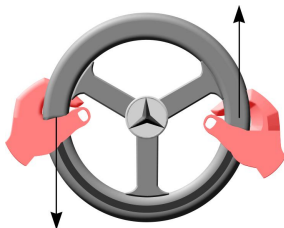


5.3 Spreg sila

5.3.1 Definisane sprega sila



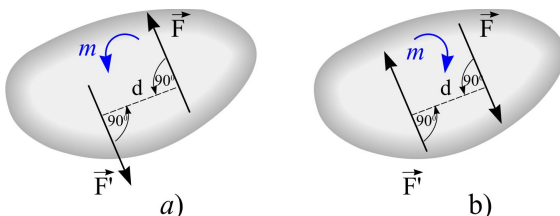
Slika 5.19 Spreg sila

Spreg sila je sistem od dve paralelne sile istog intenziteta, suprotnih smerova, koje deluju na međusobnom rastojanju d , Slika 5.19. Sistem sila, koji obrazuje spreg, očigledno se ne nalazi u ravnoteži (nije zadovoljena aksioma dva), iako je rezultanta sprega sila jednaka nuli.

Ravan koja prolazi kroz napadne linije sila sprega zove se *ravan dejstva sprega*. Normalno rastojanje d između napadnih linija sila sprega zove se *krak sprega*. Kako je rezultanta sila sprega jednaka nuli, dejstvo sprega na telo se svodi na obrtni efekat koji zavisi od:

- 1) intenziteta sila sprega F i dužine kraka d ;
- 2) položaja ravni dejstva sprega;
- 3) smeru obrtanja sprega.

Moment izazvan spregom sila zove se *moment sprega*.



Slika 5.20 a) Spreg sila; b) vektor momenta sprega sila.

Intenzitet momenta sprega sila jednak je proizvodu intenziteta jedne od sila i normalnog rastojanja između napadnih linija sila sprega:

$$m = \pm F d. \quad (5.50)$$

Moment sprega m , uzet sa odgovarajućim znakom, istovremeno određuje intenzitet i smer obrtnog efekta sprega sila. Moment sprega ima znak plus, pozitivan je, kada spreg teži da obrne telo u smeru suprotnom obrtanju kazaljke na satu, Slika 5.20 a), tj. znak minus, negativan je, kada spreg teži da obrne telo u smeru obrtanja kazaljke na satu, Slika 5.20 b). Moment sprega sila, kao i moment sile, mere se u njutnmetrima.

Moment sprega sila m ne zavisi od izbora momentne tačke, koja se nalazi u ravni dejstva sila sprega. Da bi se ovo dokazalo, izabere se u ravni dejstva sprega bilo koja tačka O , Slika 5.21, i odrede momenti sila sprega u odnosu na tačku O :

$$M_O(\vec{F}) = -F \cdot \overline{OA}, \quad M_O(\vec{F}') = F' \cdot \overline{OB}. \quad (5.51)$$

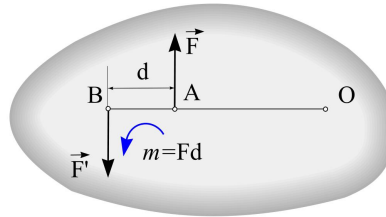
Sabiranje ova dva izraza i zamenom $\overline{OB} - \overline{OA} = d$, $F' = F$, dobija se:

$$M_O(\vec{F}) + M_O(\vec{F}') = -F \overline{OA} + F' \overline{OB} = F(\overline{OB} - \overline{OA}) = F d. \quad (5.52)$$

Na osnovu izraza (5.50) i (5.52) sledi:

$$m = M_O(\vec{F}) + M_O(\vec{F}'), \quad (5.53)$$

algebarski zbir momenata svake od sila sprega u odnosu na bilo koju tačku O , koja leži u ravni dejstva sprega, ne zavisi od izbora te tačke i jednak je momentu sprega sile.



