

11.5 Ravnoteža tela pod dejstvom prostornog sistema sila

Prvi korak u rešavanju prostornih problema ravnoteže, kao i problema u ravni (poglavljja 7 i 10), je oslobađanje tela ili sistema sastavljenog od više tela veza primenom pete aksiome. Kada se uoči telo čiju ravnotežu treba proučiti nacrtava se *dijagram slobodnog tela* na koje je dejstvo veza zamenjeno reakcijama veza. Na telo treba naneti sve spoljašnje sile i spregove. Zatim treba formirati jednačine ravnoteže (11.22), iz kojih se određuju nepoznate komponente reakcija veza. Da bi nosači u prostoru bili statički određeni, broj reakcija veza ne sme da bude veći od šest, jer se za prostorni sistem sila može formirati najviše šest jednačina ravnoteže.

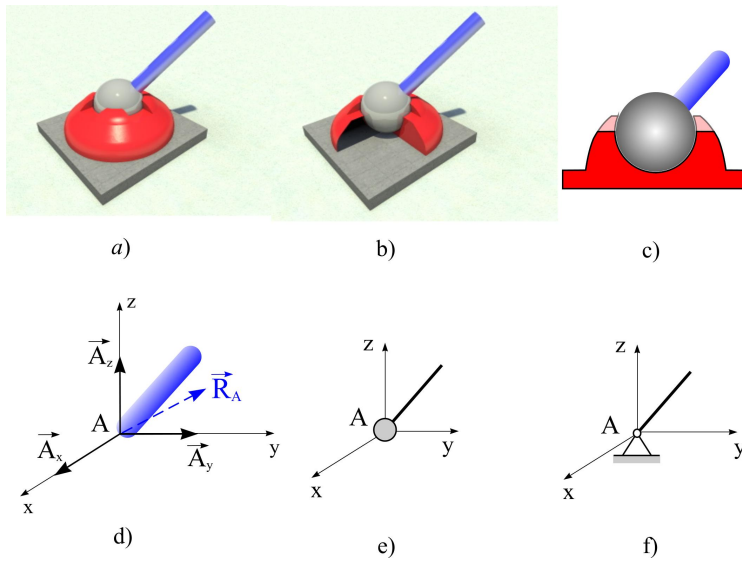
Dekartov koordinatni sistem treba postaviti u pogodnu tačku, a ose x , y i z treba usvojiti tako da budu paralelne što većem broju sila koje deluju na telo, da bi se dobile što jednostavnije jednačine ravnoteže. Sve nepoznate komponente reakcija veza se pretpostave u pozitivnom smeru osa, ukoliko je njihov smer unapred nepoznat. Ucertaju se dimenzije tela koje su neophodne za sračunavanje momenata i sila sistema u odnosu na ose.

U odnosu na probleme u ravni, gde je bilo lako odrediti momente sila u odnosu na tačku, u uslovima ravnoteže (11.22) potrebno je odrediti momente svih sila u odnosu na ose x , y i z . Ako je sa crteža teško da se vidi čemu je jednak moment neke sile u odnosu na osu, preporučuje se da se na pomoćnom crtežu nacrtava projekcija posmatranog tela na ravan koja je upravna na tu osu. U slučajevima kada pri izračunavanju momenata nije jednostavno odrediti projekcije sile na odgovarajuću ravan ili krakove tih projekcija u odnosu na odgovarajuće ose, preporučuje se da se sila razloži na međusobno upravne komponente, od kojih je jedna paralelna sa jednom od koordinatnih osa, a zatim primeni Varinjonova teorema o momentu rezultante u odnosu na osu. Momenti sila mogu da se izračunaju i analitičkim putem primenom izraza (11.21).

Pored veza u ravni, koje su obrađene u poglavlju 3.3.7 i prikazane u Tabeli 3.1, postoje veze koje se pojavljuju samo kod prostornih problema, o kojima će ovde biti reči. Veze prostornih nosača sa nepokretnim ravnima ostvaruju se sfernim ili cilindričnim ležištem, uklještenjem, užadima, lakim (prostim) štapovima itd. U Tabeli 11.1 su prikazani neki tipovi veza krutih tela opterećenih proizvoljnim prostornim sistemima sila. Za vezu ostvarenu oslanjanjem, užetom, kao i prostim štapom, važi sve isto kao i kod ravanskih problema, s tim što reakcija veze može da bude prostorna sila.

Veza ostvarena sfernim zglobom (ležištem)

Telo je krajem A obrađeno u obliku kugle koja može da se obrće na proizvoljan način unutar sferne površi drugog tela koje služi kao veza i koje je vezano za nepokretnu ravan, Slika 11.8 a). Ova veza se naziva *sferni zglob*. Centar kugle, tačka A, ne može da se pomeri ni u kom pravcu, a telo može da zauzme bilo koji položaj u prostoru, s obzirom da nije sprečeno njegovo obrtanje. Trenje u sfernom zglobu se zanemaruje. Reakcija veze $\vec{R}_A$ sfernog zgloba je proizvoljnog pravca u prostoru, njen pravac je nepoznat, pa se ona određuje tako što se pretpostave njene tri upravne komponente, $\vec{A}_x, \vec{A}_y, \vec{A}_z$, Slika 11.8 b).



Slika 11.8 a) b) c) Sferni zglob; d) reakcije veze; e) f) šematski prikaz veze.

