

TEHNIČKA MEHANIKA I

13. PREDAVANJE

UNUTRAŠNJE SILE U POPREČNOM PRESEKU PROSTORNOG LINIJSKOG NOSAČA

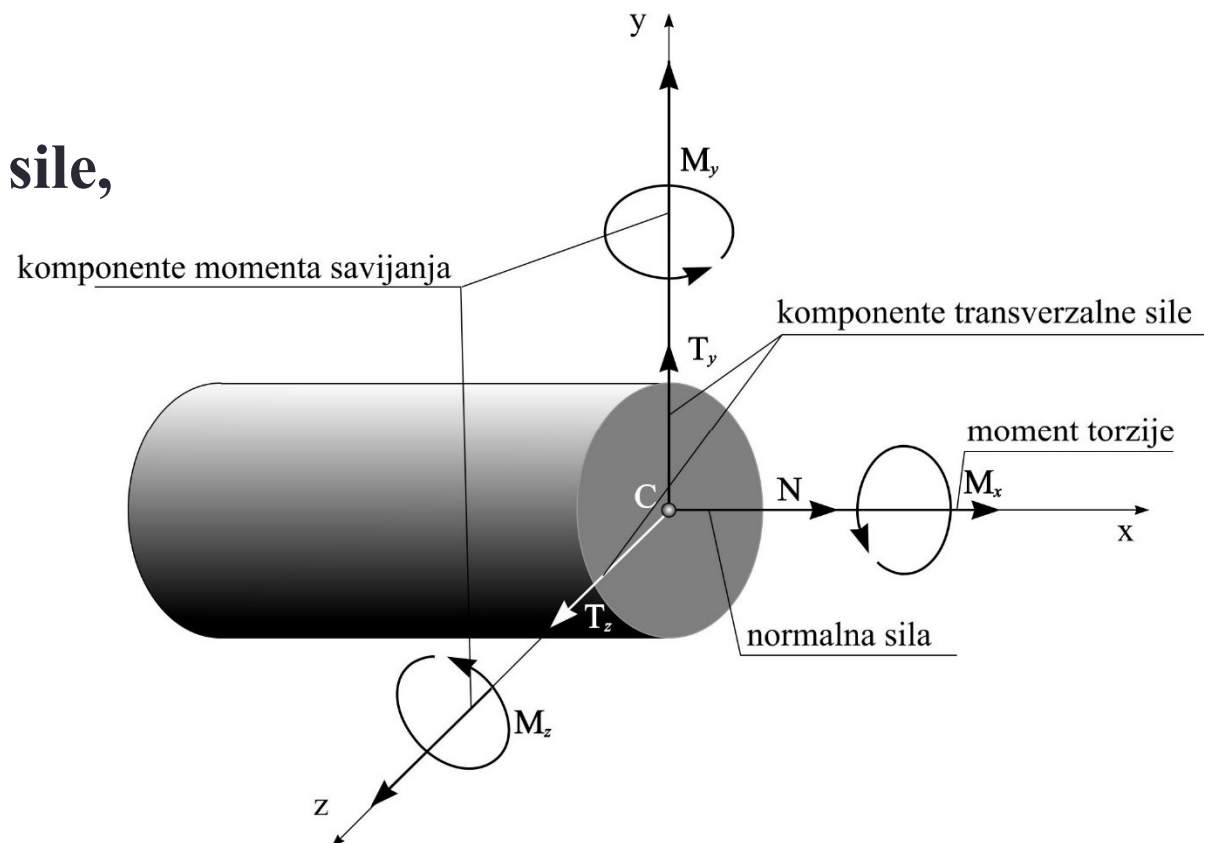
Str 291-300 knjiga Poglavlje 12.2 – Unutrašnje sile u poprečnom preseku prostornog linijskog nosača

ŠTA ĆEMO NAUČITI U OVOM POGLAVLJU?

- **Određivanje sila u presecima prostornih linijskih nosača**
- **Konvencija o znaku unutrašnjih sila u poprečnom preseku prostornih linijskih nosača**
- **Crtanje dijagrama unutrašnjih sila u poprečnom preseku prostornih linijskih nosača**

UNUTRAŠNJE SILE U POPREČNOM PRESEKU PROSTORNOG LINIJSKOG NOSAČA

U prostornim linijskim nosačima spoljašnja opterećenja izazivaju:
 podužne – normalne sile,
 poprečne – transverzalne sile,
 momente uvrtnja i
 momente savijanja.



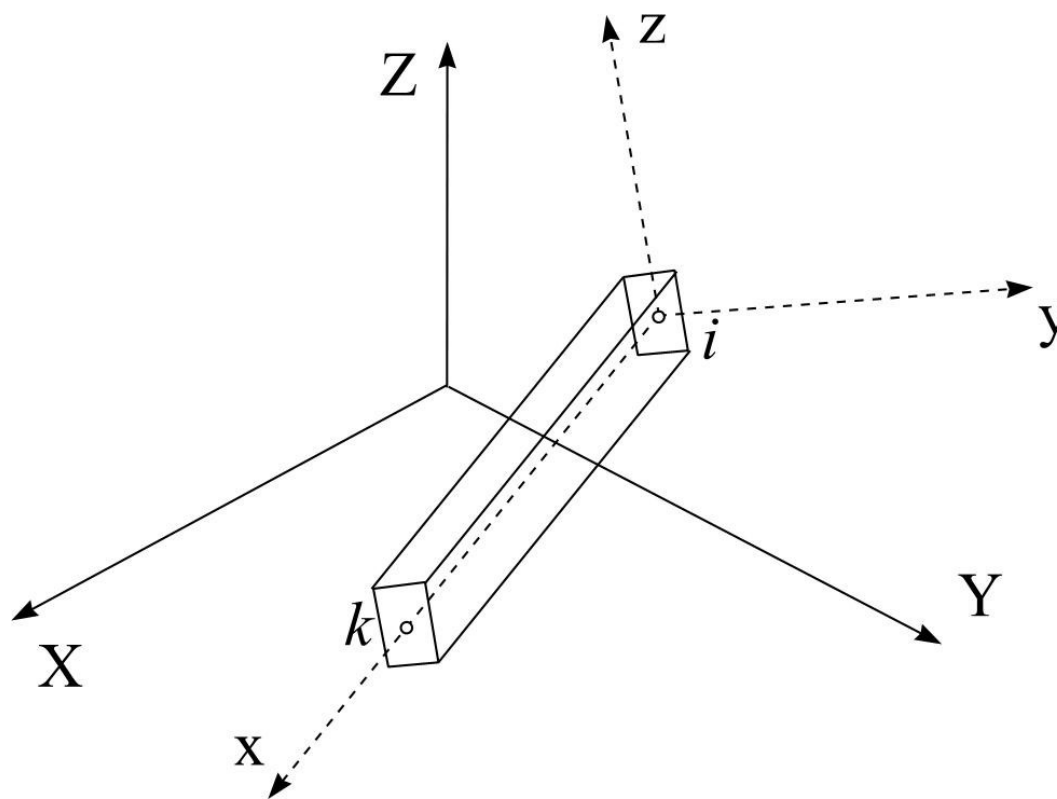
SISTEM OZNAKA

Da bi se konstrukcija kvalitetno analizirala i proračunala usvoja se sistem oznaka za:

- 1. GEOMETRIJU KONSTRUKCIJE**
- 2. OPTEREĆENJA**
- 3. REAKCIJE**
- 4. UNUTRAŠNJE SILE**

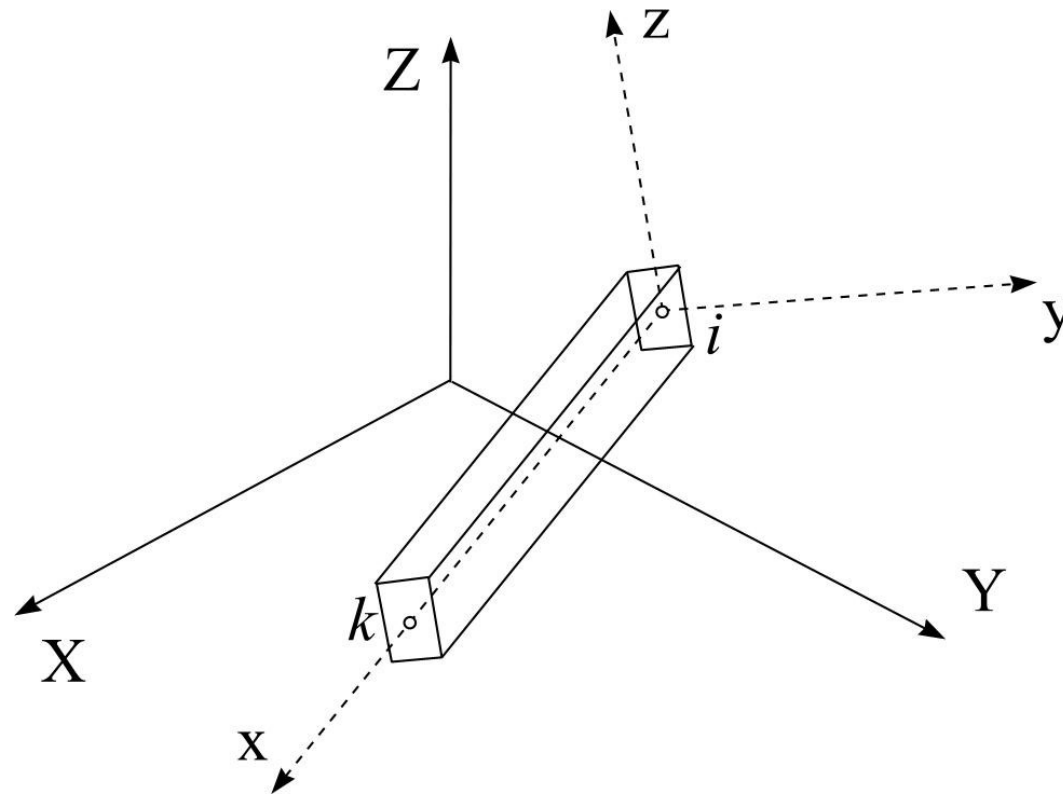
Danas, kad se u proračunima primjenjuju računari, usvojen je sistem oznaka koji odgovara njihovoj upotrebi.

