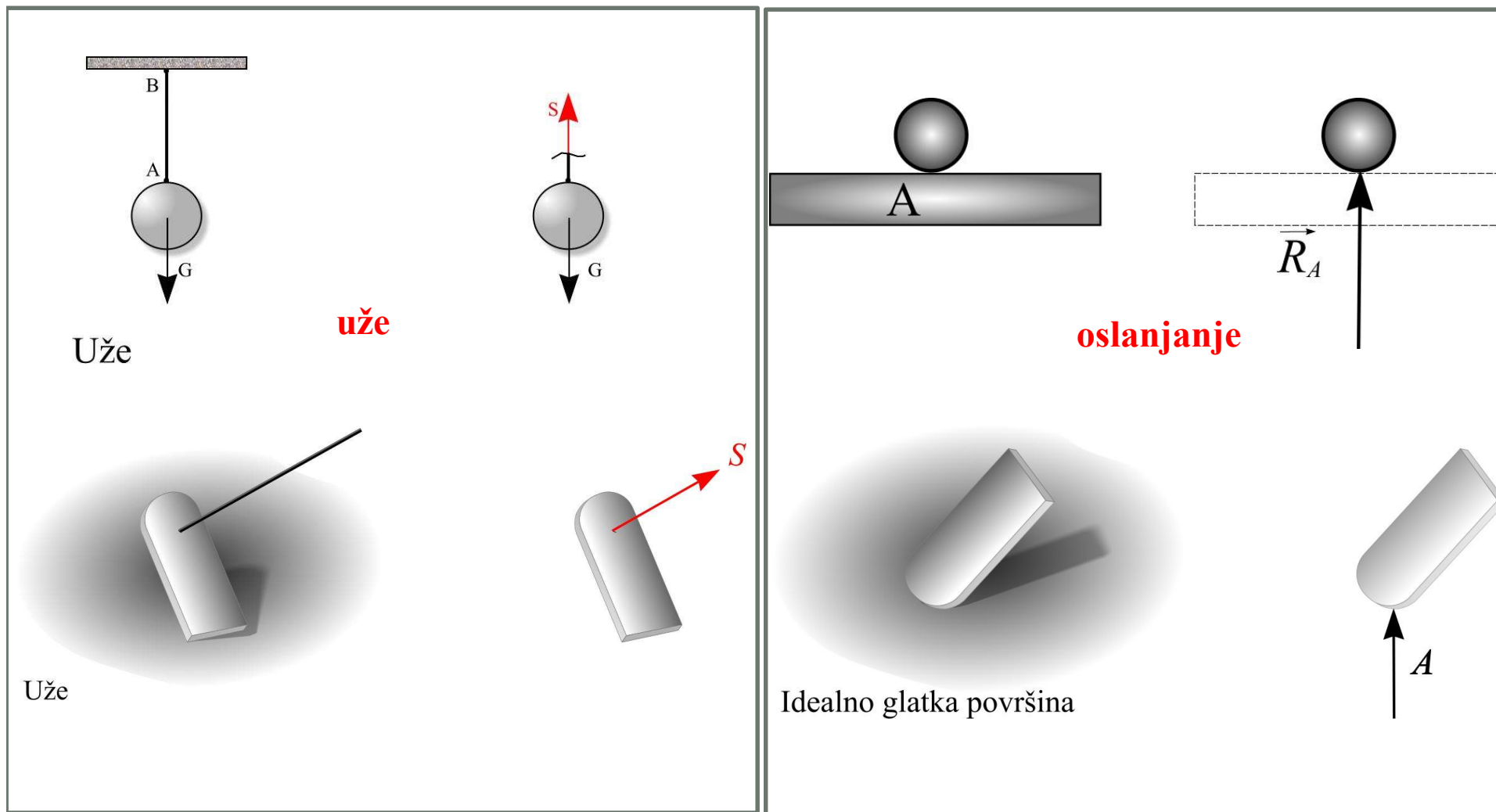
VEZA OSTVARENA UKLJEŠTENJEM

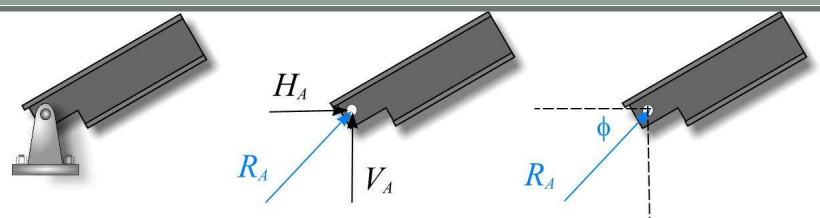
Uklještenje sprečava sva pomeranja i obrtanja. Reakcije veza su tri sile u pravcima koordinatnih osa A_x , A_y i A_z , kao i tri momenta uklještenja M_x , M_y i M_z .