Kada se odrede komponente, reakcija veze je određena dijagonalom paralelopipeda konstruisanog nad komponentama, tj:

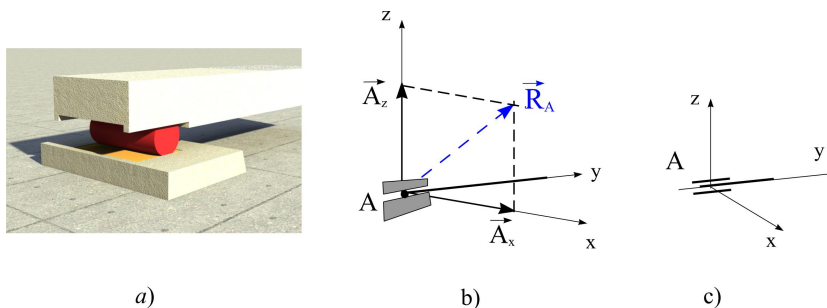
$$R_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \quad \cos \alpha = \frac{A_x}{R_A}, \quad \cos \beta = \frac{A_y}{R_A}, \quad \cos \gamma = \frac{A_z}{R_A}.$$

Sferni zglob je veza koja omogućava obrtanje oko bilo koje ose, a sprečava pomeranje u bilo kom pravcu u prostoru. Reakcije sfernog zgloba A_x , A_y i A_z su tri sile u pravcima koordinatnih osa.

Veza ostvarena cilindričnim zglobom (ležištem)

Kada na telo deluje prostorni sistem sila, veza ostvarena pokretnim osloncem, obrađena u poglavlju 3.3.7, je cilindrično ležište, Slika 11.9 a). Ova veza sprečava kretanje u ravni normalnoj na pravac mogućeg kretanja osovine. Reakcija veze $\vec{R}_A$ cilindričnog ležišta leži u toj ravni i nema komponentu u pravcu ose ležišta, tj. u pravcu ose y. Ukoliko je ležište u pravcu y ose, reakcija veze $\vec{R}_A$ ima komponente $\vec{A}_x$ i $\vec{A}_z$ u ravni xOz, Slika 11.9 b).

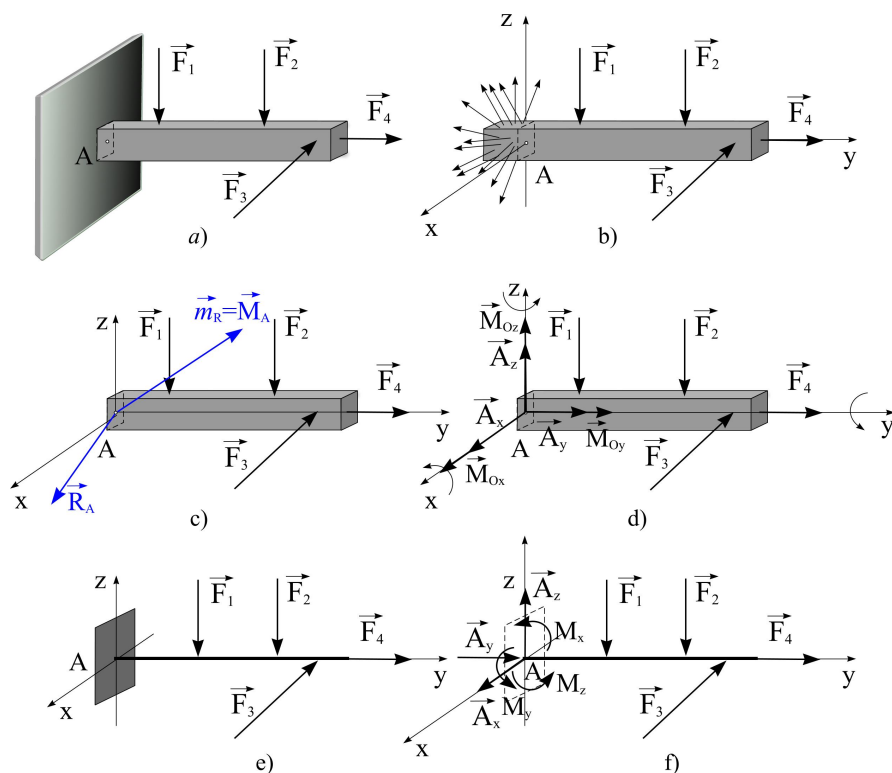
Cilindrično ležište je veza koja omogućava obrtanje oko bilo koje ose, dozvoljava pomeranje u pravcu u kojem se on nalazi, a sprečava pomeranja u ostala dva pravca, pa su reakcije veza u tim pravcima.



Slika 11.9 a) Cilindrično ležište; b) reakcije veze; c) šematski prikaz veze.