Geometrija konstrukcije se prikazuje u globalnom koordinatnom sistemu (g.k.s.) i lokalnom koordinatnom sistemu (l.k.s.).



Globalna geometrija daje podatke o čvorovima i štapovima.

Podaci o čvorovima sadrže **redni broj čvora** i **njegove koordinate u g.k.s.** (po pravilu desni pravougli koordinatni sistem)



Koordinatni početak g.k.s. bira se proizvoljno.

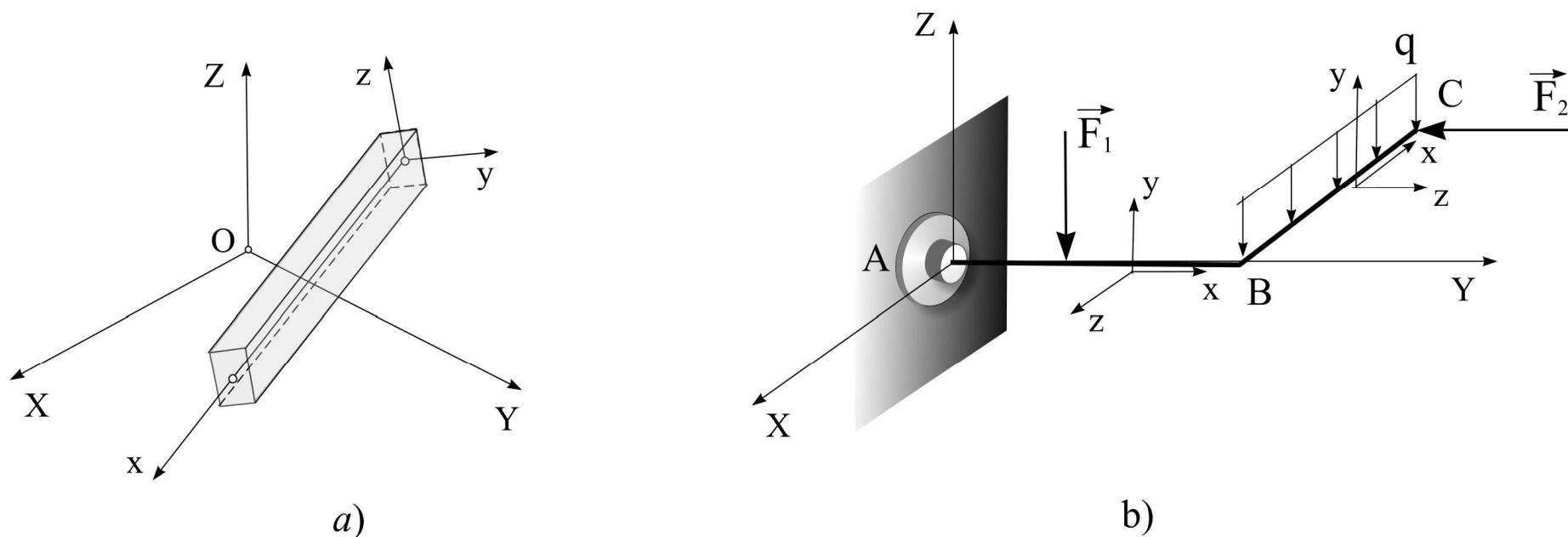
Veze konstrukcije takođe se opisuju u g.k.s.

Položaj štapova zadaje se u globalnom, ali i u lokalnim sistemima.

U g.k.s. štapu se pridružuje redni broj štapa, ali se još zadaje podatak između kojih se čvorova štap nalazi.

POSTAVLJANJE LOKALNOG KOORDINATNOG SISTEMA

Lokalni koordinatni sistem pridružuje se svakom štapu tako što se koordinatni početak postavlja u prvom čvoru, a osa x usmerava prema drugom čvoru.

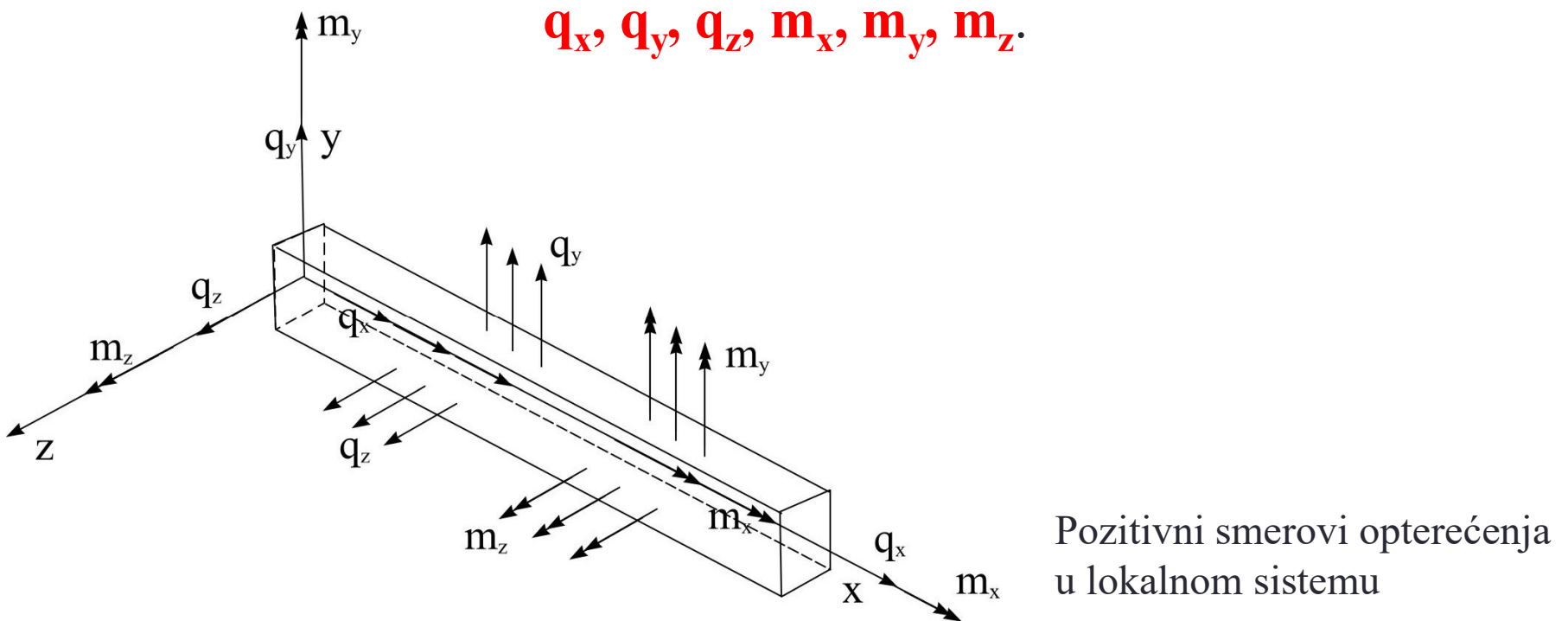


Štap u globalnom i lokalnom sistemu

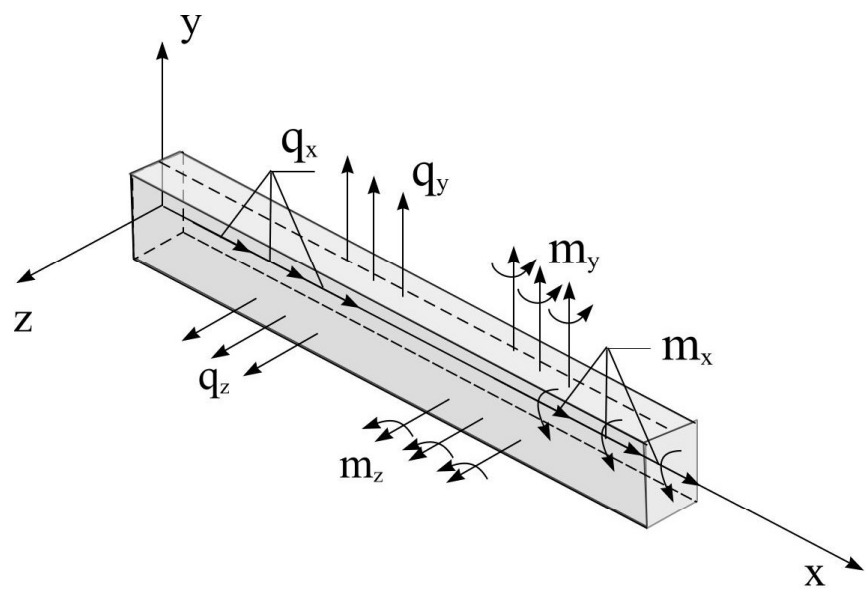
Osnovno pravilo je podudaranje lokalnih osa štapa y i z sa glavnim osima poprečnog preseka štapa.

