Poglavlje 11

PROIZVOLJNI SISTEMI SILA U PROSTORU

Ciljevi poglavlja

- Da se pokaže kako se proizvoljni sistem sila u prostoru redukuje u neku tačku
- Svođenje proizvoljnog sistema sila u prostoru na prostiji oblik
- Izvođenje uslova ravnoteže tela pod dejstvom prostornog sistema sila
- Veze u prostoru i oslobađanje veza krutog tela u prostoru
- Rešavanje problema ravnoteže krutog tela primenom uslova ravnoteže

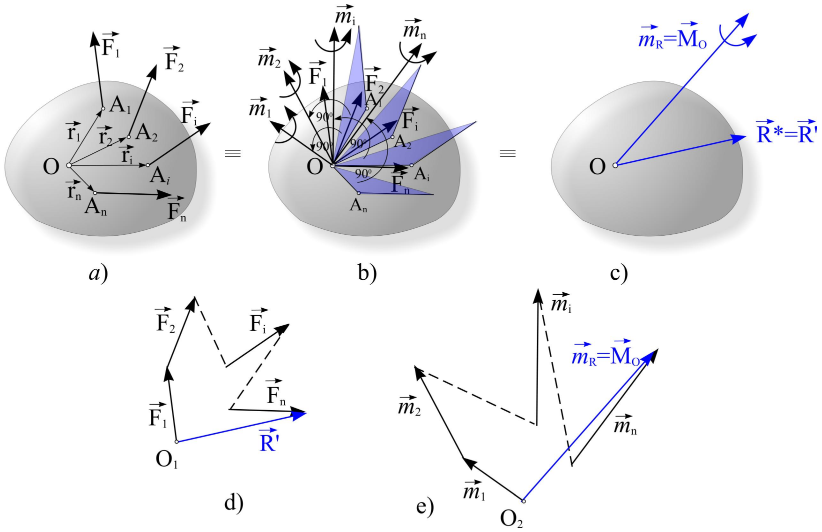
Prostorni štapovi, enterijer objekta u Varšavi, Poljska [11]

Krovna konstrukcija trgovačkog centra na slici poduprta je prostim štapovima koji predstavljaju vezu sa stubom. Opterećenje od krova se preko štapova prenosi na stub, a zatim na temelj.

U ovom poglavlju se obrađuje postupak svođenja proizvoljnog sistema sila u prostoru na ekvivalentan sistem sila koji deluje u izabranoj tački tela. Time se prostorni sistem sila svodi na prostiji oblik, na osnovu čega se formiraju uslovi koji treba da budu zadovoljeni da bi telo pod dejstvom takvog sistema sila bilo u ravnoteži. Obrađuju se veze u prostoru i primeri ravnoteže vezanih tela na koja deluju prostorni sistemi sila.

11.1 Redukcija prostornog sistema sila u tačku

Teorema o redukciji jedne sile u tačku obrađena je u poglavlju 6.1. Ako na telo deluje prostorni sistem sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ u tačkama $A_1, A_2, ..., A_n$, Slika 11.1 *a*), onda se svaka od sila može redukovati u tačku O primenom teoreme o redukciji jedne sile u tačku.



Slika 11.1 *a*) Sistem sila u prostoru; b) prostorni sistem sučeonih sila i spregova; c) redukciona rezultanta i rezultujući redukcioni spreg; d) poligon sila i glavni vektor; e) poligon vektora momenata spregova i glavni moment.

Tako, kao što se na Slici 11.1 b) vidi, sistemu sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ ekvivalentan je sistem sučeonih sila paralelno prenesenih u redukcionu tačku O i sistem redukcionih spregova $\vec{m}_1, \vec{m}_2, ..., \vec{m}_n$, pri čemu su spregovi nacrtani kao vektori u tački O, jer je redukcija vršena u tu tačku, mada su momenti spregova slobodni vektori (poglavlje 5.3.2). Momenti spregova su jednaki momentima sila u odnosu na redukcionu tačku, izraz (6.3):

$$\vec{m}_1 = \vec{M}_O\left(\vec{F}_1\right) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1,\ \vec{m}_2 = \vec{M}_O\left(\vec{F}_2\right) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2, ..., \vec{m}_i = \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i, ..., \vec{m}_n = \vec{M}_O\left(\vec{F}_n\right) = \vec{r}_n \times \vec{F}_n . \quad (11.1)$$

Kao i kod redukcije sistema sila u ravni, poglavlje 6.2, sile koje deluju u tački O mogu se zameniti jednom silom, *redukcionom rezultantom*:

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i . \quad (11.2)$$

Kako je na osnovu izraza (4.12), poglavlje 4.1.3, *glavni vektor* jednak geometrijskom (vektorskom) zbiru sila sistema, što je geometrijski pokazano poligonom sila, Slika 11.1 d):

$$\vec{R}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i , \quad (11.3)$$

to je redukciona rezultanta jednaka glavnom vektoru sa napadnom tačkom u redukcionoj tački O, zbog čega se i zove redukciona rezultanta, Slika 11.1 c):

$$\vec{R}^* = \vec{R}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i . \quad (11.4)$$

Sistem spregova se može složiti primenom postupka, prikazanog u poglavlju 5.3.5, čime se dobija *rezultujući redukcioni spreg*, čiji je moment $\vec{m}_R$ na osnovu izraza (5.66) i (11.1):

$$\vec{m}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \,, \tag{11.5}$$

Moment rezultujućeg redukcionog sprega jednak je vektorskom (geometrijskom) zbiru momenata redukcionih spregova, kao što je prikazano konstrukcijom poligona vektora spregova, Slika 11.1 e).