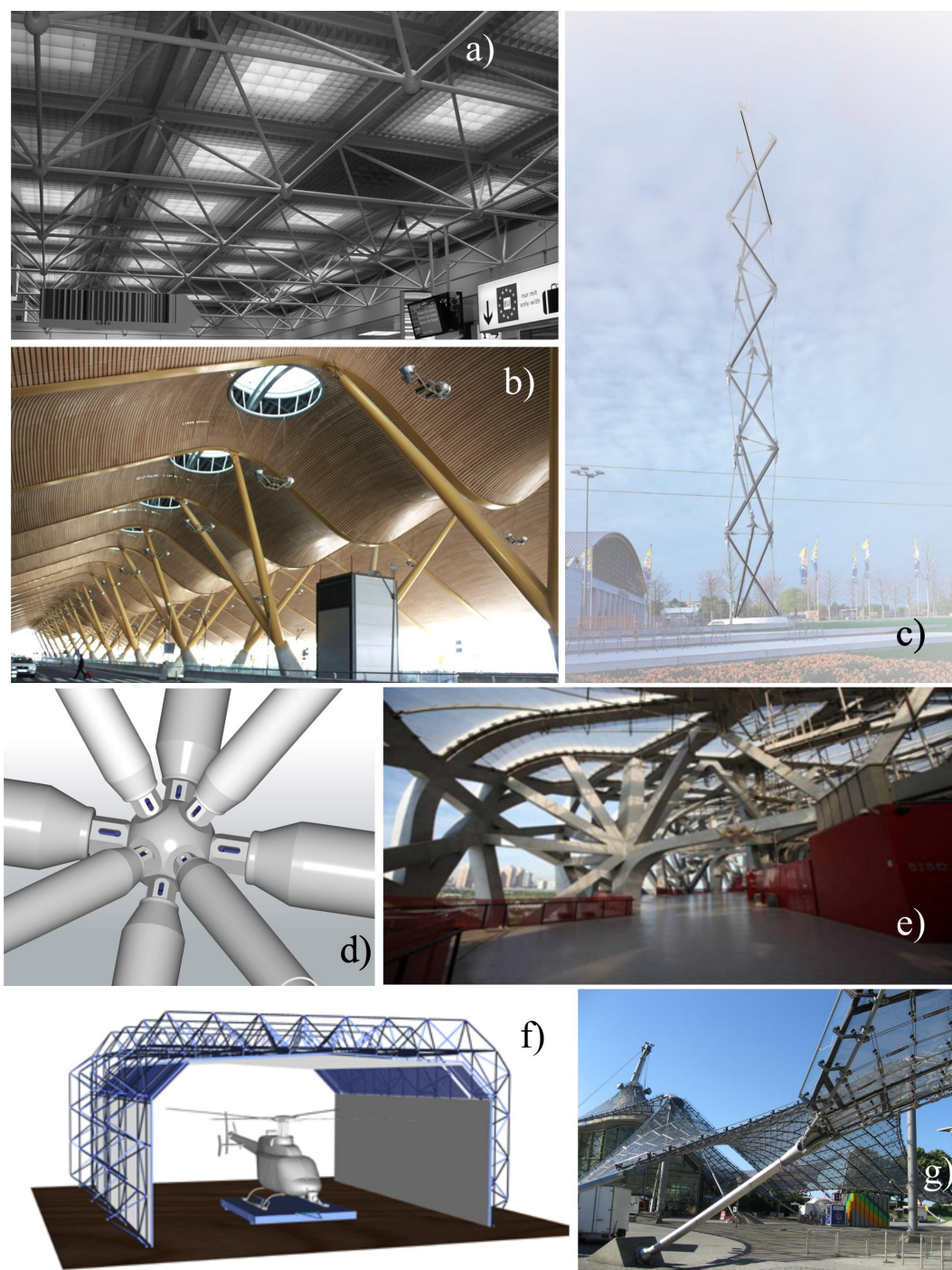
Veza ostvarena uklještenjem

Veza koja ne dopušta pomeranje ni u jednom pravcu, niti obrtanje oko bilo koje ose, je uklještenje. U poglavlju 6.5 obrađena je ova veza kada na telo deluje sistem sila u ravni. Za razliku od problema u ravni, u slučaju prostornog sistema sila, primenom pete aksiome, u svim elementima kontaktnih površi javljaju se sile veze koje predstavljaju proizvoljni prostorni sistem sila, Slika 11.10 b). Redukcijom ovih sila u težište A poprečnog preseka, dobijaju se redukciona rezultanta $\vec{R}_A$ i redukcioni spreg $\vec{m}_R = \vec{M}_A$. Redukciona rezultanta je prostorni vektor i ima tri komponente $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$, $\vec{A}_z$. Redukcioni spreg – glavni moment $\vec{M}_A$ je prostorni vektor čije su projekcije $\vec{M}_{Ox}$, $\vec{M}_{Oy}$, $\vec{M}_{Oz}$ na ose x, y i z, na osnovu veze između momenta sile u odnosu na osu i momenta sile u odnosu na tačku, jednake momentima u odnosu na ose M_x , M_y i M_z i zovu se momenti uklještenja. Za slučaj prostornog sistema sila ova veza ima 6 komponentata, Slika 11.10 c).



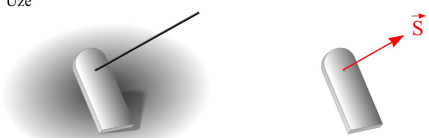
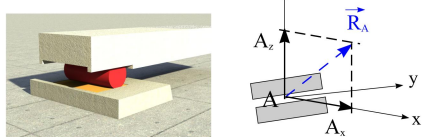
Slika 11.10 a) Veza ostvarena uklještenjem; b) oslobađanje veze; c) redukciona rezultanta i redukcioni spreg; d) komponente reakcije veze; e) šematski prikaz veze; f) reakcije veza A_x , A_y , A_z , M_x , M_y i M_z .

Uklještenje sprečava sva pomeranja i obrtanja. Reakcije veza su tri sile u pravcima koordinatnih osa A_x , A_y i A_z , kao i tri momenta uklještenja M_x , M_y i M_z .



Slika 11.11 a) Prostorna rešetka, aerodrom u Beču, Austrija [11]; b) prostorni prosti štapovi, aerodrom u Madridu [11]; c) žičano štapna prostorna konstrukcija, sistem Mero; d) čvor prostorne rešetke, sistem Mero; e) prostorna linijska konstrukcija, Ptičje gnezdo, Peking, Kina; f) prostorna rešetka, sistem Mero [14]; g) prostorni štap vezan sfernim osloncem, olimpijski kompleks u Minhenu, Nemačka, 1974 [11].