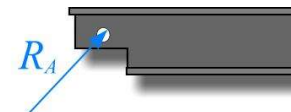
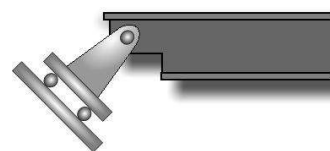
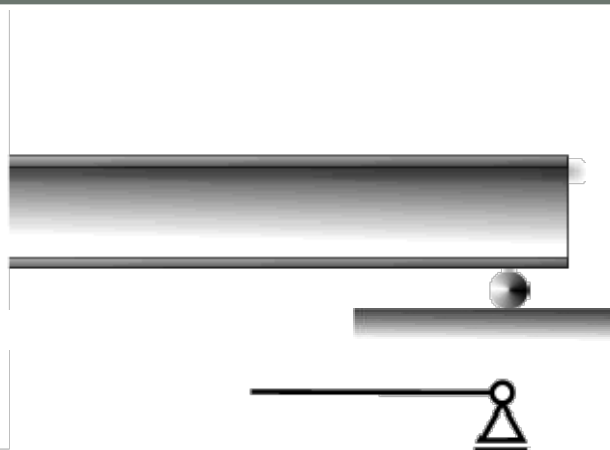
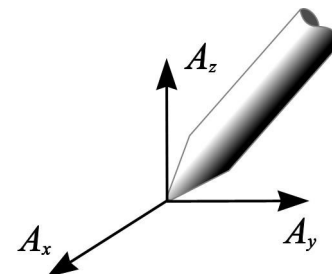
Uklještenje u prostoru

Za vezu ostvarenu **oslanjanjem, užetom, kao i prostim štapom**, važi sve isto kao i kod ravanskih problema, s tim što reakcija veze može da bude prostorna sila.

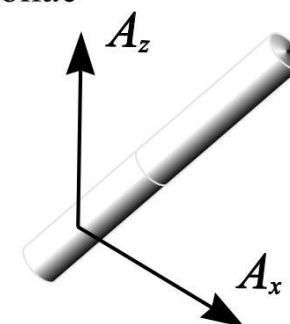




Cilindrični zglob i nepokretan oslonac

**SFERNI OSLODAC**

Cilindrični zglob i pokretan oslonac

**CILINDRIČNI OSLODAC**

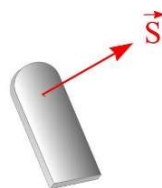
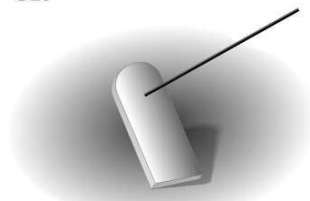
Neki tipovi veza krutih tela opterećenih proizvoljnim prostornim sistemima sila.

Tip veze

Reakcija

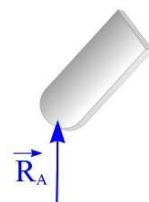
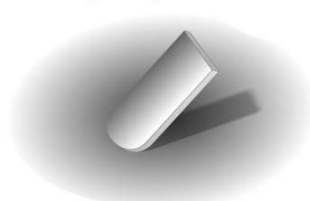
Broj nepoznatih

Uže



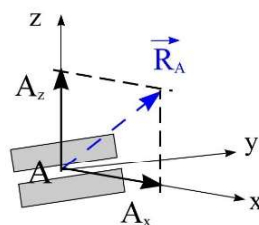
Jedna nepoznata - veličina reakcije.
Reakcija je u pravcu užeta
usmerena od vezanog tela.
Uže je zategnuto.