Opterećenje konstrukcije se zadaje preko čvorova i štapova. Opterećenja čvorova prikazuju se u globalnom sistemu, opterećenja štapova prikazuju u lokalnom sistemu.

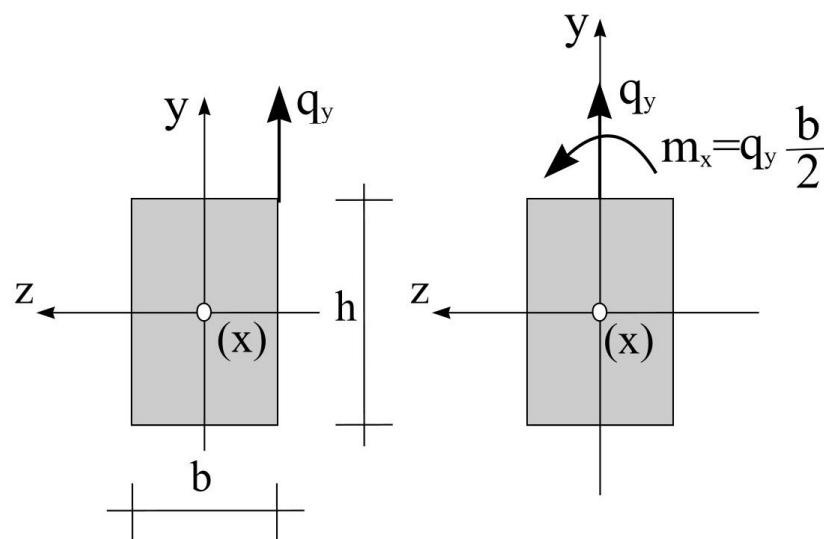
Opterećenje u lokalnom sistemu se u najopštijem slučaju sastoji od **raspodeljenih sila u sva tri pravca i raspodeljenih momenata oko sve tri ose:**



Raspodeljeni momenti se javljaju na gredi najčešće kao posledica ekscentričnog dejstva raspodeljenog opterećenja.



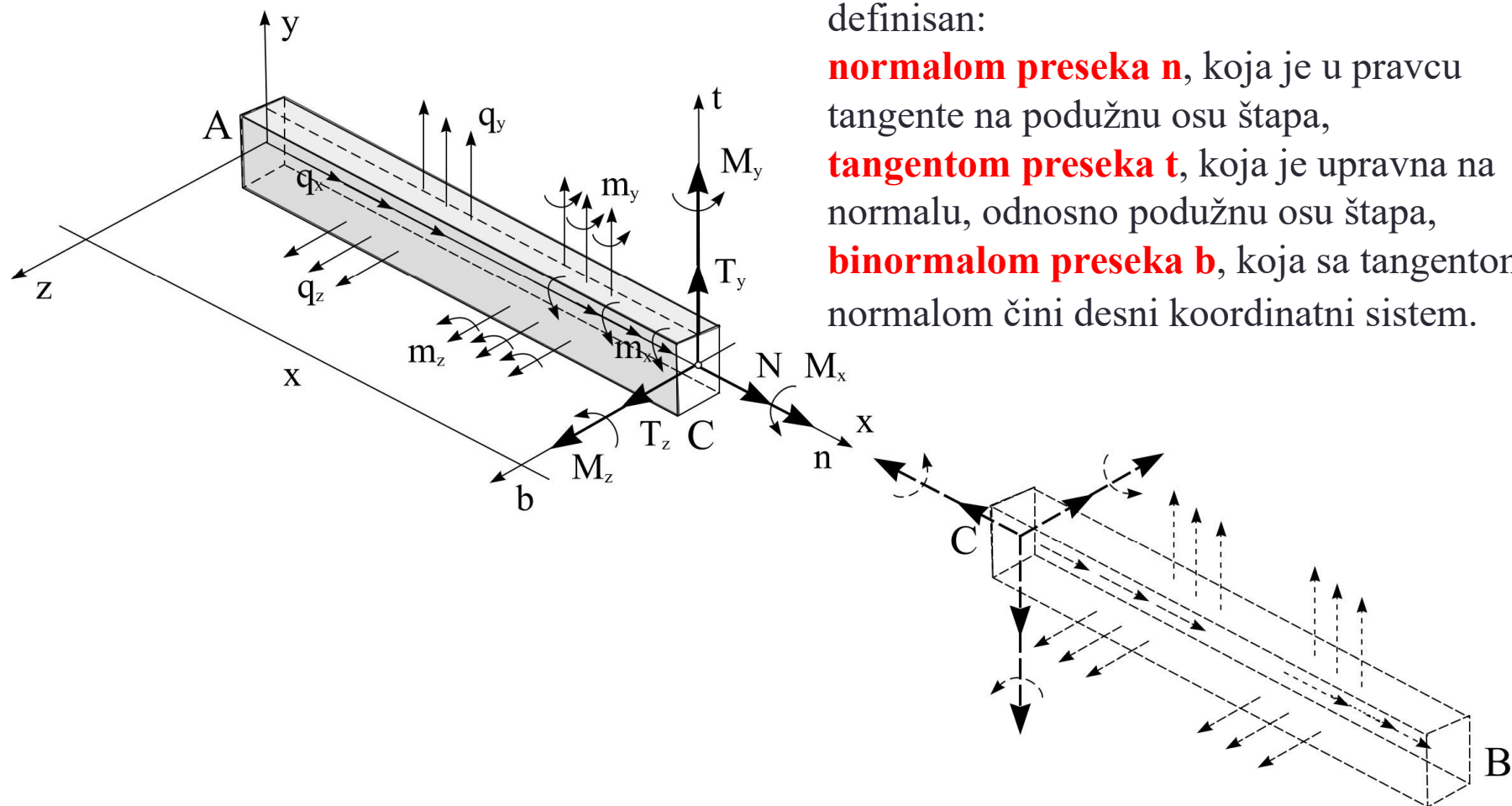
Pozitivni smerovi opterećenja u lokalnom sistemu



raspodeljeni moment

- **Reakcije veza** se prikazuju kao koncentrirane sile u osloncima i to u globalnom sistemu. Pretpostavlja se da su smerovi reakcija u smeru osa koordinatnog sistema.
- **Unutrašnje sile.** Prikazivanje stanja unutrašnjeg delovanja, odnosno delovanja između čestica tela izloženog spoljašnjim silama, svodi se na prikaz međusobnog delovanja preseka upravno na osu štapa. Međusobno delovanje se sastoji od **glavnog vektora i glavnog momenta.**
- Delovi tela deluju jedan na drugi istim torzerom suprotnog predznaka. Kada se delovi tela ponovo spoje, dejstva odbačenih delova postaju unutrašnje sile u posmatranom preseku.

Delovanje odbačenog desnog dela predstavljaju dva vektora **glavni vektor** i **glavni moment**, koji mogu da se razlože na po tri komponente u pravcima osa lokalnog koordinatnog sistema: **N , T_y , T_z , M_x , M_y , M_z** .



Posmatrani presek u geometrijskom smislu je definisan:

normalom preseka n , koja je u pravcu tangente na podužnu osu štapa,

tangentom preseka t , koja je upravna na normalu, odnosno podužnu osu štapa,

binormalom preseka b , koja sa tangentom i normalom čini desni koordinatni sistem.

Komponente glavnog vektora i glavnog momenta su:

N - uzdužna ili normalna sila,

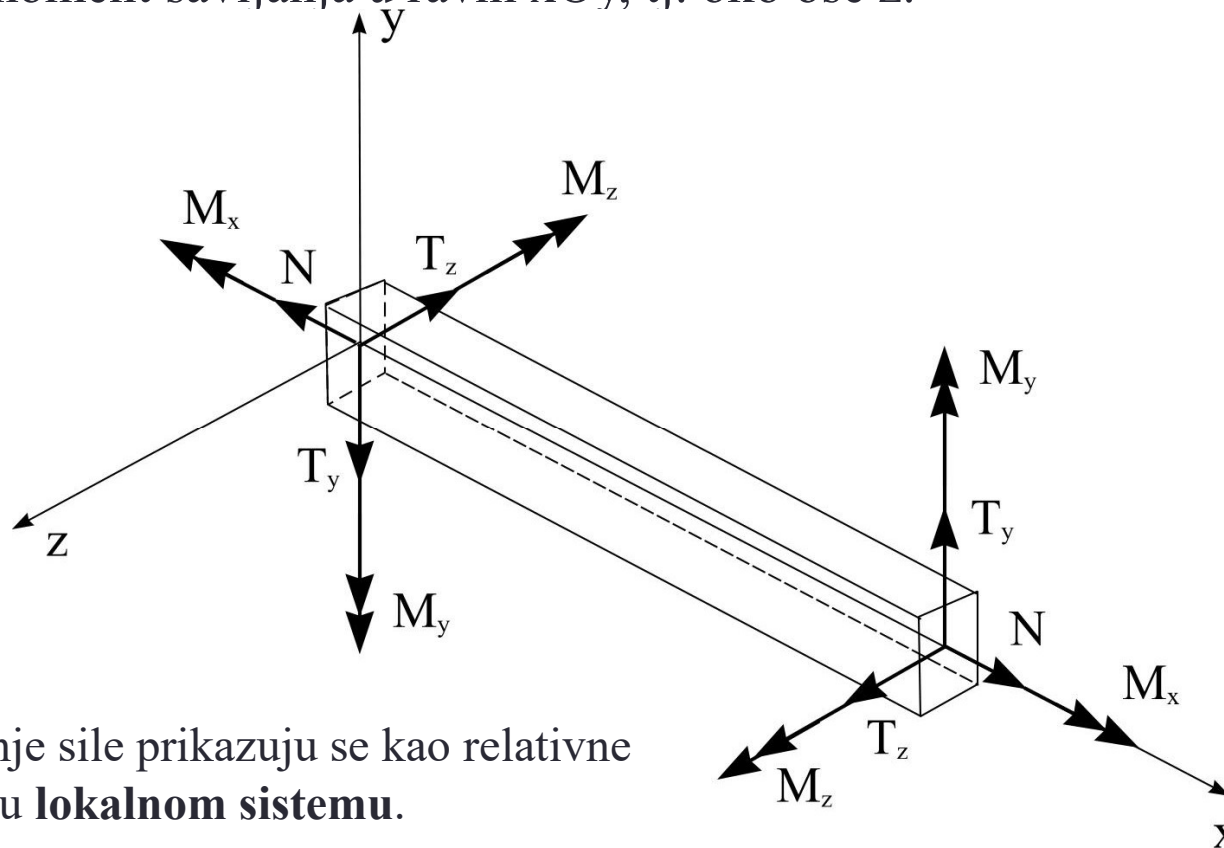
T_y - poprečna sila u ravni xOy ili transverzalna sila u y pravcu,