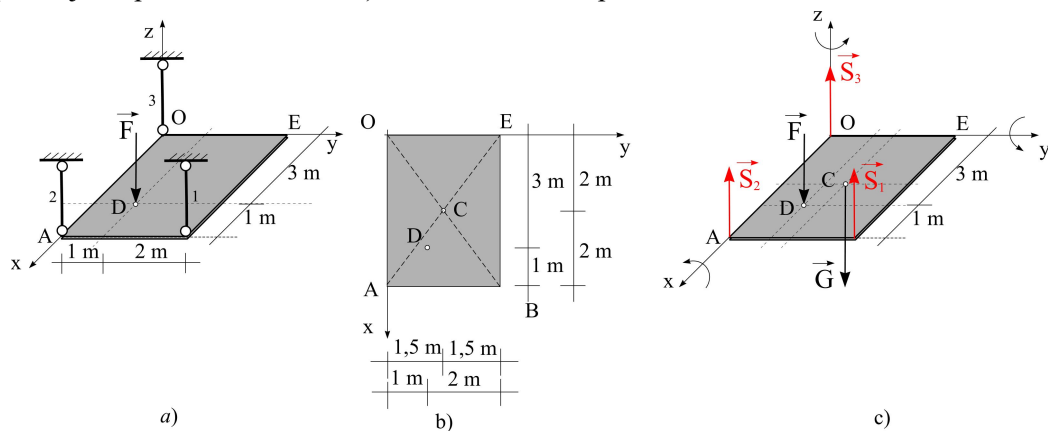
Tabela 11.1 Tipovi veza u prostoru [5]

Tip veze	Reakcija	Broj nepoznatih
Uže		Jedna nepoznata - veličina reakcije. Reakcija je u pravcu užeta usmerena od vezanog tela. Uže je zategnuto.
Idealno glatka površina		Jedna nepoznata - veličina reakcije. Reakcija je upravna na površinu u tački dodira.
Cilindrični oslonac		Dve nepoznate. Reakcije su dve komponente upravne na pravac cilindričnog oslonca.
Sferni oslonac		Tri nepoznate. Reakcije su tri komponente u pravcima x, y i z.
Uklještenje		Šest nepoznatih. Reakcije su tri sile u pravcima x, y i z i tri momenta uklještenja M_x , M_y i M_z .

Primeri ravnoteže tela pod dejstvom prostornog sistema sila

Primer 11.3

Pravougaonu ploču težine $G=10$ kN, opterećenu silom $F=15$ kN, drže u horizontalnom položaju štapovi, Slika P 11.3 a). Odrediti sile u štapovima 1, 2 i 3.



Slika P 11.3 a) Vezana ploča; b) ploča u horizontalnoj ravni; c) telo oslobođeno veza.

Pravougaona ploča na Slici P 11.3 a) vezana je vertikalnim prostim štapovima i opterećena silom $\vec{F}$, koja je takođe u pravcu ose z i deluje u tački D ploče. Težina ploče $\vec{G}$ deluje u težištu ploče, tački C, koja se nalazi u preseku dijagonala pravougaonika, Slika P 11.3 b).

Koordinate napadnih tačaka sile $\vec{F}$ i težine $\vec{G}$ su C (2 m, 1,5 m, 0) i D (3 m, 1 m, 0).

Ploča oslobođena veza prikazana je na Slici P 11.3 c). Pretpostavljeno je da su štapovi zategnuti. Na ploču oslobođenu veza deluje sistem od pet paralelnih sila, tako da treba primeniti uslove ravnoteže koji su dati izrazom (11.26):

$$\sum Z = 0 \rightarrow S_1 + S_2 + S_3 - F - G = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0 \rightarrow S_1 \cdot 3 - F \cdot 1 - G \cdot 1,5 = 0,$$

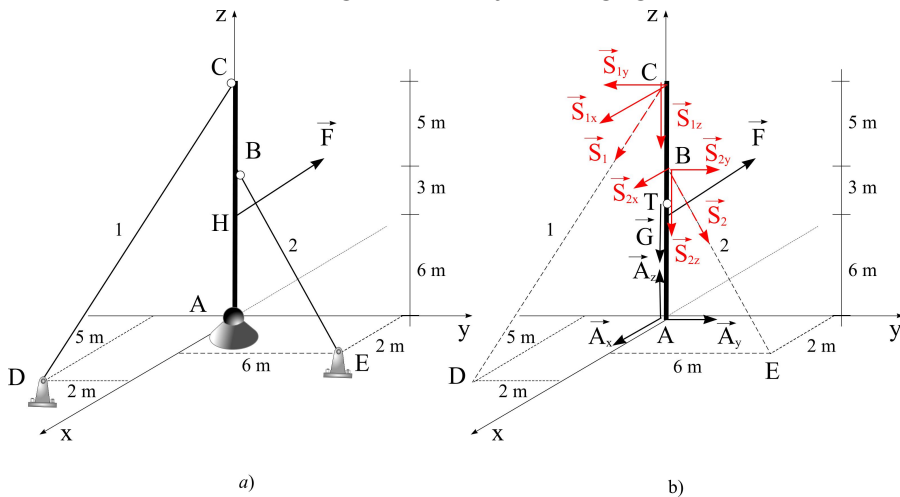
$$\sum M_y(\vec{F}_i) = 0 \rightarrow -S_1 \cdot 4 - S_2 \cdot 4 + F \cdot 3 + G \cdot 2 = 0.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobija se:

$$S_1 = 10 \text{ kN}, S_2 = 6,25 \text{ kN}, S_3 = 8,75 \text{ kN}.$$

Primer 11.4

Stub AC, težine 5 kN, vezan je sfernim zglobovom u tački A za podlogu. U tački B na stub deluje sila $F=10$ kN, koja je paralelna sa x osom. Stub u ravnotežnom položaju održavaju zatege CD i BE. Odrediti sile u zategama i reakcije sfernog zgloba A.