Vektorski zbir momenata svih sila sistema u odnosu na proizvoljnu tačku O naziva se *glavni moment sistema sila u odnosu na tačku* O:

$$\overrightarrow{M_O} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}_i\right), \tag{11.6}$$

pa iz izraza (11.5) i (11.6) sledi da je moment rezultujućeg redukcionog sprega jednak glavnom momentu:

$$\vec{m}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}_i\right) = \overrightarrow{M_O}\,. \tag{11.7}$$

Teorema o redukciji prostornog sistema sila u ravni u tačku glasi**:** *svaki prostorni sistem sila, koji deluje na kruto telo, može se zameniti jednom silom* $\vec{R}^*$ *(redukciona rezultanta), koja je jednaka vektorskom zbiru svih sila sistema – glavnom vektoru* $\vec{R}'$*, sa napadnom tačkom* O *i jednim spregom sila (rezultujući redukcioni spreg), čiji je moment* $\vec{m}_R$ *jednak vektorskom zbiru momenata komponentnih spregova, tj. glavnom momentu* $\overrightarrow{M_O}$ *sistema sila u odnosu na tačku* O.

Sila $\vec{R}^*$ i spreg $\vec{m}_R$ zajedno čine *torzer*. Njihovo slaganje ne može se izvršiti neposredno vektorskim sabiranjem.

Dejstvo nekog prostornog sistema sila na telo u potpunosti je određeno ako se zna redukciona rezultanta $\vec{R}^*$, tj. glavni vektor $\vec{R}'$ i moment rezultujućeg redukcionog sprega $\vec{m}_R$, tj. glavni moment $\overrightarrow{M_O}$ sistema sila u odnosu na tačku O, Slika 11.1 c). Dva prostorna sistema sila su ekvivalentna ako su im jednaki glavni vektori i glavni momenti.

Redukciona rezultanta $\vec{R}^*$ ne predstavlja rezultantu posmatranog sistema sila, jer ne zamenjuje sama njihovo dejstvo, već zajedno sa redukcionim spregom $\vec{m}_R$.

U slučaju proizvoljnog prostornog sistema sila određivanje glavnog vektora $\vec{R}'$ i glavnog momenta $\overrightarrow{M_O}$ se ne vrši konstrukcijom poligona sila, Slika 11.1 d), e), s obzirom da je teško konstruisati prostorni poligon, već analitičkim putem (poglavlje 4.2.4). U odnosu na usvojen Dekartov koordinatni sistem projekcije glavnog vektora na koordinatne ose su:

$$\begin{aligned} X_R' &= \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i, \\ Y_R' &= \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\beta_i, \\ Z_R' &= \sum_{i=1}^{n} Z_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\gamma_i, \end{aligned} \tag{11.8}$$

pa je intenzitet glavnog vektora određen formulom :

$$R' = R^* = \sqrt{\left(X_R'\right)^2 + \left(Y_R'\right)^2 + \left(Z_R'\right)^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^2}\,, \tag{11.9}$$

a njegov pravac sa:

$$\cos\alpha_R = \frac{X_R'}{R'}, \quad \cos\beta_R = \frac{Y_R'}{R'}, \quad \cos\gamma_R = \frac{Z_R'}{R'}. \qquad (11.10)$$

Intenzitet, pravac i smer glavnog vektora $\vec{R}'$ ne zavise od izbora redukcione tačke, jer poligon sila, Slika 11.1 d), ostaje nepromenjen bez obzira u koju se tačku tela sile sistema redukuju.

Glavni vektor $\overrightarrow{M_O}$ zavisi od izbora redukcione tačke. Iz jednačine (11.5) se zaključuje da će pri promeni redukcione tačke, zbog promene vektora položaja $\vec{r}_i$ napadnih tačaka sila u odnosu na redukcionu tačku, doći do promene glavnog momenta $\overrightarrow{M_O}$.

Analitički postupak za određivanje glavnog momenta svodi se na određivanje projekcija glavnog momenta na koordinatne ose, primenu analitičkog načina određivanja momenta sile u odnosu na tačku (poglavlje 5.1.5) i Varinjonove teoreme (poglavlje 5.1.6). Projekcije glavnog momenta na koordinatne ose su:

$$\begin{aligned}
M_{Ox} &= \sum_{i=1}^{n} M_{Ox}\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i Z_i - z_i Y_i\right),\\
M_{Oy} &= \sum_{i=1}^{n} M_{Oy}\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(z_i X_i - x_i Z_i\right), \qquad (11.11)\\
M_{Oz} &= \sum_{i=1}^{n} M_{Oz}\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i Y_i - y_i X_i\right),
\end{aligned}$$

pa je intenzitet glavnog momenta:

$$\begin{aligned}
M_O &= \sqrt{\left(M_{Ox}\right)^2 + \left(M_{Oy}\right)^2 + \left(M_{Oz}\right)^2},\\
M_O &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} M_{Ox}\left(\vec{F}_i\right)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} M_{Oy}\left(\vec{F}_i\right)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} M_{Oz}\left(\vec{F}_i\right)\right)^2}. \qquad (11.12)
\end{aligned}$$

Uglovi koje glavni vektor $\overrightarrow{M_O}$ zaklapa sa koordinatnim osama određuju se izrazima:

$$\cos\alpha_{M_O} = \frac{M_{ox}}{M_O} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{Ox}\left(\vec{F}_i\right)}{M_O}, \quad \cos\beta_{M_O} = \frac{M_{oy}}{M_O} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{Oy}\left(\vec{F}_i\right)}{M_O}, \quad \cos\gamma_{M_O} = \frac{M_{oz}}{M_O} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{Oz}\left(\vec{F}_i\right)}{M_O}. \qquad (11.13)$$