T_z - poprečna sila u ravni xOz ili transverzalna sila u z pravcu,

M_x - moment uvrtnjanja ili moment torzije,

M_y - moment savijanja u ravni xOz , tj. oko ose y ,

M_z - moment savijanja u ravni xOy , tj. oko ose z .



Unutrašnje sile prikazuju se kao relativne veličine u **lokalnom sistemu**.

Komponente glavnog vektora i glavnog momenta su:

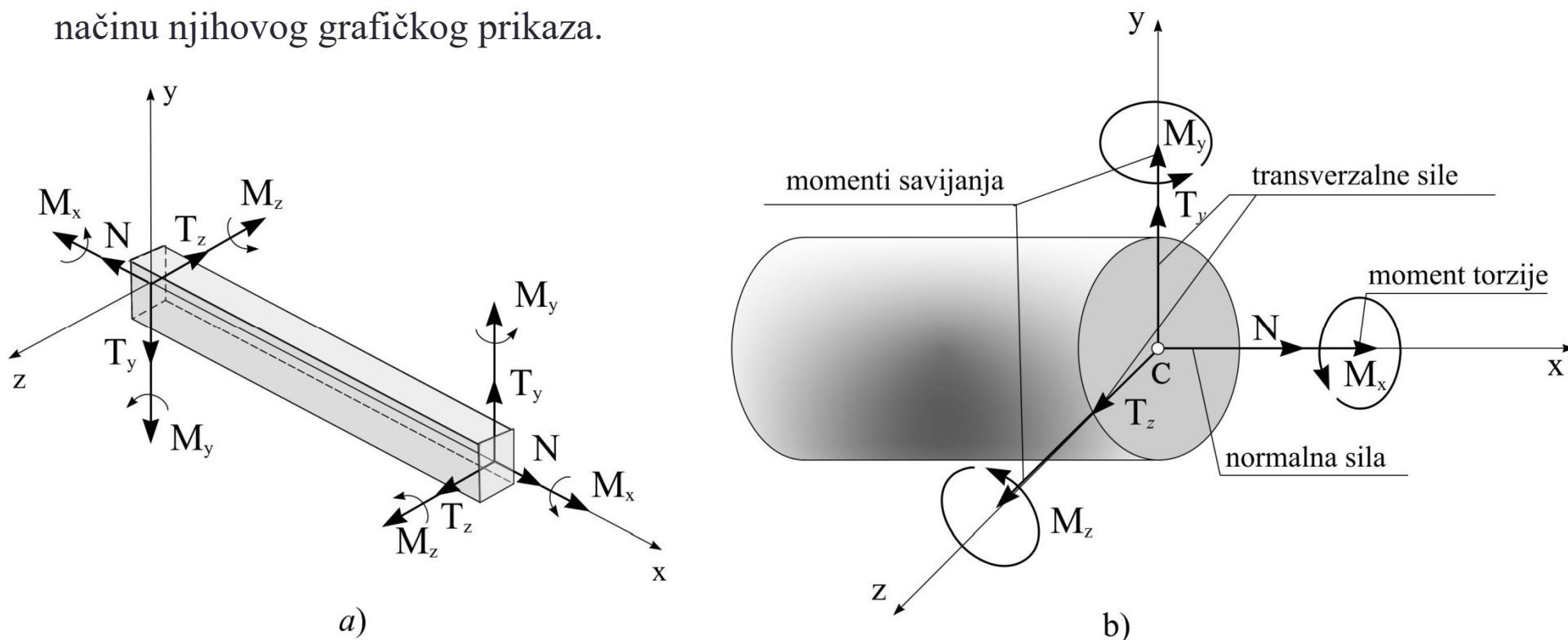
- **N - podužna ili normalna – aksijalna sila**, koja predstavlja komponentu redukcionu rezultantu u pravcu podužne ose štapa;
- **T_y - poprečna sila u ravni xOy ili transverzalna sila u y pravcu** je komponenta redukcionu rezultantu u pravcu ose y;
- **T_z - poprečna sila u ravni xOz ili transverzalna sila u z pravcu** je komponenta redukcionu rezultantu u pravcu ose z;
- **M_x - moment uvrtnja ili moment torzije** je komponenta glavnog momenta u pravcu ose x;
- **M_y - moment savijanja u ravni xOz, tj. oko ose y** je komponenta glavnog momenta u pravcu ose y;
- **M_z - moment savijanja u ravni xOy, tj. oko ose z** je komponenta glavnog momenta u pravcu ose z,

Posmatrajući ravnotežu levog ili desnog dela tela iz uslova ravnoteže sledi:

- **Normalna sila N** jednaka je algebarskom zbiru projekcija u pravcu normale preseka svih sila sa jedne ili druge strane preseka.
- **Poprečna sila T_y** jednaka je algebarskom zbiru projekcija u pravcu tangente preseka svih sila sa jedne ili druge strane preseka.
- **Poprečna sila T_z** jednaka je algebarskom zbiru projekcija u pravcu binormale preseka svih sila sa jedne ili druge strane preseka.
- **Moment uvrtanja M_x** jednak je algebarskom zbiru projekcija u pravcu normale preseka svih momenata sa jedne ili druge strane preseka.
- **Moment savijanja M_y** jednak je algebarskom zbiru projekcija u pravcu tangente preseka svih momenata sa jedne ili druge strane preseka.
- **Moment savijanja M_z** jednak je algebarskom zbiru projekcija u pravcu binormale preseka svih momenata sa jedne ili druge strane preseka.

KONVENCIJA O ZNAKU SILA U PRESEKU

Unutrašnje sile prikazuju se u lokalnom sistemu. Za razliku od štapa rešetkaste konstrukcije, kod štapa u prostoru nema jedinstvenog dogovora o znacima unutrašnjih sila i načinu njihovog grafičkog prikaza.

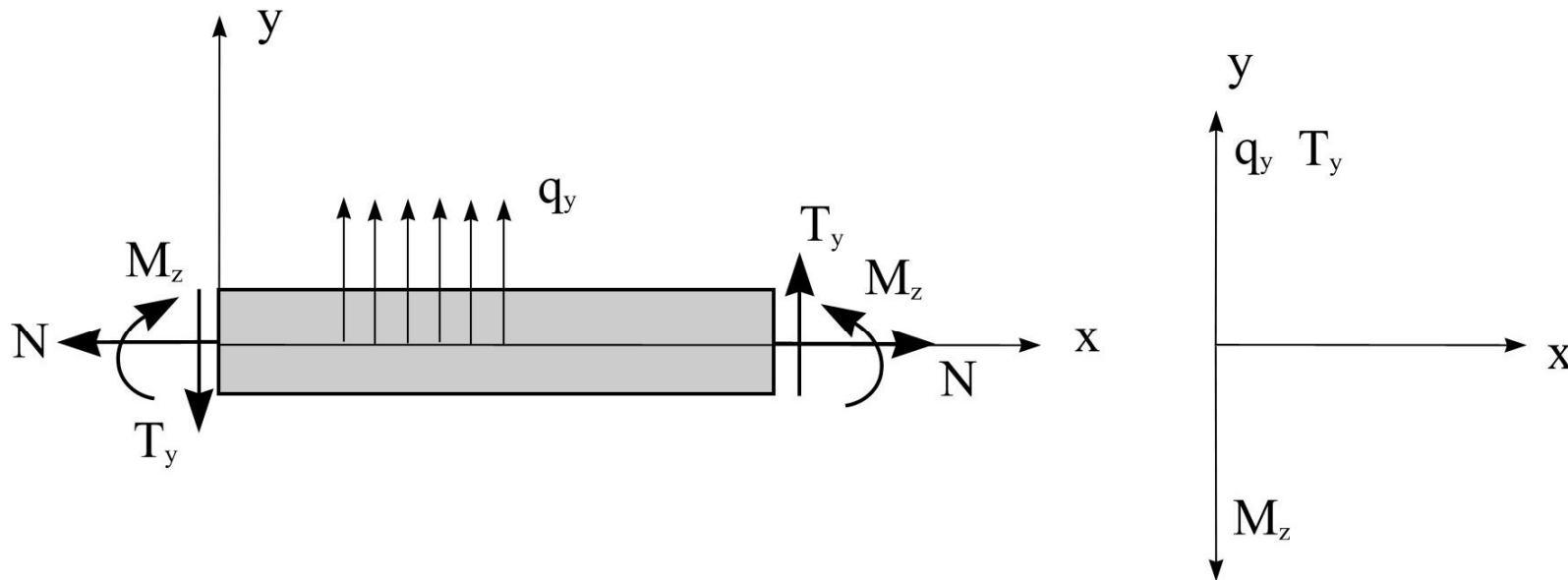


Usvaja se konvencija zasnovana na desnom koordinatnom sistemu, koja je u skladu sa računarskim metodama.