Slika P 11.4 a) Stub vezan sfernim osloncem i zategama; b) telo oslobođeno veza.

Kada se primeni peta aksioma i stub oslobodi veza, na stub osim težine $\vec{G}$ i sile $\vec{F}$ deluje i pet nepoznatih reakcija veza $\vec{A}_x, \vec{A}_y, \vec{A}_z, \vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$, Slika P 11.4 b). Sve sile paralelne su odgovarajućim koordinatnim osama, osim sila $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ u zategama $\overline{CD}$ i $\overline{BE}$. Da bi mogle da se odrede projekcije ovih sila na koordinatne ose, treba odrediti uglove koje one zaklapaju sa koordinatnim osama. Iz analitičke geometrije je poznato da se uglovi između neke prave u prostoru i koordinatnih osa mogu odrediti ako se znaju koordinate dve tačke na toj pravoj. Ovde su to tačke C (0, 0, 14 m) i D (5 m, -2 m, 0), odnosno B (0, 0, 9 m) i E (2 m, 6 m, 0). Kosinusi pravca sile $\vec{S}_1$ su:

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_D - x_C}{\overline{CD}} = \frac{x_D - x_C}{\sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 + (z_D - z_C)^2}} = \frac{5 - 0}{\sqrt{(5 - 0)^2 + (-2 - 0)^2 + (0 - 14)^2}}$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = 0,3333, \quad \cos \beta_1 = \frac{y_D - y_C}{CD} = \frac{-2-0}{15} = -\frac{2}{15} = -0,13333,$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{z_D - z_C}{CD} = \frac{0-14}{15} = -\frac{14}{15} = -0,93333,$$

pa su projekcije sile $\vec{S}_1$:

$$S_{1x} = S_1 \cos \alpha_1 = 0,3333 S_1, \quad S_{1y} = S_1 \cos \beta_1 = -0,13333 S_1, \quad S_{1z} = S_1 \cos \gamma_1 = -0,93333 S_1.$$

Kosinusi pravca sile $\vec{S}_2$ su:

$$\cos \alpha_2 = \frac{x_E - x_B}{BE} = \frac{x_E - x_B}{\sqrt{(x_E - x_B)^2 + (y_E - y_B)^2 + (z_E - z_B)^2}} = \frac{2-0}{\sqrt{(2-0)^2 + (6-0)^2 + (0-9)^2}}$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{2}{11} = 0,18182, \quad \cos \beta_2 = \frac{y_E - y_B}{BE} = \frac{6-0}{11} = \frac{6}{11} = 0,54545,$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{z_E - z_B}{BE} = \frac{0-9}{11} = -\frac{9}{11} = -0,81812.$$

Projekcije sile $\vec{S}_2$ su:

$$S_{2x} = S_2 \cos \alpha_2 = 0,18182 S_2, \quad S_{2y} = S_2 \cos \beta_2 = 0,54545 S_2, \quad S_{2z} = S_2 \cos \gamma_2 = -0,81812 S_2.$$

Koordinate napadnih tačaka sile $\vec{F}$ i težine $\vec{G}$ su H (0, 0, 6 m) i D (0, 0, 7 m).

Sada treba formirati jednačine ravnoteže u odnosu na usvojeni koordinatni sistem, Slika P 11.4, primenom izraza (11.22). Kako su sve sile prikazane komponentama paralelnim sa koordinatnim osama, Slika P 11.4 b), mogu se lako sračunati njihovi momenti u odnosu na ose. Komponente $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$, $\vec{A}_z$ i sile $\vec{G}$ nemaju moment u odnosu na osu x, jer je seku, kao i sile $\vec{F}$, jer je paralelna sa osom x, pa prema tome ostaje da se izračuna moment sile $\vec{S}_1$ i moment sile $\vec{S}_2$ u odnosu na osu x. U odnosu na osu y nemaju moment sile $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$, $\vec{A}_z$ i sile $\vec{G}$, jer seku tu osu, pa treba sračunati momente sile $\vec{F}$, $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$. U odnosu na osu z nijedna sila nema moment, jer sve sile ovog sistema sila seku osu z, pa je poslednja jednačina ravnoteže iz izraza (11.22) identički zadovoljena. Ovakvu analizu treba sprovesti prilikom formiranja jednačina ravnoteže i tada nije teško da se napišu jednačine ravnoteže koje u ovom zadatku imaju sledeći oblik:

$$\sum X = 0 \rightarrow A_x + 0,33333 S_1 + 0,18182 S_2 - F = 0,$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow A_y - 0,13333 S_1 + 0,54545 S_2 = 0,$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow A_z - 0,93333 S_1 - 0,81812 S_2 - G = 0,$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow 0,13333 S_1 \cdot 14 - 0,54545 S_2 \cdot 9 = 0,$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow 0,33333 S_1 \cdot 14 + 0,81812 S_2 \cdot 9 = 0.$$

Iz ovih jednačina dobija se:

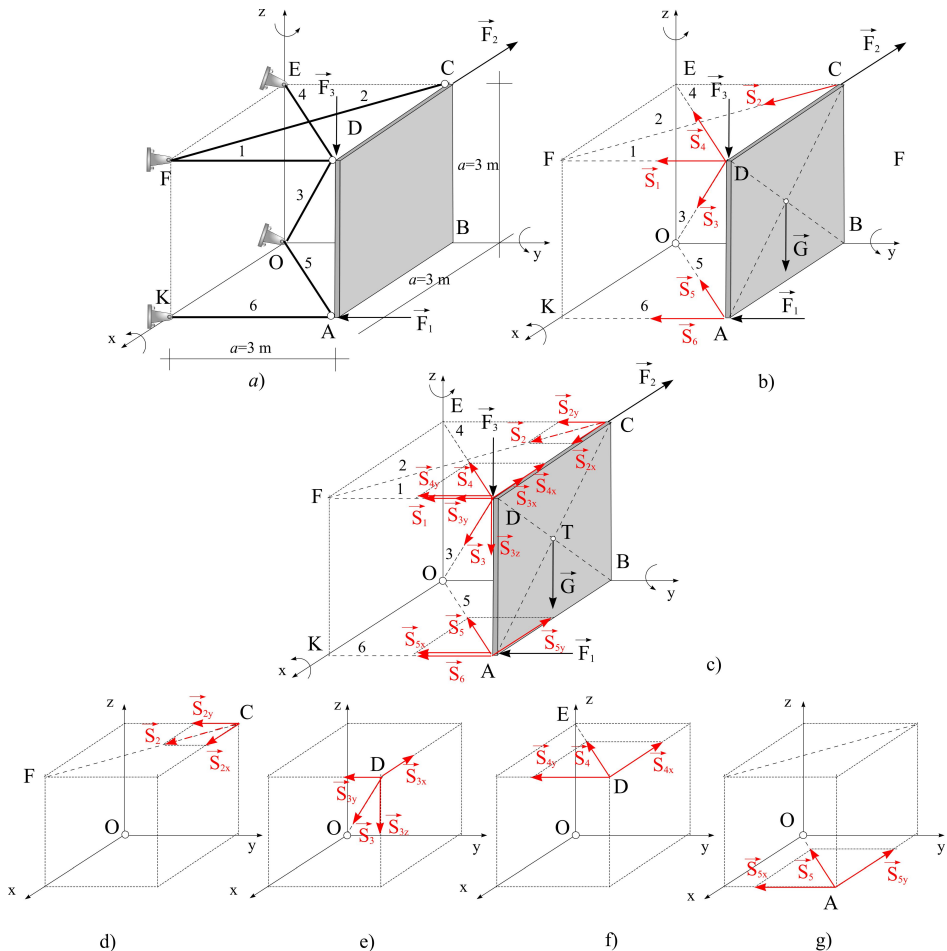
$$A_x = 5,44 \text{ kN}, \quad A_y = -0,84 \text{ kN}, \quad A_z = 19,11 \text{ kN}, \quad S_1 = 11,34 \text{ kN}, \quad S_2 = 4,31 \text{ kN}..$$

Znak minus, dobijen za intenzitet reakcije $\vec{A}_y$, znači da je smer te reakcije suprotan pretpostavljenom.

Projekcije sila mogu da se odrede i na drugi način, primenom postupka opisanog u 2.13 i izraza (2.19) i (2.20), tj. formiranjem vektora položaja sila i jediničnih vektora pravaca, na osnovu čega bi se odredili vektori sila $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ u zategama $\overline{CD}$ i $\overline{BE}$ primenom izraza (2.21).

Primer 11.5

Tanka kruta kvadratna ploča, prikazana na Slici P 11.5, težine $G=20$ kN, održava se u vertikalnom položaju pomoću šest prostih štapova. U smeru negativne ose y na ploču deluje sila $\vec{F}_1$ u tački A intenziteta 5 kN, u smeru negativne x ose u tački C deluje sila $\vec{F}_2$ intenziteta 10 kN, a u tački D i u smeru negativne z ose deluje sila $\vec{F}_3$ intenziteta 10 kN. Odrediti veličine i karakter sila u štapovima.



Slika P 11.5 a) Ploča vezana lakim štapovima; b) ploča oslobođena veza; c) sile u štapovima prikazane komponentama paralelnim koordinatnim osama; d) sila $\vec{S}_2$ i njene komponente; e) sila $\vec{S}_3$ i njene komponente; f) sila $\vec{S}_4$ i njene komponente; g) sila $\vec{S}_5$ i njene komponente.

Ploča se oslobađa prostih štapova i njihovo dejstvo se zameni silama $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$, $\vec{S}_4$, $\vec{S}_5$ i $\vec{S}_6$ koje su u pravcu štapova, pri čemu je pretpostavljeno da su svi štapovi zategnuti, Slika P 11.5 b). Tako na ploču, osim sila u štapovima, deluju sile $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ u tačkama A, C i D, kao i težina $\vec{G}$ u težištu ploče T (1,5 m, 3 m, 1,5 m), Slika P 11.5 b).

Sve spoljašnje sile su paralelne koordinatnim osama, dok su sile $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_6$ paralelne osi y. Sile $\vec{S}_2$, $\vec{S}_4$ i $\vec{S}_5$ leže u horizontalnim ravnima, u pravcu dijagonala kvadrata stranice $a=3$ m, dok je sila $\vec{S}_3$ u pravcu telesne dijagonale kocke ivice $a=3$ m, Slika P 11.5 c). Da bi mogle da se odrede projekcije ovih sila na koordinatne ose, treba odrediti uglove koje one zaklapaju sa koordinatnim osama.