Idealno glatka površina



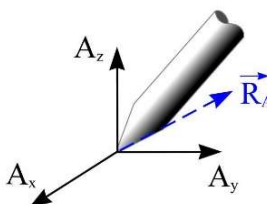
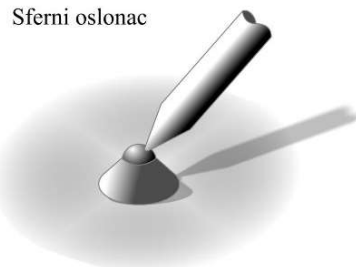
Jedna nepoznata - veličina reakcije.
Reakcija je upravna na površinu
u tački dodira.

Cilindrični oslonac



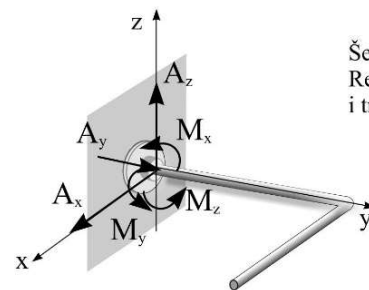
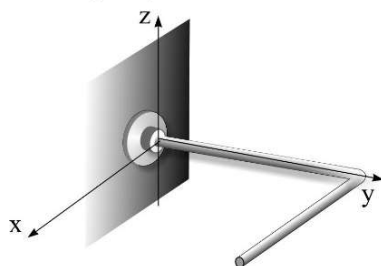
Dve nepoznate.
Reakcije su dve komponente upravne
na pravac cilindričnog oslonca.

Sferni oslonac



Tri nepoznate.
Reakcije su tri komponente u pravcima
x, y i z.

Uklještenje



Šest nepoznatih.
Reakcije su tri sile u pravcima x, y i z
i tri momenta uklještenja M_x , M_y i M_z .

Rešavanje problema ravnoteže tela u prostoru pod dejstvom prostornog sistema sila

Prvi korak u rešavanju prostornih problema ravnoteže, kao i u ravni, je primena aksiome pet – oslobađanje tela (sistema sastavljenog od više tela) veza.

Dekartov koordinatni sistem treba postaviti u pogodnu tačku, a ose x , y i z treba usvojiti tako da budu paralelne što većem broju sila koje deluju na telo, da bi se dobile što jednostavnije jednačine ravnoteže. Sve nepoznate komponente reakcija veza se pretpostave u pozitivnom smeru osa, ukoliko je njihov smer unapred nepoznat. Ucrtaju se dimenzije tela koje su neophodne za sračunavanje momenata i sila sistema u odnosu na ose.

Primene se jednačine ravnoteže prostornog sistema sila – šest skalarnih jednačina:

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i) = 0.$$

U odnosu na probleme u ravni, gde je bilo lako odrediti momente sila u odnosu na tačku, u uslovima ravnoteže potrebno je odrediti momente svih sila u odnosu na ose x, y i z. Ako je sa crteža teško da se vidi čemu je jednak moment neke sile u odnosu na osu, preporučuje se da se na pomoćnom crtežu nacrtaju projekcija posmatranog tela na ravan koja je upravna na tu osu.