Usvajanje pozitivnih smerova zasniva se na smerovima lokalnog sistema u preseku čija se normala podudara sa pozitivnim smerom lokalne ose x. Ovi smerovi kompatibilni su sa smerovima opterećenja i pomeranja.

SAVIJANJE U RAVNI XOY

Pozitivni smerovi opterećenja i presečnih sila kao i načini projektovanja i grafičkog prikaza pri savijanju štapa opterećenjem u lokalnoj ravni xOy , prikazani su na slici. Projektovanje se vrši iz smeru treće ose.

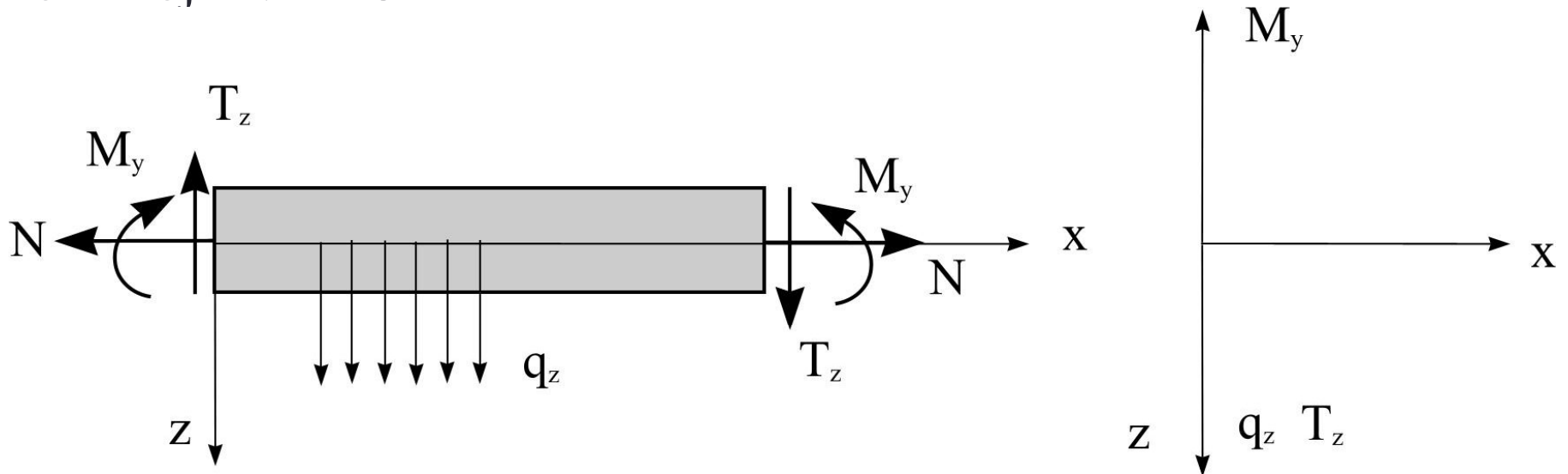


pozitivni smerovi unutrašnjih sila

smerovi crtanja pozitivnih veličina

SAVIJANJE U RAVNI XOZ

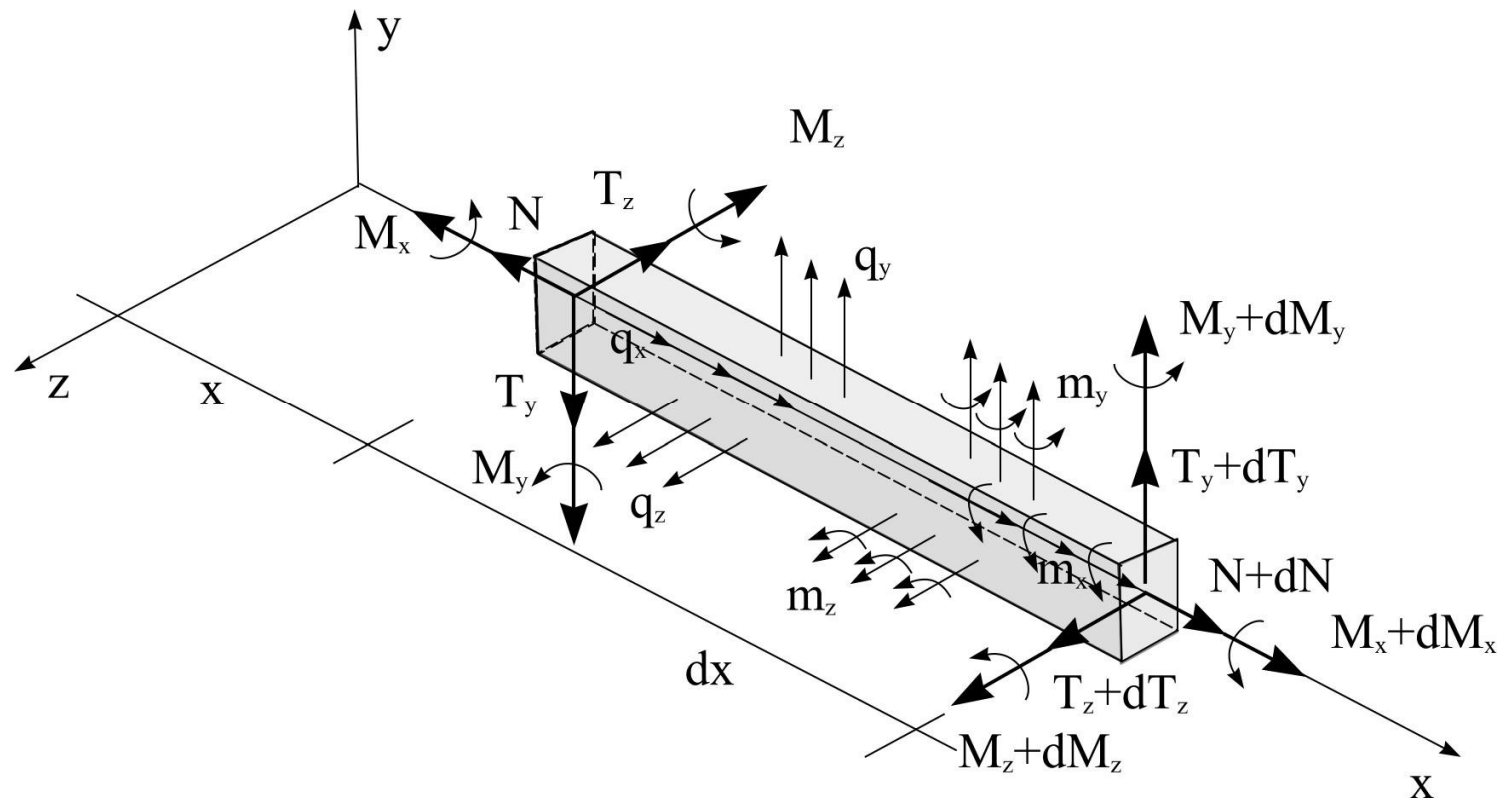
Pozitivni smerovi opterećenja i presečnih sila kao i načini projektovanja i grafičkog prikaza pri savijanju štapa opterećenjem u lokalnoj ravni xOz



pozitivni smerovi unutrašnjih sila

smerovi crtanja pozitivnih veličina

DIFERENCIJALNE VEZE IZMEĐU SPOLJAŠNJIH I UNUTRAŠNJIH SILA



Diferencijalni element štapa u prostoru

Ako se zanemare diferencijalne veličine drugoga reda, iz šest skalarnih uslova ravnoteže sledi:

$$\sum X = 0 \Rightarrow N + dN - N + q_x dx = 0,$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow T_y + dT_y - T_y + q_y dx = 0,$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow T_z + dT_z - T_z + q_z dx = 0,$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_x + dM_x - M_x + m_x dx = 0,$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow M_y + dM_y - M_y - T_z dx + m_y dx = 0,$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_z + dM_z - M_z + T_y dx + m_z dx = 0.$$