11.2 Svođenje prostornog sistema sila na prostiji oblik

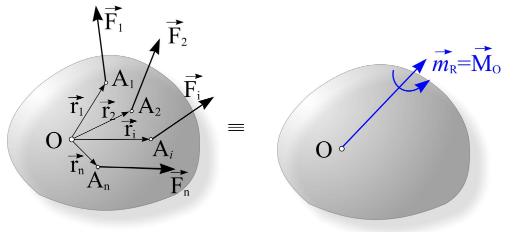
U prethodnom poglavlju je pokazano kako se prostorni sistem sila redukcijom u proizvoljnu tačku svodi na torzer – sistem koji čine glavni vektor $\vec{R}'$ i glavni moment $\overrightarrow{M_O}$. To je u stvari svođenje sistema sila na prostiji oblik. Analizom međusobnog odnosa glavnog vektora i glavnog momenta može se ustanoviti na kakav najprostiji oblik može da se svede prostorni sistem sila. Mogu da nastupe sledeći slučajevi:

1. Sistem sila je u ravnoteži

Ako je za dati sistem sila $\vec{R}' = 0$ i $\overrightarrow{M_O} = 0$, onda se dati sistem sila nalazi u ravnoteži, što će biti posebno obrađeno u poglavlju 11.3.

2. Sistem sila se svodi na spreg sila

Ako je za dati sistem sila $\vec{R}' = 0$ i $\overrightarrow{M_O} \neq 0$, onda se dati sistem sila svodi na spreg sila, čiji je moment određen jednačinom $\vec{m}_R = \overrightarrow{M_O} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}_i\right)$. Slobodno kruto telo pod dejstvom takvog sistema sila vrši čisto obrtno kretanje, Slika 11.2.

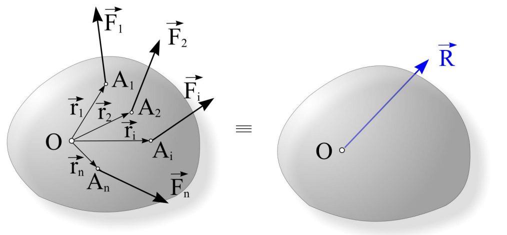


a) b)

Slika 11.2 *a*) Dati sistem sila; b) sistem se svodi na spreg $\vec{m}_R = \overrightarrow{M_O}$.

3. Sistem sila se svodi na rezultantu koja prolazi kroz redukcionu tačku

Ako je za dati sistem sila $\vec{R}' \neq 0$ i $\overrightarrow{M_O} = 0$, onda se dati sistem sila svodi na rezultantu $\vec{R} = \vec{R}'$, koja prolazi kroz tačku O. Slobodno telo pod dejstvom takvog sistema sila može da vrši čisto translatorno kretanje (ako se tačka O poklapa sa težištem tela), Slika 11.3.

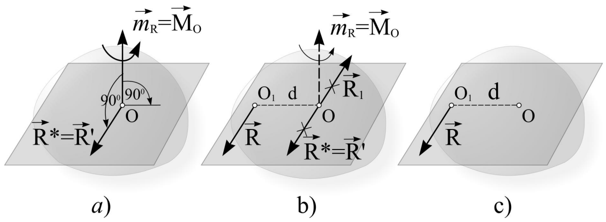


a) b)

Slika 11.3 *a*) Dati sistem sila; b) sistem se svodu na rezultantu $\vec{R} = \vec{R}'$.

4. Sistem sila se svodi na rezultantu koja ne prolazi kroz redukcionu tačku

Ako je za dati sistem sila $\vec{R}' \neq 0$ i $\overrightarrow{M_O} \neq 0$, i pri tome su glavni vektor i glavni moment upravni vektori, $\vec{m}_R = \overrightarrow{M_O} \perp \vec{R}'$, Slika 11.4 *a*), onda se dati sistem sila svodi na rezultantu $\vec{R}$ koja je jednaka glavnom vektoru $\vec{R} = \vec{R}'$, ali koja ne prolazi kroz tačku O. U tom slučaju spreg koji je prikazan vektorom $\vec{m}_R$ i redukciona rezultanta koja je jednaka glavnom vektoru $\vec{R}'$ leže u istoj ravni. Ako se redukcioni spreg predstavi silama $\vec{R}$ i $\vec{R}_1$, koje su istog intenziteta kao $\vec{R}'$ i postavi tako da jedna od sila sprega, na primer, $\vec{R}_1$ deluje u tački O i da se njena napadna linija poklapa sa napadnom linijom redukcione rezultante $\vec{R}^* = \vec{R}'$, Slika 11.4 b), dobija se uravnoteženi sistem sila u tački O, koji na osnovu treće aksiome može da se ukloni. Kako na telo sada deluje samo jedna sila, to znači da se sistem sila svodi na rezultantu koja deluje u tački O_1, Slika 11.4 c).

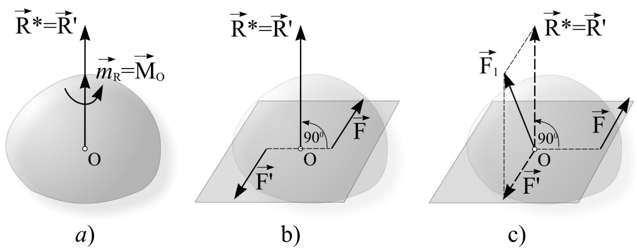


Slika 11.4 *a*) Redukcijom u tačku O dobija se $\vec{R}' \neq 0$ i $\overrightarrow{M_O} \neq 0$, $\vec{m}_R = \overrightarrow{M_O} \perp \vec{R}'$; b) redukcioni spreg predstavljen silama $\vec{R}$ i $\vec{R}_1$ istog intenziteta kao $\vec{R}'$; c) rezultanta ne prolazi kroz redukcionu tačku.