Slika 5.21 Moment sprega m ne zavisi od izbora momentne tačke

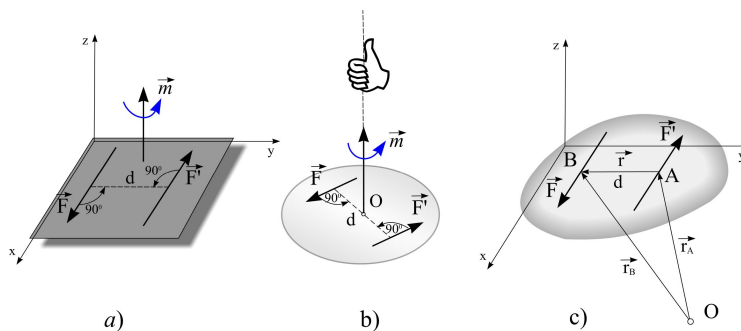
Dejstvo sprega sile ne zavisi od momentne tačke, pa se u označavanju ne piše indeks koji označava momentnu tačku, kakav je bio slučaj kod momenta sile. Ovu teoremu je korisno upotrebiti pri izračunavanju momenata sile koje čine spreg u odnosu na neku tačku.

5.3.2 Vektor momenta sprega

Za određivanje obrtnog dejstva, koje izaziva spreg sile, potrebno je poznavati intenzitet momenta sprega sile, ravan dejstva sprega i smer obrtanja u toj ravni. Prema tome, moment sprega sile je vektorska veličina i obeležava se sa \vec{m} .

Moment sprega je vektor, čiji je intenzitet jednak momentu sprega m – proizvodu intenziteta sile sprega i kraka sprega, pravca upravnog na ravan dejstva sprega, pozitivnog smera, ukoliko posmatrač, koji gleda u smeru vektora, vidi obrtanje u smeru desnog zavrtnja, Slika 5.22 a), b). Ako se sile sprega nalaze u ravni xOy , Slika 5.22, one izazivaju obrtanje tela oko ose z , upravne na ravan, u pozitivnom smeru, pa je vektor momenta sprega:

$$\vec{m} = m \vec{k} = (Fd) \vec{k}. \quad (5.54)$$



Slika 5.22 a) Spreg sile i ravan dejstva sprega; b) pozitivan znak vektora momenta sprega; c) spreg sile, momentna tačka O i vektori položaja.

Moment sprega može da se odredi sabiranjem vektora momenata svake od sila sprega u odnosu na neku proizvoljnu tačku, Slika 5.22 c), uzimajući u obzir da su sile sprega jednake, suprotnog smera ($\vec{F}' = -\vec{F}$), kao i da su \vec{r}_A i \vec{r}_B vektori položaja tačaka A i B na napadnim linijama sprega, pri čemu je $\vec{r}_A + \vec{r} = \vec{r}_B$, odnosno $\vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}$:

$$\begin{aligned}\vec{M}_O(\vec{F}') + \vec{M}_O(\vec{F}) &= \vec{r}_A \times \vec{F}' + \vec{r}_B \times \vec{F} = \vec{r}_A \times (-\vec{F}) + \vec{r}_B \times \vec{F} = \\ &= -\vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times \vec{F} = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}.\end{aligned}\quad (5.54)$$

Intenzitet vektorskog proizvoda (5.54) je:

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin 90^\circ = F d = m. \quad (5.55)$$

Na osnovu izraza (5.54) i (5.55) zaključuje se da je moment sprega:

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (5.56)$$

Do istog rezultata bi se došlo i ako bi se za momentnu tačku odabrala neka tačka koja leži na napadnoj liniji jedne od sila, na primer tačka A. Moment sile \vec{F}' za tačku A je jednak nuli, pa je:

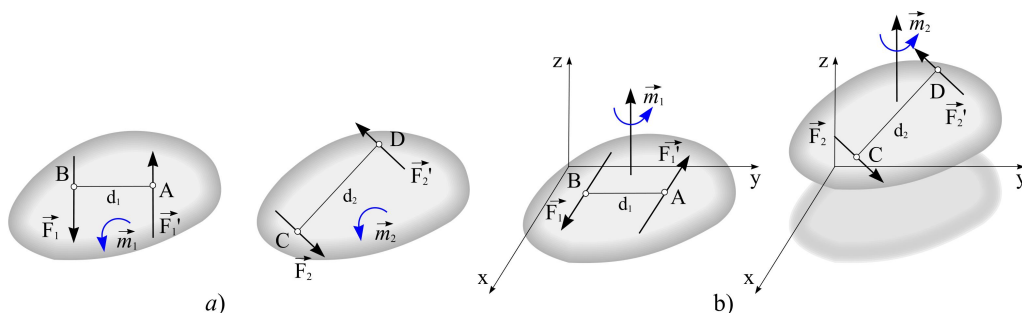
$$\vec{M}_A(\vec{F}') + \vec{M}_A(\vec{F}) = 0 + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{m}. \quad (5.57)$$

Ovo ukazuje na to da je moment sprega *slobodan vektor*, tj. može da deluje u bilo kojoj tački, pošto moment sprega zavisi samo od vektora položaja \vec{r} između sila, a ne od vektora položaja \vec{r}_A i \vec{r}_B , između proizvoljne tačke O i sila sprega. Moment sprega sila definisan je samo silama koje obrazuju spreg i krakom sprega, kao i ravni dejstva i ni sa kakvom tačkom u ravni ova veličina nije u vezi, za razliku od momenta sile, koji je vezan za tačku ili osu, za koju se određuju momenti sile.

5.3.3 Ekvivalentnost spregova sila

Dva sprega su ekvivalentna ako imaju isto dejstvo na telo. Ovo će biti u slučaju kada imaju isti pravac – iste ravni dejstva spregova ili paralelne ravni dejstva, iste intenzitete i iste smerove. Ekvivalentnost je znači ispunjena ako je:

$$\vec{m}_1 = \vec{m}_2. \quad (5.58)$$



Slika 5.23 a) Spregovi deluju u istoj ravni; b) spregovi deluju u paralelnim ravnima.

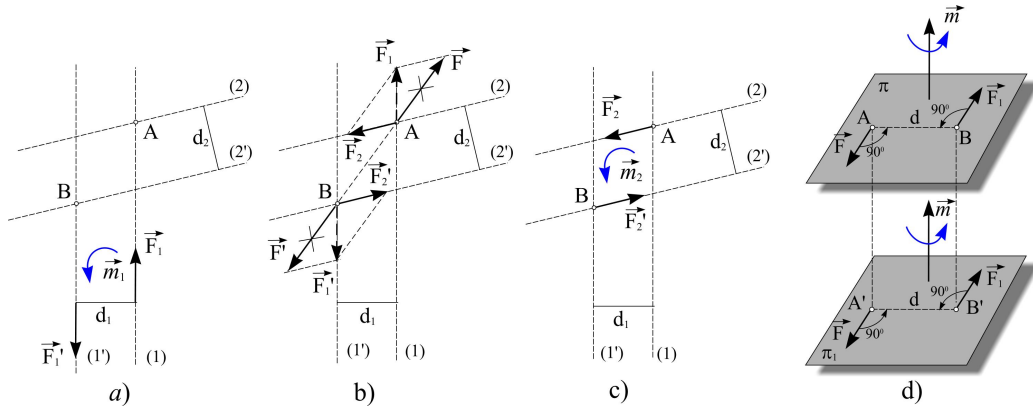
Na Slici 5.23 a) prikazani su spregovi koji deluju u istoj ravni i imaju isti smer, a na Slici 5.23 b) su spregovi koji deluju u paralelnim ravnima i imaju, takođe, isti smer. I u jednom i u drugom slučaju spregovi su ekvivalentni ukoliko je:

$$\vec{m}_1 = \vec{m}_2,$$

odnosno ako je:

$$F_1 d_1 = F_2 d_2.$$

Iz ove jednačine sledi važna karakteristika spregova: *spreg datog pravca, smer a i intenziteta može se zameniti drugim spregom sila pod uslovom da su sile novog sprega u istoj ili paralelnoj ravni, da je smer dejstva i intenzitet (proizvod sile i kraka) isti.*