$$\frac{dN}{dx} = -q_x,$$

$$\frac{dT_y}{dx} = -q_y,$$

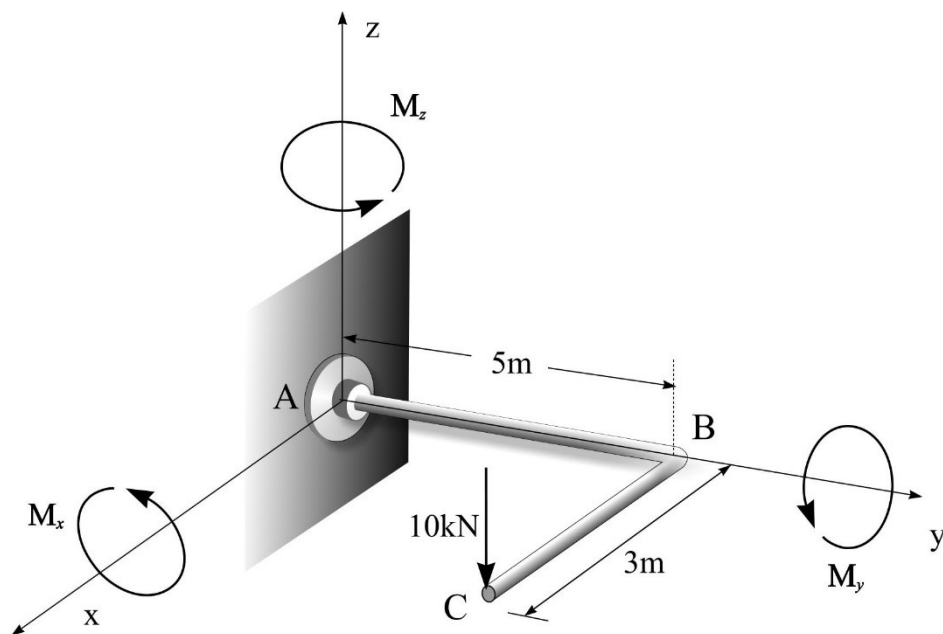
$$\frac{dT_z}{dx} = -q_z,$$

$$\frac{dM_x}{dx} = -m_x,$$

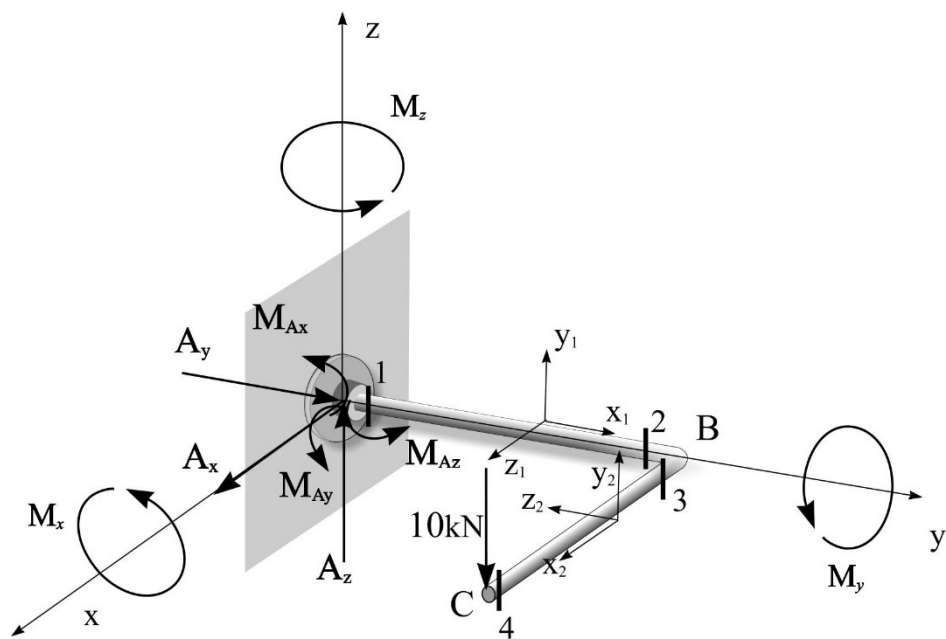
$$\frac{dM_y}{dx} - T_z = -m_y,$$

$$\frac{dM_z}{dx} + T_y = -m_z.$$

- Na osnovu svega izloženog vidi se da kod prostornih linijskih nosača postoje transverzalne sile i momenti savijanja u dve ravni, u horizontalnoj xOz i vertikalnoj xOy .
- **Crtanje statičkih dijagrama kod prostornih linijskih nosača vrši se na isti način kao i kod linijskih nosača u ravni, s tim što se posebno crtaju dijagrami transverzalnih sila i momenata savijanja za vertikalnu ravan nosača i horizontalnu ravan nosača, pri čemu se znaci transverzalnih sila i momenata savijanja određuju kako je to napred definisano.**
- Dijagram aksijalnih sila konstruiše se na isti način kao kod ravnih nosača.
- Nova vrsta uticaja je **torzija**, tj. **moment torzije** i crtanje dijagrama momenata torzije. Konstrukcija dijagrama momenata torzije vrši se analogno crtanju dijagrama aksijalnih sila.



Primer: Prostorni linijski nosač ABC, uklješten na kraju A, dimenzija datih na slici, opterećen je koncentrisanom silom $F=10\text{kN}$. Napadna linija sile prolazi kroz slobodan kraj C i paralelna je sa osom z. Odrediti reakcije uklještenja i nacrtati dijagrame transverzalnih sila, aksijalnih sila, momenata savijanja i momenata torzije.



$$\sum X = 0 \Rightarrow A_x = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow A_y = 0, \quad (2)$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow A_z - F = 0, \quad (3)$$

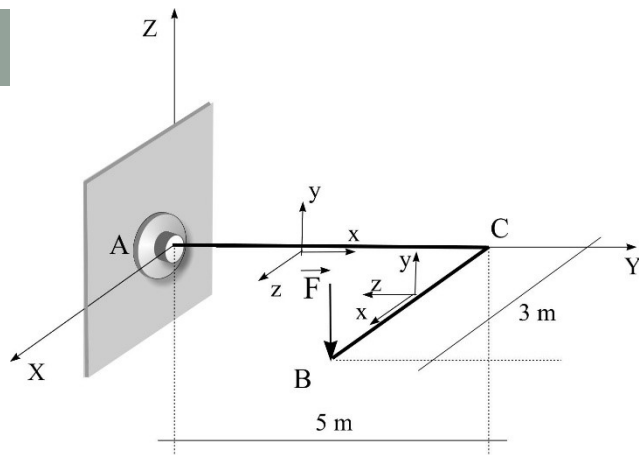
$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_{A_x} - F \cdot 5 = 0, \quad (4)$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow M_{A_y} + F \cdot 3 = 0, \quad (5)$$

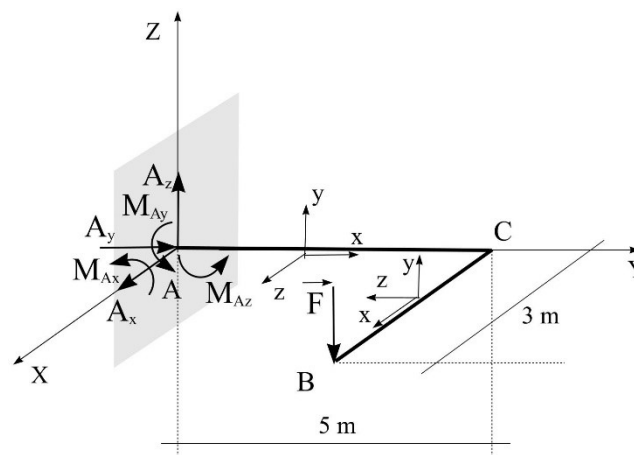
$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_{A_z} = 0, \quad (6)$$

$$(1) \Rightarrow A_x = 0, \quad (2) \Rightarrow A_y = 0, \quad (3) \Rightarrow A_z = F = 10\text{kN},$$

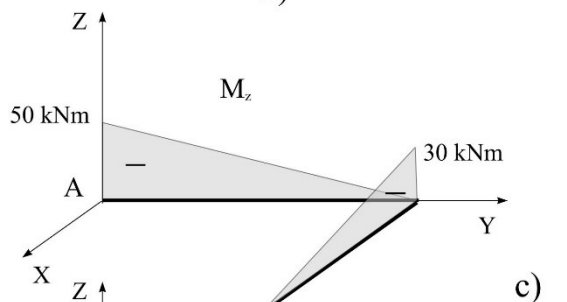
$$(4) \Rightarrow M_{A_x} = F \cdot 5 = 50\text{kNm}, \quad (5) \Rightarrow M_{A_y} = -F \cdot 3 = -30\text{kNm}, \quad (6) \Rightarrow M_{A_z} = 0.$$



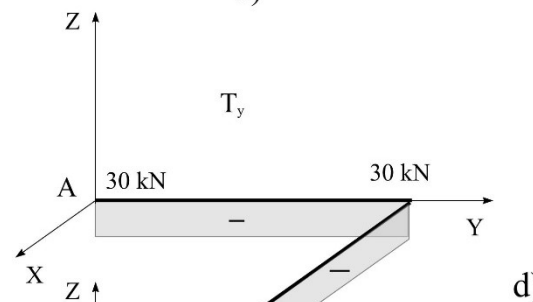
a)



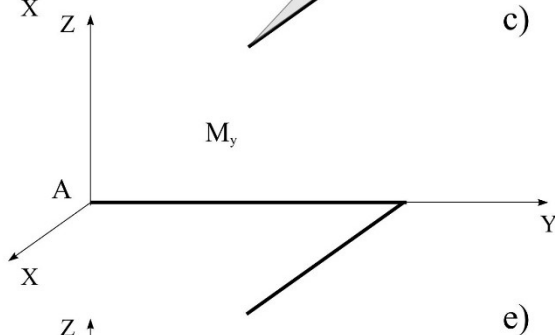
b)