Rastojanje OO_1=d određuje se iz izraza $d = \dfrac{M_O}{R'}$. Ovaj slučaj u stvarnosti nastaje kod proizvoljnog sistema paralelnih sila, ili kad su sve sile u jednoj ravni, ako je njihov glavni vektor različit od nule, $\vec{R}' \neq 0$. Zaključuje se da u slučaju da se sistem sila svodi na ortogonalni torzer, sistem se dalje može uprostiti i svesti na rezultantu $\vec{R}$.

5. Sistem sila se svodi na dinamu čija osa prolazi kroz redukcionu tačku

Ako je za dati sistem sila $\vec{R}' \neq 0$ i $\vec{m}_R = \overrightarrow{M_O} \neq 0$ i pri tome su glavni vektor i glavni moment kolinearni vektori, tj. $\vec{m}_R = \overrightarrow{M_O} \parallel \vec{R}'$, Slika 11.5 *a*), onda se dati sistem svodi na silu $\vec{R}^* = \vec{R}'$ i spreg sila $\vec{F}, \vec{F}'$, koji leži u ravni upravnoj na silu $\vec{R}^* = \vec{R}'$, Slika 11.5 b). Dobijeni sistem koji čine sila i spreg sila koji su kolinearni zove se *dinamički zavrtanj* ili *dinama*, a prava duž koje je usmeren vektor $\vec{R}^* = \vec{R}'$ naziva se *osa diname*. Dalje uprošćenje ovakvog sistema sila nije moguće, jer ga je nemoguće svesti na jednu silu, rezultantu, ili na jedan spreg. Slobodno kruto telo pod dejstvom takvog sistema sila može da vrši samo složeno, zavojno kretanje: pomeranje tela u pravcu i smeru sile, uz obrtanje oko tog pravca. Takvo kretanje vrši zavrtanj kada se gura i obrće. Ako se smerovi glavnog vektora i glavnog momenta poklapaju, kao na Slici 11.5 *a*), dinama je desna, a ako su suprotnog smera, dinama je leva.



Slika 11.5 *a*) Sistem se redukcijom u tačku svodi na glavni vektor i glavni moment koji su istog pravca; b) sistem sila se svodi na dinamu čija osa prolazi kroz redukcionu tačku; c) sistem se svodi na krst sila.

Dinama može da se svede na dve sile koje su mimoilazne. Ako se jedna od sila sprega, recimo $\vec{F}'$, složi sa $\vec{R}^* = \vec{R}'$, tada se dati sistem sila svodi na dve ukrštene sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}$, koje ne leže u jednoj ravni, Slika 11.5 c). Ovakav sistem sila zove se *krst sila*, ekvivalentan je dinami, što znači da se ni on ne može zameniti samo jednom silom – rezultantom. Dakle, dinama koju čine sila $\vec{R}^* = \vec{R}'$ i spreg $\vec{m}_R$ može se zameniti krstom sila – sistemom koji čine dve sile čije se napadne linije mimoilaze.

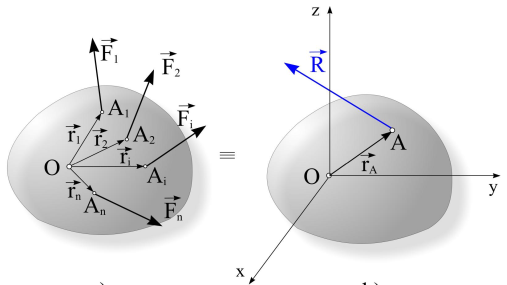
6. Sistem sila se svodi na dinamu čija osa ne prolazi kroz redukcionu tačku

Ako je za dati sistem sila $\vec{R}' \neq 0$ i $\overrightarrow{M_O} \neq 0$ i ako pri tome glavni vektor i glavni moment nisu međusobno ni upravni, ni kolinearni vektori, onda se dati sistem sila svodi na dinamu, čija osa ne prolazi kroz redukcionu tačku O.

11.3 Varinjonova teorema za prostorni sistem sila

U poglavlju 5 je dokazana Varinjonova teorema o momentu rezultante sistema sučeonih sila u ravni i prostoru. Međutim, ona važi i za proizvoljni prostorni sistem sila pod uslovom da se sistem sila svodi na rezultantu. U poglavlju 11.2 je pokazano da se sistem sila svodi na rezultantu ako je glavni vektor tog sistema različit od nule, a glavni moment jednak nuli (slučaj 3), ili ako su i glavni vektor i glavni moment različiti od nule i upravni su vektori (slučaj 4).

Varinjonova teorema o momentu rezultante proizvoljnog prostornog sistema sila u odnosu na tačku glasi: *Ako se sistem sila svodi na rezultantu* $\vec{R}$*, onda je moment rezultante prostornog sistema sila u odnosu na bilo koju tačku O jednak vektorskom zbiru momenata sila tog sistema u odnosu na istu tačku* O.



a) b)

Slika 11.6 *a*) Proizvoljni prostorni sistem sila; b) sistem sila se svodi na rezultantu $\vec{R}$.