Slika 5.24 a) Spreg sila \vec{F}_1, \vec{F}_1' ; b) premeštanje sila sprega u A i B i razlaganje na komponente; c) sile \vec{F}_2 i \vec{F}_2' mogu da se uklone kao uravnotežene i ostaje samo spreg \vec{F}, \vec{F}' ; d) dejstvo sprega sila \vec{F}, \vec{F}_1' u ravni π se ne menja premeštanjem u paralelnu ravan π_1 .

Da bi se ovo dokazalo, posmatraće se spreg sila \vec{F}_1, \vec{F}_1' čiji je krak d_1 , Slika 5.24 a). Kroz proizvoljne tačke A i B na napadnim linijama sprega povučene su dve paralelne prave. Rastojanje između pravih je d_2 . Svaka od sila sprega može da se razloži na komponente \vec{F}, \vec{F}_2 , tj. \vec{F}', \vec{F}_2' , kao što je prikazano na Slici 5.24 b). Kako su sile \vec{F} i \vec{F}' istog intenziteta, istog pravca, suprotnih smerova i deluju na istoj napadnoj liniji, to se na osnovu treće aksiome one mogu ukloniti, posle čega na telo deluju samo dve sile \vec{F}_2 i \vec{F}_2' , koje čine spreg sila pošto su istog intenziteta, suprotnih smerova i deluju duž paralelnih napadnih linija, Slika 5.24 c). Sada treba dokazati da je moment sprega sila \vec{F}_2, \vec{F}_2' , čiji je krak d_2 isti kao moment sprega sila \vec{F}_1, \vec{F}_1' . U tom cilju primenjuje se Varinjonova teorema o momentu rezultante u odnosu na tačku B:

$$M_B(\vec{F}_1) = M_B(\vec{F}) + M_B(\vec{F}_2).$$

Kako je:

$$M_B(\vec{F}_1) = F_1 d_1, \quad M_B(\vec{F}) = 0, \quad M_B(\vec{F}_2) = F_2 d_2,$$

dobija se:

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \quad \Rightarrow \quad m_1 = m_2, \quad (5.59)$$

tj. momenti spregova sila \vec{F}_1, \vec{F}_1' i \vec{F}_2, \vec{F}_2' su jednaki, jer su proizvodi sile i krakova spregova jednaki i ista ravan dejstva spregova, čime je teorema dokazana.

Osobine sprega sila su:

1. Dejstvo sprega sila na telo se ne menja ako se spreg sila premesti u bilo koji položaj u ravni dejstva sprega;

2. Dejstvo datog sprega sila na telo se ne menja ako se istovremeno promeni intenzitet sila sprega i krak sprega tako da moment sprega \vec{m}_1 ostane nepromenjen.

Intenzitet sile \vec{F}_2 , ako je poznat krak sprega d_2 , može da se odredi na osnovu izraza (5.59):

$$F_2 = \frac{m_1}{d_2}. \quad (5.60)$$

Da bi spreg sila koji deluje u nekoj ravni bio definisan, dovoljno je, na osnovu svega napred izloženog, dati samo njegov moment. Zbog toga se u tehnici spreg sila često prikazuje samo kružnom strelicom (usmerenim kružnim lukom), koja pokazuje smer obrtanja, ne ucrtavajući sile koje obrazuju spreg.

Spreg sila se može premestiti u bilo koju ravan, paralelnu ravni dejstva, pri čemu se dejstvo sprega sila na telo ne menja, jer se pri premeštanju sprega sila u paralelnu ravan ne menja vektor momenta sprega: $\vec{m}_1 = \vec{m}_2$, Slika 5.24 d).