Kosinusi pravca sile $\vec{S}_2$, Slika P 11.5 d), su:

$$\cos \alpha_2 = \frac{x_F - x_C}{CF} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \beta_2 = \frac{y_F - y_C}{CF} = \frac{0-a}{a\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{z_F - z_C}{CF} = \frac{a-a}{a\sqrt{2}} = 0,$$

pa su projekcije sile $\vec{S}_2$:

$$S_{2x} = S_2 \cos \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} S_1, \quad S_{2y} = S_2 \cos \beta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} S_2, \quad S_{2z} = S_2 \cos \gamma_2 = 0.$$

Kosinusi pravaca sila $\vec{S}_4$ i $\vec{S}_5$ su isti, Slika P 11.5 f), g), i iznose:

$$\cos \alpha_4 = \frac{x_E - x_D}{DE} = \frac{0-a}{a\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \alpha_5, \quad \cos \beta_4 = \frac{y_E - y_D}{DE} = \frac{0-a}{a\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \beta_5,$$

$$\cos \gamma_4 = \frac{z_E - z_D}{DE} = \frac{a-a}{a\sqrt{2}} = 0 = \cos \gamma_5.$$

Projekcije sila $\vec{S}_4$ i $\vec{S}_5$ su:

$$S_{4x} = S_4 \cos \alpha_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} S_4, \quad S_{4y} = S_4 \cos \beta_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} S_4, \quad S_{4z} = S_4 \cos \gamma_4 = 0,$$

$$S_{5x} = S_5 \cos \alpha_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} S_5, \quad S_{5y} = S_5 \cos \beta_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} S_5, \quad S_{5z} = S_5 \cos \gamma_5 = 0.$$

Kosinusi pravca sile $\vec{S}_3$, Slika P 11.5 e), su:

$$\cos \alpha_3 = \frac{x_O - x_D}{DO} = \frac{0-a}{a\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cos \beta_3 = \frac{y_O - y_D}{DO} = \frac{0-a}{a\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cos \gamma_3 = \frac{z_O - z_D}{DO} = \frac{0-a}{a\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

a projekcije sile $\vec{S}_3$ su:

$$S_{3x} = S_3 \cos \alpha_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3} S_3, \quad S_{3y} = S_3 \cos \beta_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3} S_3, \quad S_{3z} = S_3 \cos \gamma_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3} S_3.$$

Uslovne jednačine ravnoteže glase:

$$\sum X = 0 \rightarrow S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} - F_2 = 0,$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow -S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} - F_1 = 0,$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow -S_3 \frac{\sqrt{3}}{3} - F_3 - G = 0,$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow S_1 \cdot 3 + S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 + S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 - F_3 \cdot 3 - G \cdot 3 = 0,$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 - S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 + G \cdot 1,5 - F_2 \cdot 3 + F_3 \cdot 3 = 0,$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow -S_1 \cdot 3 + S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 - S_6 \cdot 3 + F_2 \cdot 3 = 0.$$

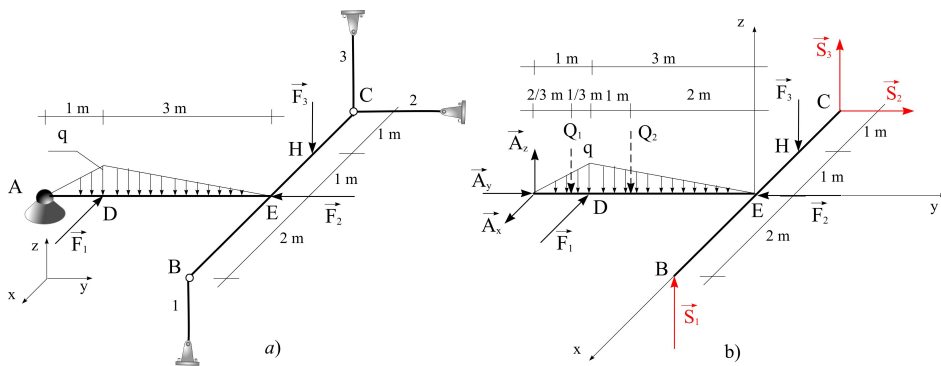
Sile u štapovima su:

$$S_1 = 20 \text{ kN}, S_2 = 0, S_3 = -30\sqrt{3} \text{ kN}, S_4 = 10\sqrt{2} \text{ kN}, S_5 = 10\sqrt{2} \text{ kN}, S_6 = -15 \text{ kN}.$$

Znak minus, dobijen za intenzitet sile $\vec{S}_6$, znači da je štap 6 pritisnut, dok su svi ostali zategnuti.

Primer 11.6

Prostorni linijski nosač vezan je sfernim osloncem u A i lakim štapovima 1, 2 i 3, Slika P 11.6. Intenziti sila su $F_1=2 \text{ kN}$, $F_2=3 \text{ kN}$ i $F_3=4 \text{ kN}$ i one su paralelne koordinatnim osama, dok je intenzitet kontinualnog opterećenja $q=6 \text{ kN/m}$.



Slika P 11.6 a) Prostorni linijski nosač opterećen prostornim sistemom sila; b) telo oslobođeno veza.

Kada se prostorni linijski nosač oslobodi veza, sfernog oslonca u A i prostih štapova, na njega, osim sila $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ i kontinualnog opterećenja, deluje i šest nepoznatih reakcija veza $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$, $\vec{A}_z$, $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ i $\vec{S}_3$, Slika P 11.6 b). Sve sile paralelne su odgovarajućim koordinatnim osama. Ako se koordinatne ose postave kao na Slici P 11.6, onda sile $\vec{A}_y$, $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ nemaju moment u odnosu na osu x, jer je seku. Sile $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$, $\vec{A}_z$, $\vec{F}_1$ i rezultante trougaonih kontinualnih opterećenja, čiji su intenziteti $Q_1 = \frac{q l_1}{2} = \frac{6 \cdot 1}{2} = 3 \text{ kN}$ i $Q_2 = \frac{q l_2}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9 \text{ kN}$, nemaju moment u odnosu na osu y, jer je seku, kao i sila $\vec{F}_2$, jer se sa njom poklapa, dok u odnosu na osu z nemaju moment sile $\vec{A}_y$ i $\vec{F}_2$, koje je seku, kao i sile $\vec{A}_z$, $\vec{F}_3$, $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$, $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_3$, koje su sa osom z paralelne. Zahvaljujući tome formiranje jednačina ravnoteže je jednostavno i one glase:

$$\sum X = 0 \rightarrow A_x - F_1 = 0, \quad \sum M_x = 0 \rightarrow -A_z \cdot 4 + Q_1 \left(3 + \frac{1}{3} \right) + Q_2 \cdot 2 = 0,$$