Da bi se dokazala ova teorema, posmatraće se proizvoljni sistem sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ u tačkama A_1, A_2,..., A_n, Slika 11.6 *a*). Neka se dati sistem sila svodi na rezultantu koja deluje u tački A, Slika 11.6 b). Kako je dejstvo rezultante na telo ekvivalentno dejstvu datog sistema sila na telo, $\vec{R} \equiv \left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$, sledi da su im i obrtna dejstva u odnosu na bilo koju tačku ekvivalentna, tj:

$$\overrightarrow{M_O}\left(\vec{R}\right) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}_i\right), \tag{11.14}$$

$$\vec{r}_A \times \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right), \tag{11.15}$$

čime je Varinjonova teorema o momentu rezultante u odnosu na tačku dokazana.

Varinjonova teorema o momentu rezultante proizvoljnog prostornog sistema sila u odnosu na osu glasi: *Ako se proizvoljni sistem sila svodi na rezultantu* $\vec{R}$*, onda je moment rezultante prostornog sistema sila u odnosu na bilo koju osu jednak algebarskom zbiru momenata sila tog sistema u odnosu na istu osu.*

Da bi se dokazala ova teorema posmatra se osa x koja prolazi kroz tačku O, Slika 11.6 b). Projektovanjem jednačine (11.14) na osu x i primenom veze između momenta sile u odnosu na tačku i momenta sile u odnosu na osu, izraz (5.40), sledi:

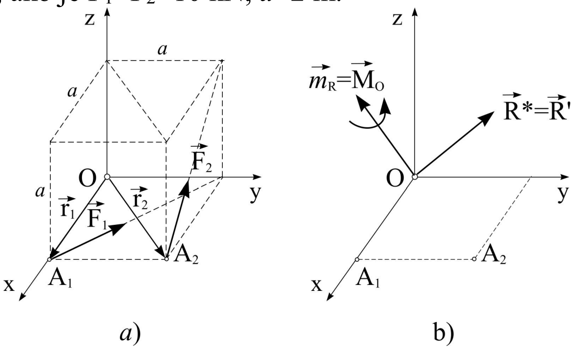
$$M_x\left(\vec{R}\right) = \sum_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right), \tag{11.16}$$

čime je Varinjonova teorema o momentu rezultante u odnosu na osu dokazana.

Primeri redukcije prostornog sistema sila

Primer 11.1

Sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ deluju u tačkama A_1 i A_2 kao što je prikazano na Slici P 11.1. Redukovati dati sistem sila u tačku O, ako je $F_1=F_2=10$ kN, $a=2$ m.



Slika P 11.1 *a*) Prostorni sistem sila; b) redukciona rezultanta i redukcioni spreg.

Redukcijom sila u tačku O dobija se redukciona rezultanta u toj tački, koja je jednaka vektorskom zbiru svih sila sistema, izraz (11.2), i rezultujući redukcioni spreg, čiji je moment jednak vektorskom zbiru momenata komponentnih spregova, tj. vektorskom zbiru momenata svih sila u odnosu na redukcionu tačku, izraz (11.7):

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,, \quad \vec{m}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M}_O\left(\vec{F}_i\right) = \overrightarrow{M}_O\,.$$

Da bi moglo da se izvrši vektorsko sabiranje sila potrebno je da se sile prikažu u vektorskom obliku. Ovo je moguće na više načina. Ovde će sile biti definisane analitičkim putem, tako što će se odrediti njihove projekcije na ose x, y i z, primenom postupka opisanog u poglavlju 4.2.2. Sila $\vec{F}_1$ deluje u horizontalnoj ravni, u pravcu dijagonale kvadrata stranice *a*, Slika P 11.1 *a*), što znači da je napadna linija sile $\vec{F}_1$ pod uglom od 45^0 u odnosu na ose x i y, dok je između pravca sile $\vec{F}_1$ i ose z ugao od 90^0. Projekcije sile $\vec{F}_1$ na ose Dekartovog koordinatnog sistema su:

$$X_1 = -F_1 \cos 45^0 = -10\frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2}\ \text{kN}, \quad Y_1 = F_1 \cos 45^0 = 10\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\ \text{kN}, \quad Z_1 = 0,$$

pa vektor sile $\vec{F}_1$ glasi: $\vec{F}_1 = -10\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + 10\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \quad (\text{kN})$.

Sila $\vec{F}_2$ deluje u ravni xOz, u pravcu dijagonale kvadrata, Slika P 11.1 *a*). Napadna linija sile $\vec{F}_2$ je upravna na pravac ose y, dok sa osama x i z zaklapa ugao od 45^0, tako da su projekcije sile $\vec{F}_2$:

$$X_2 = -F_2 \cos 45^0 = -10\frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2}\ \text{kN}, \quad Y_2 = 0, \quad Z_2 = F_2 \cos 45^0 = 10\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\ \text{kN}.$$

Vektor sile $\vec{F}_2$ je: $\vec{F}_2 = -10\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + 10\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} \quad (\text{kN})$.