5.3.4 Slaganje i ravnoteža spregova u ravni

Spreg sila koji zamenjuje dejstvo sistema spregova na kruto telo je *rezultujući spreg*, dok se spregovi nazivaju *komponentni spregovi*. Ako na telo deluje sistem spregova koji se nalaze u istoj ravni može se dokazati **Teorema o slaganju spregova**:

Sistem spregova koji deluje u istoj ravni, može se zameniti jednim rezultujućim spregom, koji deluje u istoj ravni, čiji je moment jednak algebarskom zbiru momenata komponentnih spregova.

Da bi se dokazala ova teorema, posmatrač se telo na koje deluju tri sprega koji leže u istoj ravni (\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2) i (\vec{F}_3, \vec{F}'_3), Slika 5.25 a). Momenti ovih spregova su:

$$m_1 = F_1 d_1 \quad m_2 = F_2 d_2, \quad m_3 = F_3 d_3.$$

Primenom teoreme o ekvivalentnosti spregova, ova tri sprega se mogu zameniti drugim sistemom spregova: (\vec{P}_1, \vec{P}'_1), (\vec{P}_2, \vec{P}'_2) i (\vec{P}_3, \vec{P}'_3), pod uslovom da su im momenta jednaki. Usvojiće se da novi spregovi imaju isti krak d , Slika 5.25 b), pa su momenta novih spregova, na osnovu (5.59):

$$m'_1 = P_1 d = m_1 = F_1 d_1, \quad m'_2 = P_2 d = m_2 = F_2 d_2, \quad m'_3 = P_3 d = m_3 = F_3 d_3, \quad (5.61)$$

odakle su intenziteti sila novih spregova:

$$P_1 = \frac{F_1 d_1}{d}, \quad P_2 = \frac{F_2 d_2}{d}, \quad P_3 = \frac{F_3 d_3}{d}.$$

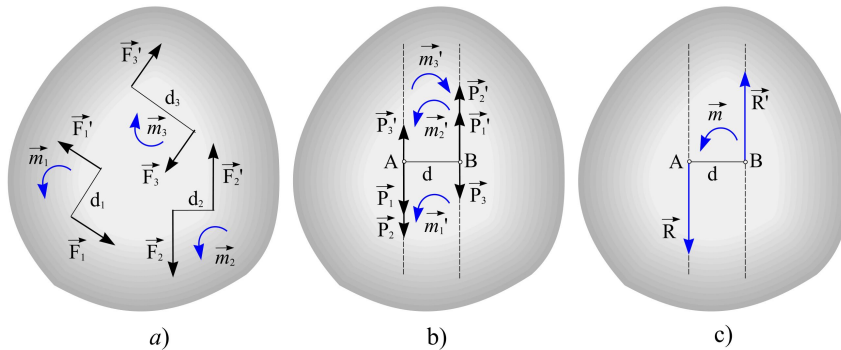
Novi sistem spregova može da se premesti bilo gde u ravni njihovog dejstva, a da se pri tome ništa ne promeni, pa će se spregovi premestiti tako da im sile sprega deluju duž zajedničkih napadnih linija, Slika 5.25 b).

Tako je dobijen sistem kolinearnih sila u tačkama A i B, koje se mogu složiti u rezultante:

$$R = P_1 + P_2 - P_3,$$

$$R' = P'_1 + P'_2 - P'_3,$$

pri čemu je: $R = R'$.



Slika 5.25 a) Na telo deluju tri sprega u istoj ravni; b) spregovi ekvivalentni datim spregovima; c) rezultujući spreg sile.

Sile \vec{R} i \vec{R}' čine spreg čiji je moment:

$$m = R d = (P_1 + P_2 - P_3) d = P_1 d + P_2 d - P_3 d. \quad (5.62)$$

Zamenom izraza (5.61) u (5.62) dobija se:

$$m = m_1 + m_2 + m_3,$$

čime je teorema u slučaju da na telo deluju tri sprega dokazana.