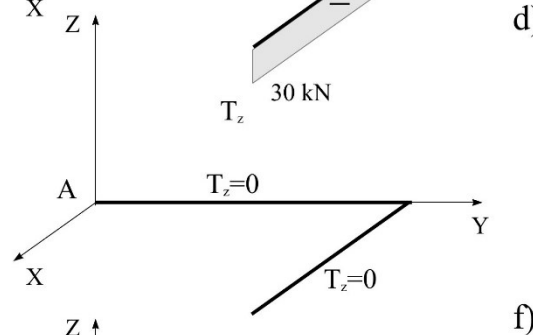
c)



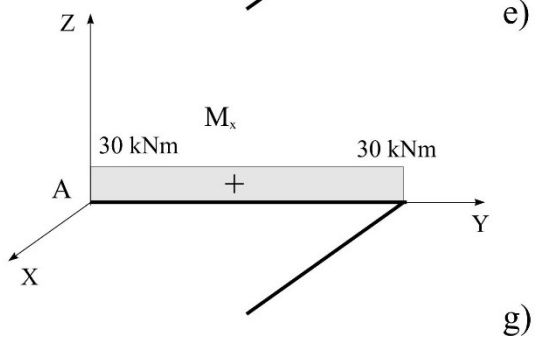
d)



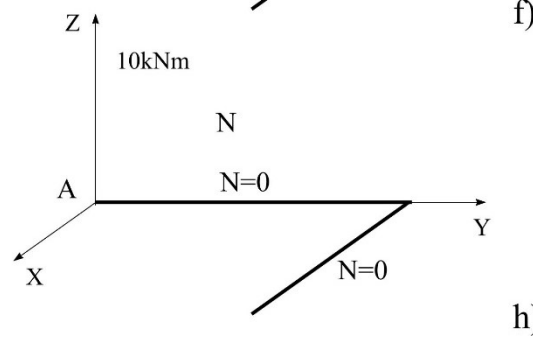
e)



f)



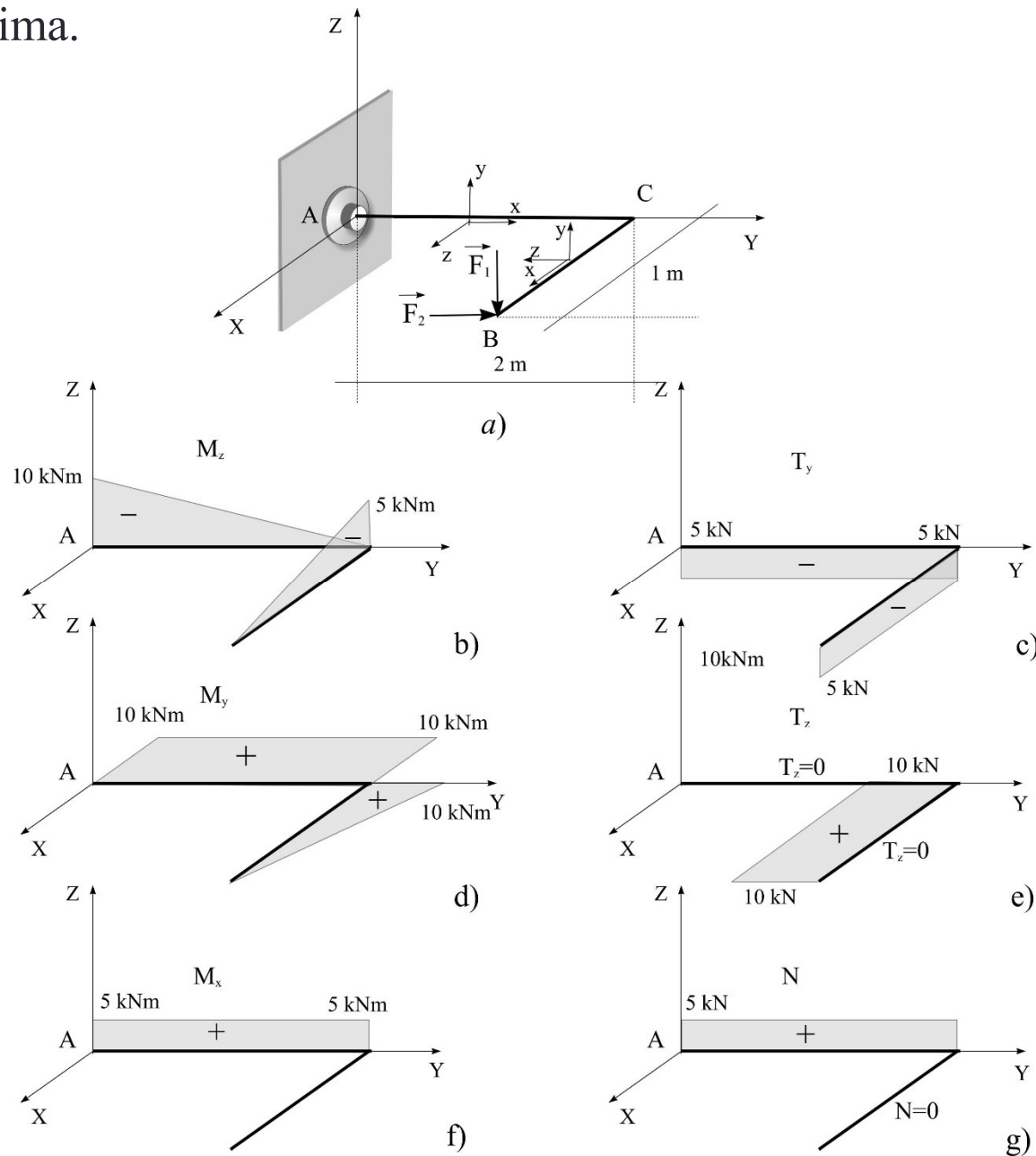
g)



h)

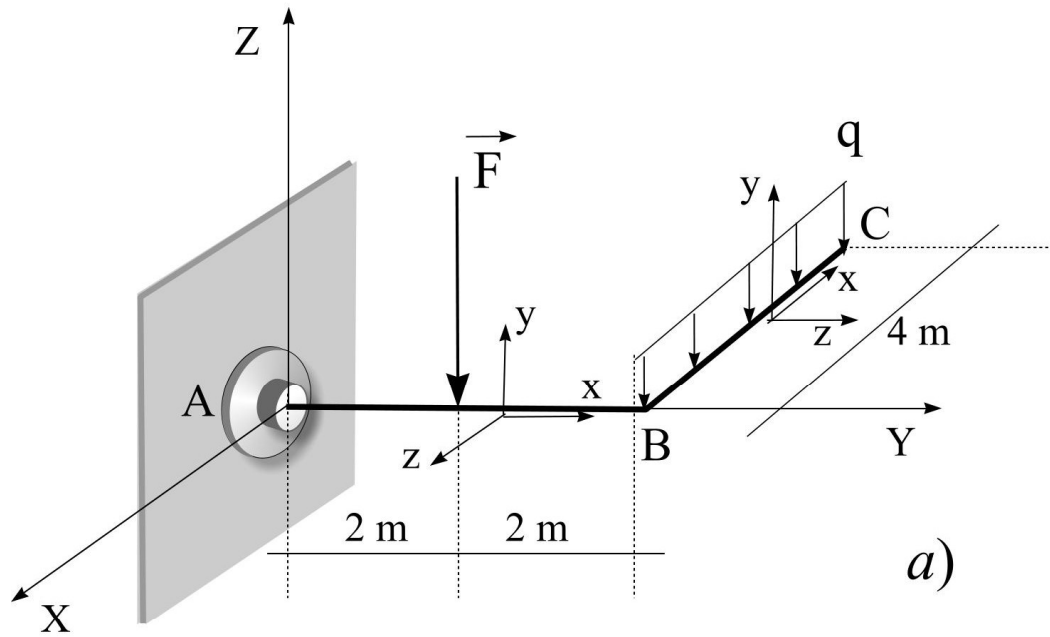
Primer:

Na slobodnom kraju konzole deluju sile $F_1=5\text{ kN}$ i $F_2=10\text{ kN}$. Nacrtati dijagrame sila u presecima.

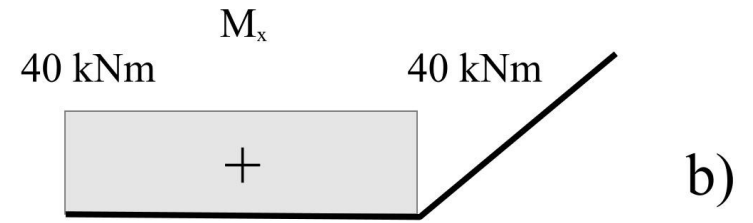


Primer:

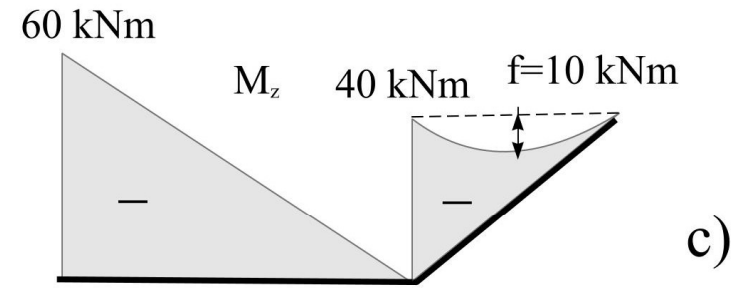
Nacrtati dijagrame sila u presecima za datu konzolu i opterećenje $F=10 \text{ kN}$, $q=5 \text{ kN/m}$.