Momenti sila u odnosu na tačku O su jednaki vektorskom proizvodu vektora položaja sile u odnosu na redukcionu tačku i vektora sile, izraz (11.1):

$$\vec{m}_1 = \overrightarrow{\mathrm{M}_\mathrm{O}}\left(\vec{\mathrm{F}}_1\right) = \vec{\mathrm{r}}_1 \times \vec{\mathrm{F}}_1, \quad \vec{m}_2 = \overrightarrow{\mathrm{M}_\mathrm{O}}\left(\vec{\mathrm{F}}_2\right) = \vec{\mathrm{r}}_2 \times \vec{\mathrm{F}}_2 .$$

Vektori položaja napadnih tačaka sila $\vec{\mathrm{F}}_1$ i $\vec{\mathrm{F}}_2$, na osnovu Slike P 11.1, su:

$$\vec{\mathrm{r}}_1 = 2\vec{i} \ (\mathrm{m}), \quad \vec{\mathrm{r}}_2 = 2\vec{i} + 2\vec{j} \ (\mathrm{m}).$$

Momenti sila $\vec{\mathrm{F}}_1$ i $\vec{\mathrm{F}}_2$ u odnosu na tačku O su:

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_\mathrm{O}}\left(\vec{\mathrm{F}}_1\right) = \vec{\mathrm{r}}_1 \times \vec{\mathrm{F}}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ -10\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 10\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 10\sqrt{2}\ \vec{k} \ (\mathrm{kNm}),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_\mathrm{O}}\left(\vec{\mathrm{F}}_2\right) = \vec{\mathrm{r}}_2 \times \vec{\mathrm{F}}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ -10\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 10\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 10\sqrt{2}\,\vec{i} - 10\sqrt{2}\,\vec{j} + 10\sqrt{2}\,\vec{k} \ (\mathrm{kNm}).$$

Sada se može izvršiti vektorsko sabiranje sila i momenata sila u odnosu na tačku, pa je redukciona retultanta u tački O – glavni vektor:

$$\vec{\mathrm{R}}^* = \vec{\mathrm{R}}' = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \vec{\mathrm{F}}_\mathrm{i} = \vec{\mathrm{F}}_1 + \vec{\mathrm{F}}_2 = \left(-10\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + 10\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) + \left(-10\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + 10\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right) =$$

$$= -10\sqrt{2}\,\vec{i} + 5\sqrt{2}\,\vec{j} + 5\sqrt{2}\,\vec{k},$$

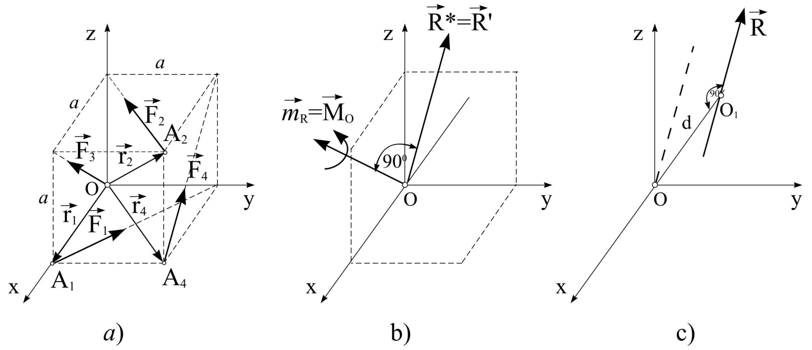
a moment rezultujućeg redukcionog sprega – glavni moment:

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_\mathrm{O}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \overrightarrow{\mathrm{M}_\mathrm{O}}\left(\vec{\mathrm{F}}_\mathrm{i}\right) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \vec{\mathrm{r}}_\mathrm{i} \times \vec{\mathrm{F}}_\mathrm{i} = 10\sqrt{2}\,\vec{i} - 10\sqrt{2}\,\vec{j} + 20\sqrt{2}\,\vec{k} \quad (\mathrm{kNm}).$$

Redukciona rezultanta i moment redukcionog sprega prikazani su na Slici P 11.1 b).

Primer 11.2

Dati sistem sila redukovati u koordinatni početak. Sve sile su istog intenziteta F, deluju duž dijagonala stranica kocke i prikazane su na Slici P 11.2 *a*). Analizom međusobnog odnosa glavnog vektora i glavnog momenta ustanoviti na kakav najprostiji oblik se svodi dati prostorni sistem sila.



Slika P 11.2 *a*) Prostorni sistem sila; b) redukciona rezultanta i redukcioni spreg; c) rezultanta sistema sila.

Projekcije sila $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ i $\vec{F}_4$ na ose Dekartovog koordinatnog sistema su:

$$X_1 = -F\frac{\sqrt{2}}{2},\quad Y_1 = F\frac{\sqrt{2}}{2},\quad Z_1 = 0,\quad X_2 = -F\frac{\sqrt{2}}{2},\quad Y_2 = -F\frac{\sqrt{2}}{2},\quad Z_2 = 0,$$

$$X_3 = F\frac{\sqrt{2}}{2},\quad Y_3 = 0,\quad Z_3 = F\frac{\sqrt{2}}{2},\quad X_4 = -F\frac{\sqrt{2}}{2}\quad Y_4 = 0,\quad Z_4 = F\frac{\sqrt{2}}{2},$$

pa vektori sila glase:

$$\vec{F}_1 = -F\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + F\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\ ,\ \vec{F}_2 = -F\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - F\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\ ,$$

$$\vec{F}_3 = F\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + F\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\ ,\ \vec{F}_4 = -F\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + F\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\ .$$

Redukciona rezultanta u tački O – glavni vektor je:

$$\vec{R}^* = \vec{R}' = \sum_{i=1}^{4}\vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = -F\sqrt{2}\,\vec{i} + F\sqrt{2}\,\vec{k}\ .$$

Sile $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ i $\vec{F}_4$ deluju u tačkama $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(a, a, a)$, $A_3(0, 0, 0)$ i $A_4(a, a, 0)$, Slika P 11.2 *a*). Vektore položaja napadnih tačaka sila u odnosu na redukcionu tačku O treba definisati da bi se izvršilo njihovo vektorsko množenje sa vektorima sila i odredili momenti redukcionih spregova sila sistema, odnosno momenti sila u odnosu na redukcionu tačku O.