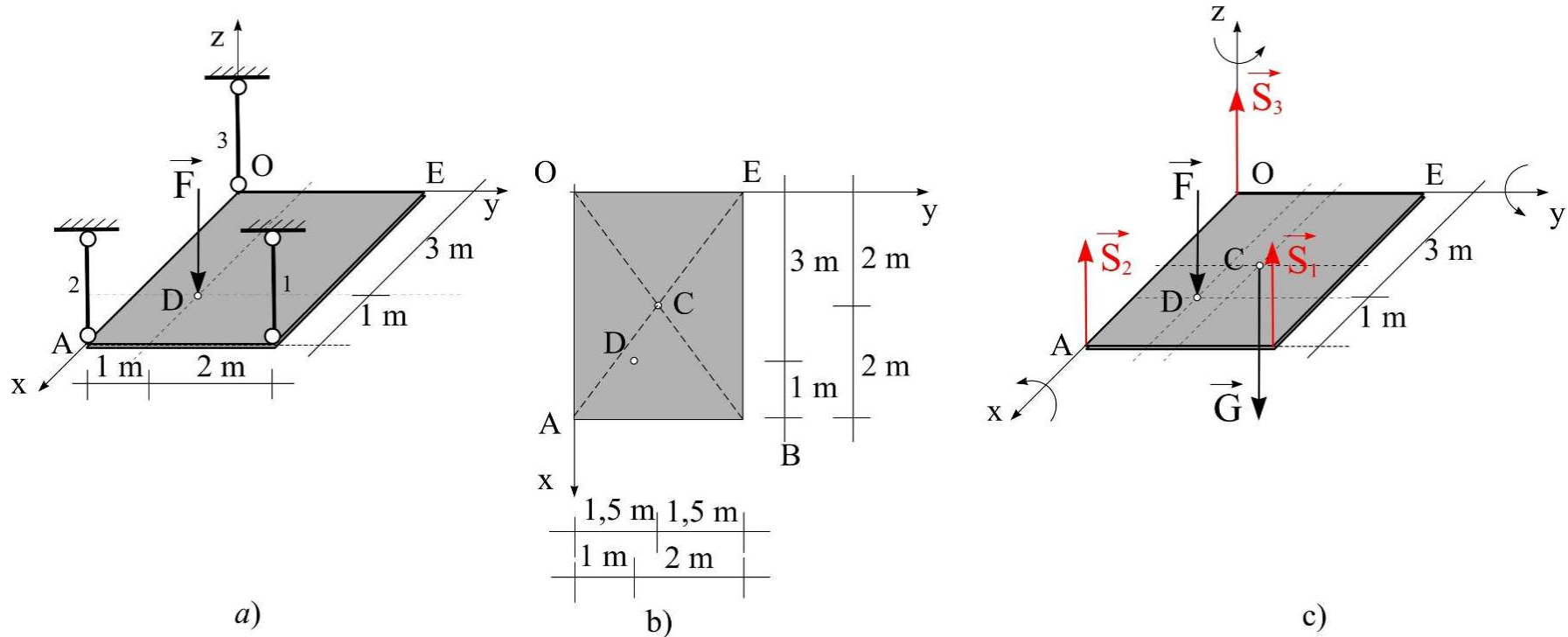
U slučajevima kada pri izračunavanju momenata nije jednostavno odrediti projekcije sile na odgovarajuću ravan ili krakove tih projekcija u odnosu na odgovarajuće ose, preporučuje se da se sila razloži na međusobno upravne komponente, od kojih je jedna paralelna sa jednom od koordinatnih osa, a zatim primeni Varinjonova teorema o momentu rezultante u odnosu na osu. Momenti sila mogu da se izračunaju i analitičkim putem primenom izraza

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^n M_{Ox}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0,$$

$$M_{Oy} = \sum_{i=1}^n M_{Oy}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (z_i X_i - x_i Z_i) = 0,$$

$$M_{Oz} = \sum_{i=1}^n M_{Oz}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i) = 0.$$

Pravougaonu ploču težine $G=10$ kN, opterećenu silom $F=15$ kN, drže u horizontalnom položaju štapovi. Odrediti sile u štapovima 1, 2 i 3.



Na ploču oslobođenu veza deluje sistem od pet paralelnih sila, tako da treba primeniti uslove ravnoteže sistema paralelnih sila u prostoru:

$$\sum Z = 0 \rightarrow S_1 + S_2 + S_3 - F - G = 0,$$

$$\sum M_x (\vec{F}_i) = 0 \rightarrow S_1 \cdot 3 - F \cdot 1 - G \cdot 1,5 = 0,$$