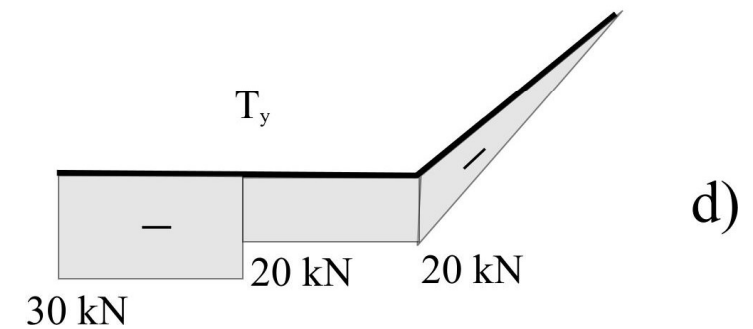
a)



b)



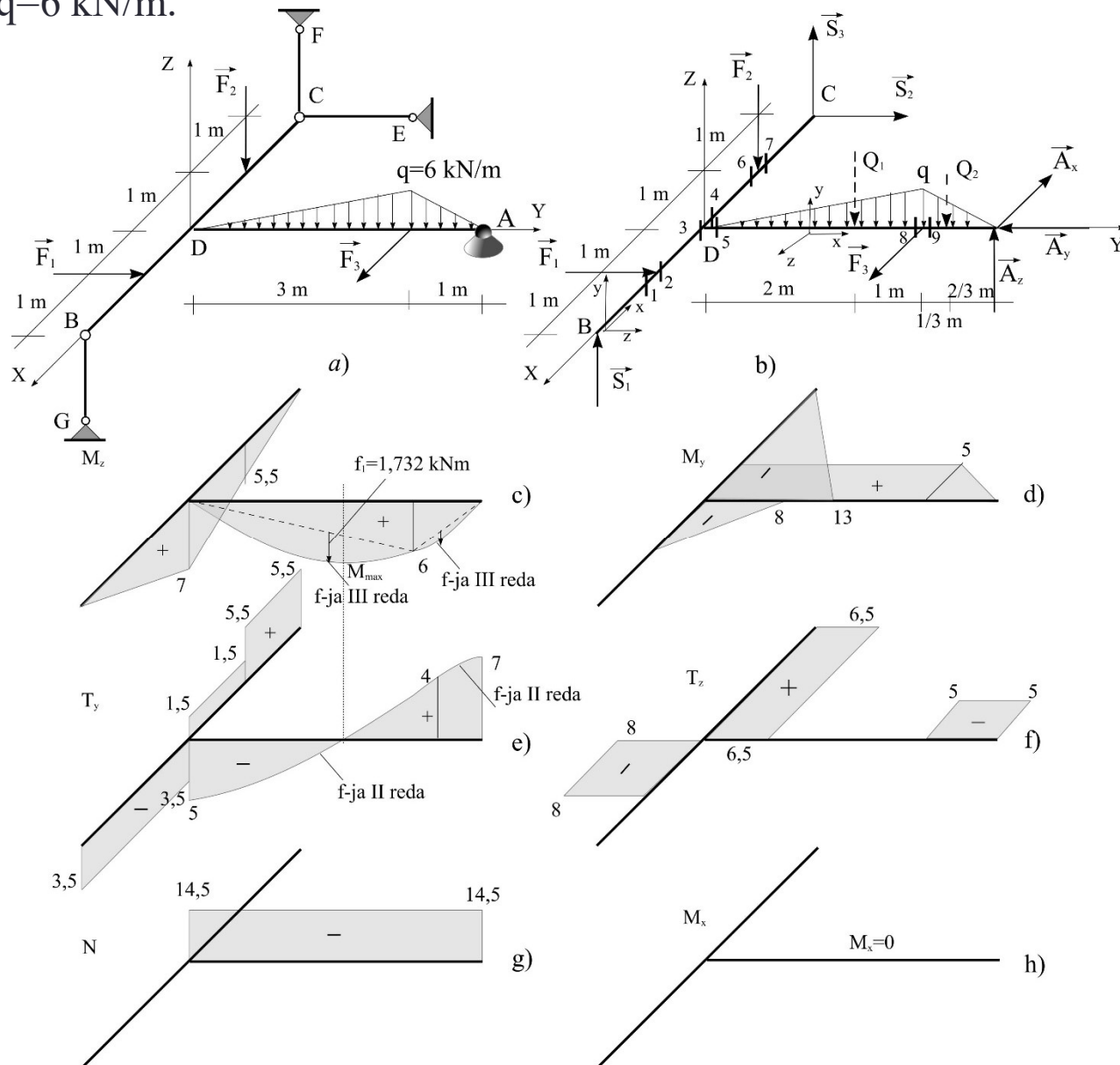
c)



d)

Primer:

Odrediti reakcije veza za dati prostorni linijski nosač koji je vezan sfernim osloncem u A i štapovima BG, CE i CF. Nacrtati dijagrame sila u preseccima ako je $F_1=8\text{ kN}$, $F_2=4\text{ kN}$, $F_3=5\text{ kN}$, $q=6\text{ kN/m}$.



$$\sum X = 0 \rightarrow -A_x + F_3 = 0,$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow S_2 + F_1 - A_y = 0,$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow A_z + S_1 + S_3 - F_2 - Q_1 - Q_2 = 0,$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow A_z \cdot 4 - Q_1 \cdot 2 - Q_2 \left(3 + \frac{1}{3}\right) = 0,$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow -S_1 \cdot 2 + S_3 \cdot 2 - F_2 \cdot 1 = 0,$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow A_x \cdot 4 - S_2 \cdot 2 - F_3 \cdot 3 = 0,$$

$$A_x = 5 \text{ kN}, \quad A_y = 14,5 \text{ kN}, \quad A_z = 7 \text{ kN}, \quad S_1 = 3,5 \text{ kN}, \quad S_2 = 6,5 \text{ kN}, \quad S_3 = 5,5 \text{ kN}$$

Momenti savijanja M_z :

$$M_B = 0, \quad M_1 = M_2 = S_1 \cdot 1 = 3,5 \text{ kNm}, \quad M_3 = S_1 \cdot 2 = 7 \text{ kNm},$$

$$M_4 = S_3 \cdot 2 - F_2 \cdot 1 = 7 \text{ kNm}, \quad M_5 = -Q_1 \cdot 2 - Q_2 \cdot 3,333 + A_z \cdot 4 = 0,$$

$$M_8 = M_9 = A_z \cdot 1 - Q_2 \cdot 0,333 = 6 \text{ kNm}, \quad M_A = 0,$$

$$M_6 = M_7 = S_3 \cdot 1 = 5,5 \text{ kNm}, \quad M_C = 0,$$

$$f_1 = \frac{q l_1^2 \sqrt{3}}{27} = 2\sqrt{3} \text{ kNm}, \quad f_2 = \frac{q l_2^2 \sqrt{3}}{27} = 0,38 \text{ kNm}.$$

Transverzalne sile T_y :

$$T_B = T_1 = T_2 = T_3 = -S_1 = -3,5 \text{ kN}, \quad T_4 = T_6 = S_3 - F_2 = 1,5 \text{ kN}, \quad T_7 = T_C = S_3 = 5,5 \text{ kN}, \\ T_A = A_z = 7 \text{ kN}, \quad T_8 = T_9 = A_z - Q_2 = 4 \text{ kN}, \quad T_5 = A_z - Q_2 - Q_1 = -5 \text{ kN}.$$

Momenti savijanja M_y :

$$M_B = 0, \quad M_1 = M_2 = 0, \quad M_3 = -F_1 \cdot 1 = -8 \text{ kNm}, \\ M_5 = A_x \cdot 4 - F_3 \cdot 3 = 5 \text{ kNm}, \quad M_8 = M_9 = A_x \cdot 1 = 5 \text{ kNm}, \quad M_A = 0, \\ M_4 = -S_2 \cdot 2 = -13 \text{ kNm}, \quad M_6 = M_7 = S_2 \cdot 1 = 6,5 \text{ kNm}, \quad M_C = 0.$$

Transverzalne sile T_z :

$$T_B = T_1 = F_1 + S_2 - A_y = 0, \quad T_2 = T_3 = S_2 - A_y = -8 \text{ kN}, \quad T_4 = T_6 = T_7 = T_C = S_2 = 6,5 \text{ kN}, \\ T_5 = T_8 = F_3 - A_x = 0, \quad T_9 = T_A = -A_x = -5 \text{ kN}.$$

Normalne sile N :

$$N_5 = N_8 = N_9 = N_A = -A_y = -14,5 \text{ kN}, \\ N_B = N_1 = N_2 = N_3 = A_x - F_3 = 0, \quad N_4 = N_6 = N_7 = N_C = 0.$$

Momenti torzije M_x :

$$M_B = M_1 = M_2 = M_3 = Q_1 \cdot 2 + Q_2 \cdot 3,333 - A_z \cdot 4 = 0, \\ M_5 = M_8 = M_9 = M_A = 0, \quad M_4 = M_6 = M_7 = M_C = 0.$$