Sila $\vec{F}_3$ deluje u koordinatnom početku, pa je vektor položaja $\vec{r}_3$ napadne tačke te sile u odnosu na redukcionu tačku O jednak nuli. Vektori položaja sila $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_4$ su:

$$\vec{r}_1 = a\,\vec{i}\ ,\quad \vec{r}_2 = a\,\vec{i} + a\,\vec{j} + a\,\vec{k}\ ,\quad \vec{r}_4 = a\,\vec{i} + a\,\vec{j}\ .$$

Momenti datih sila u odnosu na tačku O su:

$$\overline{M}_O\left(\vec{F}_1\right) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = F\frac{\sqrt{2}}{2}a\,\vec{k},$$

$$\overline{M}_O\left(\vec{F}_2\right) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = F\frac{\sqrt{2}}{2}a\,\vec{i} - F\frac{\sqrt{2}}{2}a\,\vec{j},$$

$$\overline{M}_O\left(\vec{F}_3\right) = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = 0,$$

$$M_O\left(\vec{F}_4\right) = \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = F\frac{\sqrt{2}}{2}a\,\vec{i} - F\frac{\sqrt{2}}{2}a\,\vec{j} + F\frac{\sqrt{2}}{2}a\,\vec{k},$$

pa je moment rezultujućeg redukcionog sprega – glavni moment:

$$\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{4}\overline{M}_O\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{4}\vec{r}_i \times \vec{F}_i = F\sqrt{2}\,a\,\vec{i} - F\sqrt{2}\,a\,\vec{j} + F\sqrt{2}\,a\,\vec{k}\ .$$

Kako su glavni vektor i glavni moment različiti od nule, Slika P 11.2 b), treba ispitati u kakvom su međusobnom odnosu. Skalarni proizvod ova dva vektora je:

$$\vec{R}'\cdot\overline{M}_O = \left(-F\sqrt{2}\,\vec{i} + F\sqrt{2}\,\vec{k}\right)\cdot\left(F\sqrt{2}\,a\,\vec{i} - F\sqrt{2}\,a\,\vec{j} + F\sqrt{2}\,a\,\vec{k}\right) = -2F^2\,a + 2F^2\,a = 0,$$

što znači da su oni međusobno upravni (ortogonalni torzer). U tom slučaju dati sistem sila se svodi na rezultantu $\vec{R}$, koja je jednaka glavnom vektoru $\vec{R} = \vec{R}'$ i ne prolazi kroz tačku O, kao što je pokazano u poglavlju 11.2, slučaj 4. Ako se napadna tačka rezultante obeleži sa O_1, Slika P 11.2 c), onda se rastojanje OO_1=d određuje iz izraza:

$$d=\frac{\left|\vec{M}_O\right|}{\left|\vec{R}'\right|}=\frac{\sqrt{\left(F\sqrt{2}\,a\right)^2+\left(-F\sqrt{2}\,a\right)^2+\left(F\sqrt{2}\,a\right)^2}}{\sqrt{\left(-F\sqrt{2}\right)^2+\left(F\sqrt{2}\right)^2}}=1,22\,a\,.$$

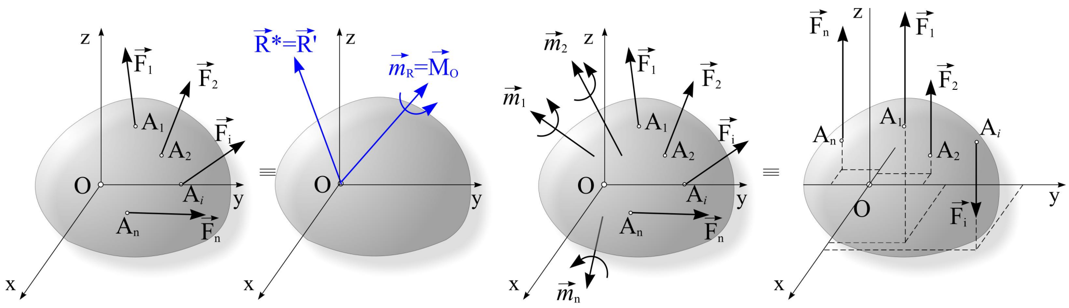
Rezultanta datog prostornog sistema sila prikazana je na Slici P 11.2 c).

11.4 Uslovi ravnoteže proizvoljnog prostornog sistema sila

11.4.1 Prostorni sistem sila

Da bi se proučila ravnoteža tela na koje deluje proizvoljni sistem sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ u tačkama A_1, A_2,..., A_n, Slika 11.7 *a*), potrebno je dati sistem sila uprostiti, odnosno zameniti ga silom i spregom, kako je to opisano u poglavlju 11.2, Slika 11.7 b).
Da bi proizvoljni prostorni sistem sila bio u ravnoteži potrebno je da redukciona rezultanta (glavni vektor) i moment rezultujućeg redukcionog sprega (glavni moment) tog sistema sila budu istovremeno jednaki nuli. Ovo je već rečeno u poglavlju 11.2, slučaj 1. S obzirom na izraze (11.4) i (11.5), uslovi ravnoteže u vektorskom obliku glase:

$$\begin{aligned}&\vec{R}'=\vec{R}^*=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=0,\\ &\vec{m}_R=\sum_{i=1}^{n}\vec{m}_i=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_O\left(\vec{F}_i\right)=\overrightarrow{M}_O=0.\end{aligned}\tag{11.17}$$



a) b) c) d)

Slika 11.7 a) Proizvoljni prostorni sistem sila; b) sistem sila zamenjen silom i spregom; c) sistem sila i spregova; d) prostorni sistem paralelnih sila.