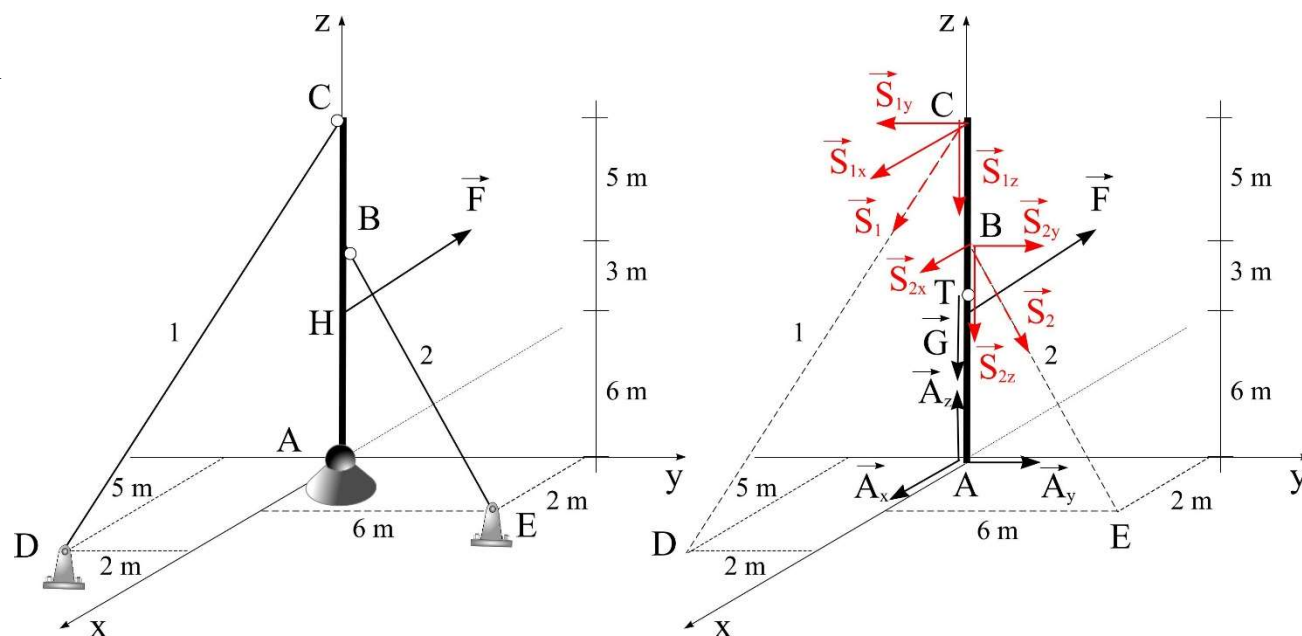
$$\sum M_y (\vec{F}_i) = 0 \rightarrow -S_1 \cdot 4 - S_2 \cdot 4 + F \cdot 3 + G \cdot 2 = 0.$$

$$S_1 = 10 \text{ kN},$$

$$S_2 = 6,25 \text{ kN},$$

$$S_3 = 8,75 \text{ kN}.$$

Stub AC, težine 5 kN, vezan je sfernim zglobom u tački A za podlogu. U tački B na stub deluje sila $F=10$ kN, koja je paralelna sa x osom. Stub u ravnotežnom položaju održavaju zatege CD i BE. Odrediti sile u zategama i reakcije sfernog zgloba A.



$$\cos \alpha_1 = \frac{x_D - x_C}{CD} = \frac{x_D - x_C}{\sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 + (z_D - z_C)^2}} = \text{a) } \frac{5-0}{\sqrt{(5-0)^2 + (-2-0)^2 + (0-14)^2}}$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = 0,3333, \quad \cos \beta_1 = \frac{y_D - y_C}{CD} = \frac{-2-0}{15} = -\frac{2}{15} = -0,13333,$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{z_D - z_C}{CD} = \frac{0-14}{15} = -\frac{14}{15} = -0,93333,$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{x_E - x_B}{BE} = \frac{x_E - x_B}{\sqrt{(x_E - x_B)^2 + (y_E - y_B)^2 + (z_E - z_B)^2}} = \frac{2-0}{\sqrt{(2-0)^2 + (6-0)^2 + (0-9)^2}}$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{2}{11} = 0,18182, \quad \cos \beta_2 = \frac{y_E - y_B}{BE} = \frac{6-0}{11} = \frac{6}{11} = 0,54545,$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{z_E - z_B}{BE} = \frac{0-9}{11} = -\frac{9}{11} = -0,81812.$$

b)