Moment rezultujućeg sprega, ako na telo deluje sistem od n spregova koji leže u istoj ravni, jednak je algebarskom zbiru momenata komponentnih spregova:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (5.63)$$

Iz dokazane teoreme proizilazi da je za ravnotežu sistema spregova koji deluju na telo a leže u istoj ravni potrebno i dovoljno da algebarski zbir momenata svih spregova sila bude jednak nuli:

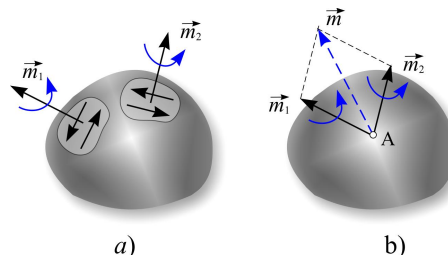
$$m = \sum_{i=1}^n m_i = 0. \quad (5.64)$$

Pod dejstvom uravnoteženog sistema spregova sila telo miruje.

5.3.5 Slaganje i ravnoteža spregova u prostoru

Pošto su momenti spregova slobodni vektori, oni mogu da se premeste u bilo koju tačku A na telu i da se vektorski saberu. Na primer, dva sprega sila koji deluju u različitim ravnima tela na Slici 5.26 a) mogu da se zamene njihovim odgovarajućim momentima \vec{m}_1 i \vec{m}_2 , a onda ova dva slobodna vektora mogu da se premeste u proizvoljnu tačku A i saberu kako bi se dobio rezultujući moment sprega, Slika 5.26 b):

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2. \quad (5.65)$$



Slika 5.26 a) Na telo deluju dva sprega u različitim ravnima; b) slaganje spregova u prostoru.

Dva sprega, koji leže u različitim ravnima, ekvivalentni su jednom spregu, čiji je moment jednak vektorskom (geometrijskom) zbiru momenata datih spregova.

Ako više od dva sprega sila deluje na telo, može se uopštiti ovaj princip i vektor momenta rezultujućeg sprega napisati kao:

$$\vec{m} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_i . \quad (5.66)$$

Da bi sistem spregova bio u ravnoteži moment rezultujućeg sprega mora biti jednak nuli:

$$\vec{m} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_i = 0 . \quad (5.67)$$

Uslov ravnoteže sistema spregova u prostoru je da poligon konstruisan od vektora koji predstavljaju momente spregova, koji deluju na kruto telo, mora biti zatvoren.

VAŽNE NAPOMENE

- Moment sprega stvaraju dve paralelne sile koje su jednake ali suprotnih smerova. Njihovo dejstvo je čisto obrtanje ili težnja za obrtanjem u određenom smeru
- Moment sprega je slobodan vektor, a kao rezultat stvara isti efekat obrtanja na telo nezavisno od toga gde se spreg nalazi na telu
- Moment sprega je jednak proizvodu sile sprega i kraka sprega, $m = F d$
- Dejstvo sprega na telo se ne menja ako se spreg sila premesti u bilo koji položaj u ravni dejstva sprega
- Dejstvo datog sprega na telo se ne menja ako se istovremeno promeni intenzitet sile sprega i kraka sprega tako da moment sprega ostane nepromenjen
- Sistem spregova koji deluje u istoj ravni, može se zameniti jednim rezultujućim spregom, koji deluje u istoj ravni, čiji je moment jednak algebarskom zbiru momenata komponentnih spregova
- Za ravnotežu sistema spregova koji deluju na telo, a leže u istoj ravni, potreban i dovoljan uslov je da algebarski zbir momenata svih spregova sila bude jednak nuli
- Moment sprega je vektor upravan na ravan dejstva sprega i u prostoru se izračunava kao vektorski proizvod $\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F}$, gde je vektor položaja \vec{r} usmeren od bilo koje tačke na liniji dejstva jedne od sila do bilo koje tačke na liniji dejstva druge sile
- Moment rezultujućeg sprega sistema spregova koji deluju na telo, a leže u različitim ravnima, jednak je vektorskom zbiru momenata komponentnih spregova, $\vec{m} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_i$, tj. završnoj strani poligona vektora momenata komponentnih spregova
- Da bi sistem spregova koji leže u različitim ravnima bio u ravnoteži treba da bude zadovoljen uslov $\vec{m} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_i = 0$