Do uslova ravnoteže u analitičkom obliku dolazi se na osnovu izraza (11.9) i (11.12), tj. (11.8) i (11.11):

$$R'=R^*=\sqrt{\left(X_R'\right)^2+\left(Y_R'\right)^2+\left(Z_R'\right)^2}=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}Z_i\right)^2}=0,\tag{11.18}$$

$$M_O=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}M_{Ox}\left(\vec{F}_i\right)\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}M_{Oy}\left(\vec{F}_i\right)\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}M_{Oz}\left(\vec{F}_i\right)\right)^2}=0.\tag{11.19}$$

Da bi jednačine (11.18) i (11.19) bile zadovoljene moraju biti ispunjeni uslovi:

$$X_R{}' = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i = 0,$$
$$Y_R{}' = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\beta_i = 0, \tag{11.20}$$
$$Z_R{}' = \sum_{i=1}^{n} Z_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\gamma_i = 0,$$

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} M_{Ox}\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i\, Z_i - z_i\, Y_i\right) = 0,$$
$$M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} M_{Oy}\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(z_i\, X_i - x_i\, Z_i\right) = 0, \tag{11.21}$$
$$M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} M_{Oz}\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i\, Y_i - y_i\, X_i\right) = 0.$$

Primenom veze između momenta sile u odnosu na tačku i momenta sile u odnosu na osu, (izraz (5.40)), za analitičke uslove ravnoteže proizvoljnog prostornog sistema sila dobija se:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right) = 0, \tag{11.22}$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_i\right) = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_i\right) = 0,$$

što predstavlja sistem od šest nezavisnih jednačina ravnoteže. *Da bi proizvoljni prostorni sistem sila bio u ravnoteži potrebno je i dovoljno da algebarski zbir projekcija svih sila na ose Dekartovog koordinatnog sistema bude jednak nuli i algebarski zbir momenata svih sila sistema u odnosu na te ose bude jednak nuli.*

Ako su jednačine (11.22) za prostorni sistem sila koji deluje na telo zadovoljene, onda se radi o *uravnoteženom sistemu sila*, a telo na koga deluje takav sistem sila je *u ravnoteži*. Prva tri uslova sistema (11.22) obezbeđuju potrebne uslove da se slobodno kruto telo ne pomera translatorno duž koordinatnih osa, a druga tri uslova sistema (11.22), obezbeđuju potrebne uslove da se slobodno telo ne obrće oko tih osa. Pri rešavanju problema ravnoteže tela pod dejstvom proizvoljnog prostornog sistema sila može se odrediti najviše šest nepoznatih. Ako broj nepoznatih nije veći od šest, problem je statički određen, a ako je broj nepoznatih veći od šest, problem je statički neodređen, pa je pored jednačina ravnoteže potrebno formirati neke dodatne jednačine, o čemu će biti reči u otpornosti materijala, odnosno teoriji elastičnosti.

11.4.2 Prostorni sistem sila i spregova

Ako na telo pored prostornog sistema sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ deluje i prostorni sistem spregova $\vec{m}_1, \vec{m}_2, ..., \vec{m}_n$, Slika 11.7 c), onda se moment rezultujućeg redukcionog sprega dobija slaganjem spregova dobijenih redukcijom sistema sila u tačku, koji su jednaki momentima sila u odnosu na tačku, i datih spregova:

$$\vec{m}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) + \sum_{i=1}^{N} \vec{m}_i \,, \tag{11.23}$$

gde je N broj spregova koji deluju na telo. U tom slučaju prve tri jednačine sistema jednačina (11.22) se ne menjaju, dok poslednje tri jednačine glase:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right) + \sum_{i=1}^{N} m_{ix} = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_i\right) + \sum_{i=1}^{N} m_{iy} = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_i\right) + \sum_{i=1}^{N} m_{iz} = 0, \end{aligned} \tag{11.24}$$

gde su $\sum_{i=1}^{N} m_{ix}, \sum_{i=1}^{N} m_{iy}$ i $\sum_{i=1}^{N} m_{iz}$ sume projekcija svih spregova na koordinatne ose. Znači da ako pored sila na telo deluju i spregovi oni ulaze u momentne jednačine.

11.4.3 Prostorni sistem paralelnih sila

Ako na telo deluje sistem paralelnih sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ i ako se koordinatni sistem izabere tako da jedna od osa bude paralelna silama sistema, kao na Slici 11.7 d), analitički uslovi ravnoteže, predstavljeni izrazom (11.22), se znatno pojednostavljuju. Kako su sve sile sistema upravne na ose x i y, a paralelne sa osom z, za svaku od sila sistema je:

$$X_i = 0, \quad Y_i = 0, \quad M_z\left(\vec{F}_i\right) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n\,. \tag{11.25}$$

Zamenom (11.25) u (11.22) zaključuje se da su prve dve i poslednja jednačina identički zadovoljene, bez obzira da li je sistem u ravnoteži ili ne, pa ove tri jednačine i ne predstavljaju jednačine ravnoteže. U tom slučaju uslovi ravnoteže se svode na oblik:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right) = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_i\right) = 0. \end{aligned} \tag{11.26}$$

Za ravnotežu prostornog sistema paralelnih sila koji deluje na telo potrebno je i dovoljno da algebarski zbir projekcija svih sila na osu z koja je paralelna silama, kao i algebarski zbir momenata svih sila u odnosu na druge dve ose, x i y , bude jednak nuli.