$$S_{1x} = S_1 \cos \alpha_1 = 0,3333 S_1,$$

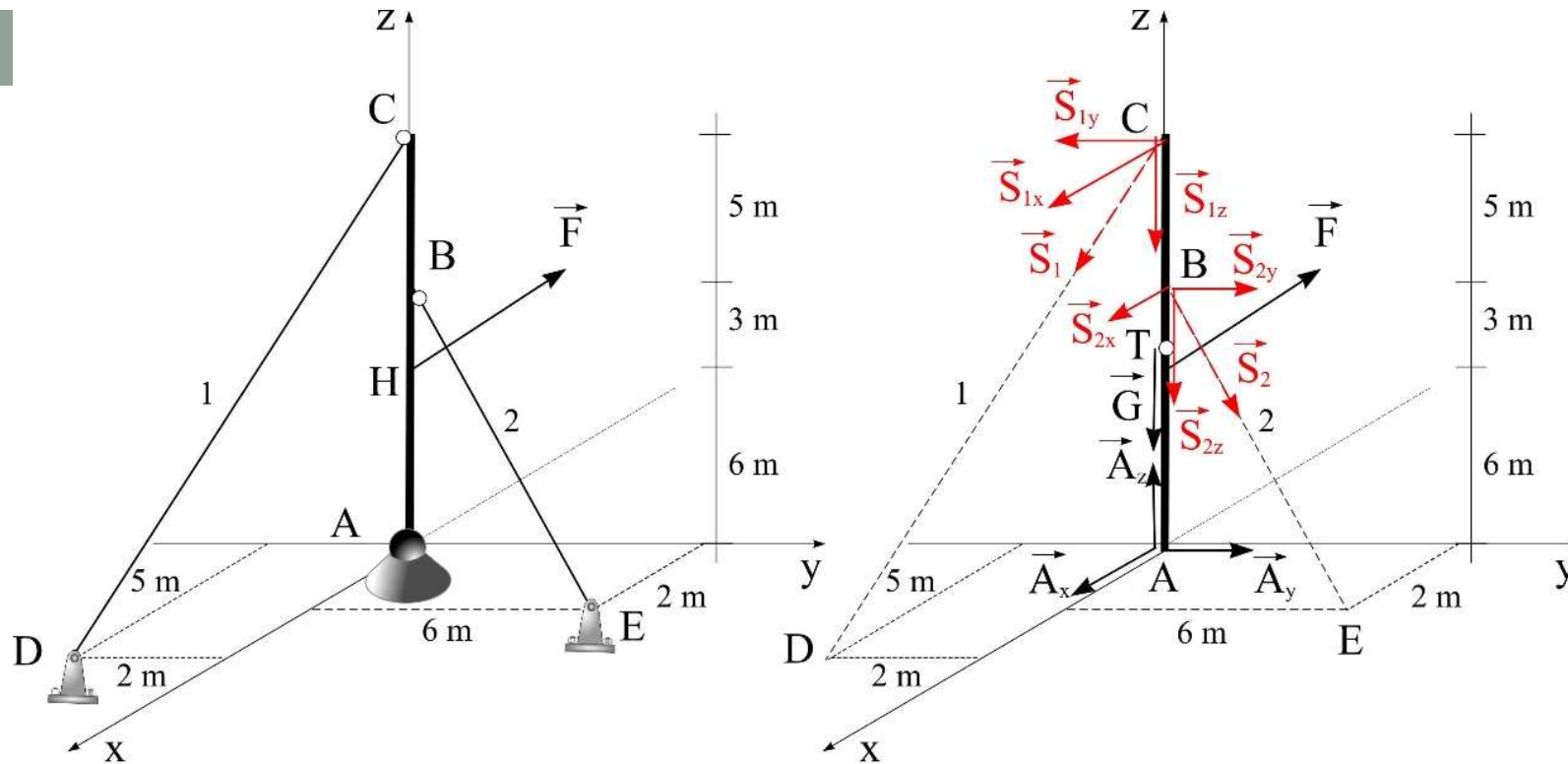
$$S_{1y} = S_1 \cos \beta_1 = -0,3333 S_1,$$