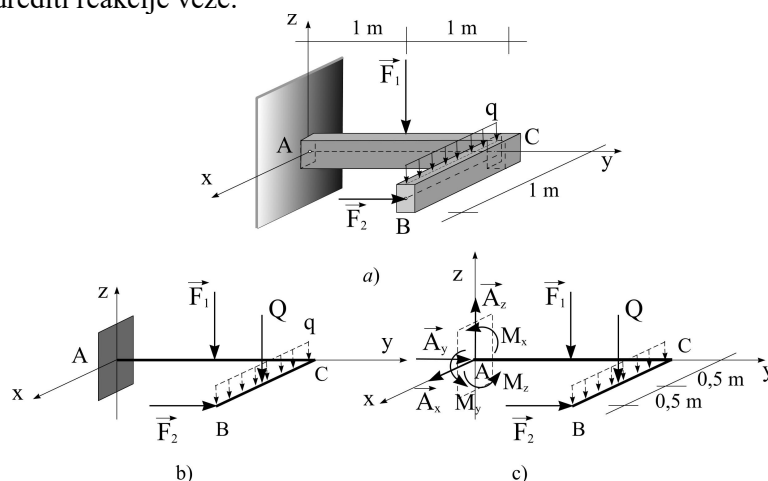
$$\sum Y = 0 \rightarrow A_y + S_2 - F_2 = 0, \quad \sum M_y = 0 \rightarrow -S_1 \cdot 2 + S_3 \cdot 2 - F_3 \cdot 1 = 0,$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow A_z - Q_1 - Q_2 - F_3 + S_1 + S_3 = 0, \quad \sum M_z = 0 \rightarrow A_x \cdot 4 - F_1 \cdot 3 - S_2 \cdot 2 = 0.$$

Reakcije veza su: $A_x = 2 \text{ kN}$, $A_y = 2 \text{ kN}$, $A_z = 7 \text{ kN}$, $S_1 = 3,5 \text{ kN}$, $S_2 = 1 \text{ kN}$, $S_3 = 5,5 \text{ kN}$.

Primer 11.7

Konzola je opterećena silom $\vec{F}_1$, koja deluje u ravni yAz i paralelna je osi z , silom $\vec{F}_2$, koja deluje u ravni xAy i paralelna je sa y osom, i kontinualnim opterećenjem $q=4 \text{ kN/m}$, koje deluje u ravni xOz i paralelna je sa osom z , Slika P 11.7 a). Intenziteti sila su $F_1=6 \text{ kN}$ i $F_2=2 \text{ kN}$. Odrediti reakcije veze.



Slika P 11.7 a) Greda uklještena u A; b) šematski prikaz grede i uklještenja; c) greda sa reakcijama veza i opterećenjem.

Greda ACB leži u horizontalnoj ravni i opterećena je prostornim sistemom sila. U tački A je postavljen koordinatni sistem tako da je deo grede AC na y osi, dok je drugi deo grede paralelan osi x , tako da sila $\vec{F}_1$ seče osu y i paralelna je osi z , sila $\vec{F}_2$ seče osu x i paralelna je osi y , dok je kontinualno opterećenje konstantnog intenziteta na delu grede BC, dužine 1 m , paralelna osi z . Rezultanta $\vec{Q}$ kontinualnog opterećenja je intenziteta: $Q = q \cdot l = 4 \cdot 1 = 4 \text{ kN}$. Reakcije veza su tri sile i tri momenta, koji su pretpostavljeni kao na Slici P 11.7 c). Komponente momenta redukcionog sprega M_x , M_y i M_z se pojavljuju samo u momentnim jednačinama. Jednačine ravnoteže su jednostavne jer su sve sile i reakcije veza paralelne osama ili ih seku i glase:

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\rightarrow A_x = 0, & \sum M_x = 0 &\rightarrow M_x - F_1 \cdot 1 + Q \cdot 2 = 0, \\ \sum Y = 0 &\rightarrow A_y + F_2 = 0, & \sum M_y = 0 &\rightarrow M_y + Q \cdot 0,5 = 0, \\ \sum Z = 0 &\rightarrow A_z - F_1 - Q = 0, & \sum M_z = 0 &\rightarrow M_z + F_2 \cdot 1 = 0, \end{aligned}$$

a njihovim rešavanjem dobija se:

$$A_x = 0, \quad A_y = -2 \text{ kN}, \quad A_z = 10 \text{ kN}, \quad M_x = 14 \text{ kNm}, \quad M_y = -2 \text{ kNm}, \quad M_z = -2 \text{ kNm}.$$

Najvažnije u ovom poglavlju

- Kako se prostorni sistem sila premešta u tačku i svodi na prostiji oblik
- Koji su uslovi ravnoteže proizvoljnog sistema sila u prostoru
- Veze u prostoru – sferni oslonac, cilindrično ležište, uklještenje
- Kako se rešavaju problemi ravnoteže tela pod dejstvom prostornog sistema sila