$$S_{1z} = S_1 \cos \gamma_1 = -0,93333 S_1.$$

$$S_{2x} = S_2 \cos \alpha_2 = 0,18182 S_2,$$

$$S_{2y} = S_2 \cos \beta_2 = 0,54545 S_2,$$

$$S_{2z} = S_2 \cos \gamma_2 = -0,81812 S_2.$$



$$\sum X = 0 \rightarrow A_x + 0,33333 S_1 + 0,18182 S_2 - F = 0,$$

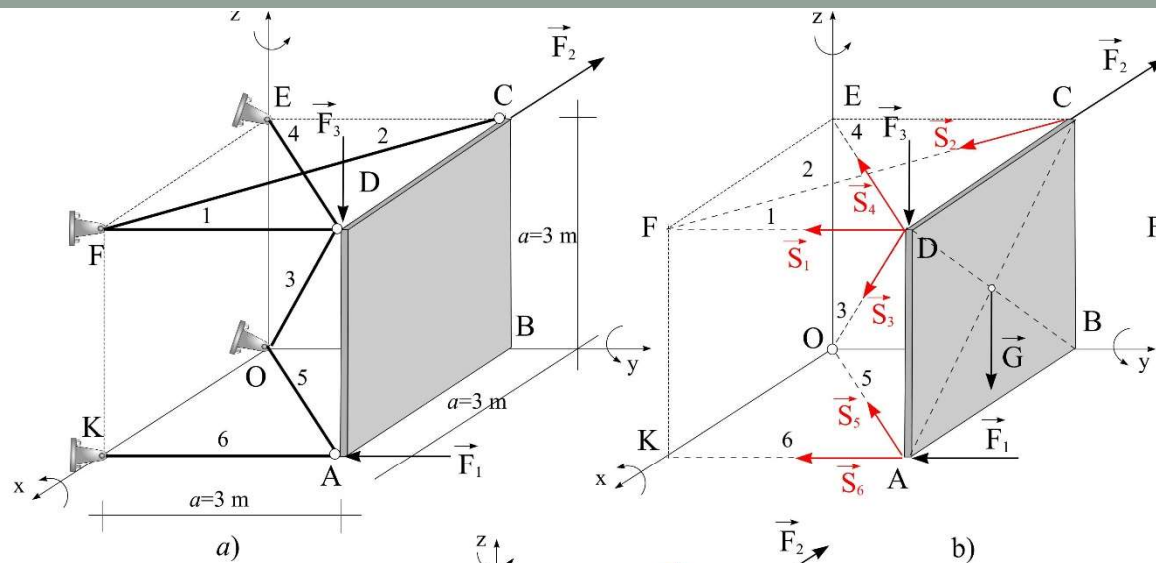
$$\sum Y = 0 \rightarrow A_y - 0,13333 S_1 + 0,54545 S_2 = 0,$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow A_z - 0,93333 S_1 - 0,81812 S_2 - G = 0,$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow 0,13333 S_1 \cdot 14 - 0,54545 S_2 \cdot 9 = 0,$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow 0,33333 S_1 \cdot 14 + 0,81812 S_2 \cdot 9 = 0.$$

$$A_x = 5,44 \text{ kN}, A_y = -0,84 \text{ kN}, A_z = 19,11 \text{ kN}, S_1 = 11,34 \text{ kN}, S_2 = 4,31 \text{ kN}.$$



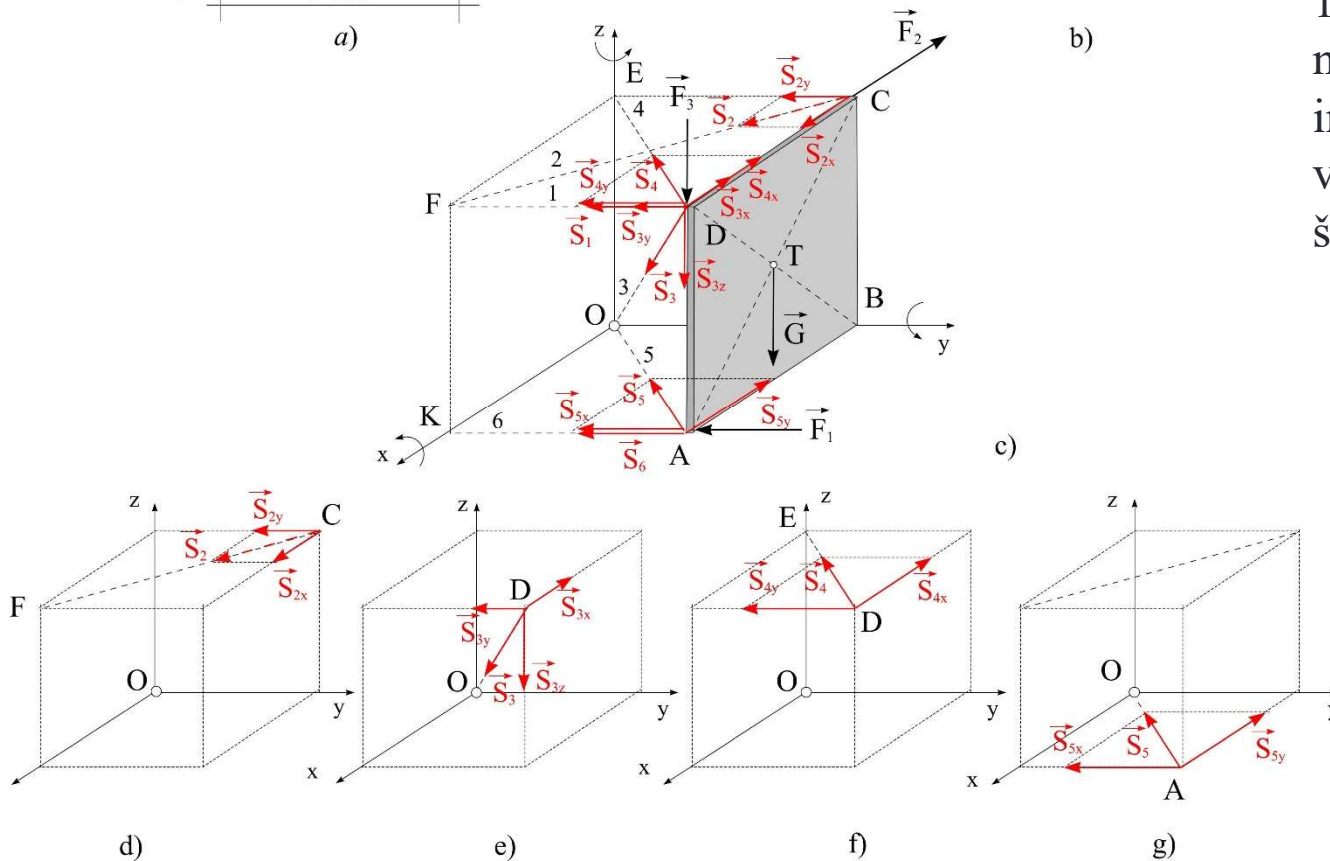
Tanka kruta kvadratna ploča, težine $G=20 \text{ kN}$, održava se u vertikalnom položaju pomoću šest prostih štapova. U smeru negativne ose y na ploču deluje sila F_1 u tački A intenziteta 5 kN , u smeru negativne x ose u tački C deluje sila F_2 intenziteta 10 kN , a u tački D i u smeru negativne z ose deluje sila F_3 intenziteta 10 kN . Odrediti veličine i karakter sila u štapovima.

$$G=20 \text{ kN}$$

$$F_1=5 \text{ kN}$$

$$F_2=10 \text{ kN}$$

$$F_3=10 \text{ kN}$$



$$\cos \alpha_3 = \frac{x_O - x_D}{\overline{DO}} = \frac{0 - a}{a\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cos \beta_3 = \frac{y_O - y_D}{\overline{DO}} = \frac{0 - a}{a\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cos \gamma_3 = \frac{z_O - z_D}{\overline{DO}} = \frac{0 - a}{a\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

Uslovne jednačine ravnoteže glase:

$$\sum X = 0 \rightarrow S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} - F_2 = 0,$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow -S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} - F_1 = 0,$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow -S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} - F_3 - G = 0,$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow S_1 \cdot 3 + S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 + S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 - F_3 \cdot 3 - G \cdot 3 = 0,$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 - S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 + G \cdot 1,5 - F_2 \cdot 3 + F_3 \cdot 3 = 0,$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow -S_1 \cdot 3 + S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 - S_6 \cdot 3 + F_2 \cdot 3 = 0.$$

Sile u štapovima su:

$$S_1 = 20 \text{ kN}, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = -30\sqrt{3} \text{ kN}, \quad S_4 = 10\sqrt{2} \text{ kN}, \quad S_5 = 10\sqrt{2} \text{ kN}, \quad S_6 = -15 \text{ kN}.$$

Najvažnije u ovom poglavlju

- **Koji su uslovi ravnoteže proizvoljnog sistema sila u prostoru**
- **Veze u prostoru – sferni oslonac, cilindrično ležište, uklještenje**
- **Kako se rešavaju problemi ravnoteže tela pod dejstvom prostornog sistema sila**