

$\vec{R}'$  čiji je početak u tački O (početak prve sile), a vrh u tački c (vrh poslednjeg vektora) je vektorski zbir sila  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  i naziva se *glavni vektor* datog sistema sila:

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i. \quad (4.11)$$

U opštem slučaju sistema od n sila glavni vektor je:

$$\vec{R}' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (4.12)$$

Konstrukcija prikazana na Slici 4.6 d) naziva se *poligon sila* (videti poglavlje 2.2.3 – sabiranje više vektora). Očigledno je da ovaj način konstrukcije poligona sila predstavlja postupnu primenu pravila trougla sila. *Glavni vektor sistema sila dobija se kao završna strana poligona konstruisanog od sila*. Vrhovi svih komponentnih vektora treba da budu usmereni ka istoj strani (po obimu poligona), dok je vrh glavnog vektora  $\vec{R}'$  usmeren ka suprotnoj strani.

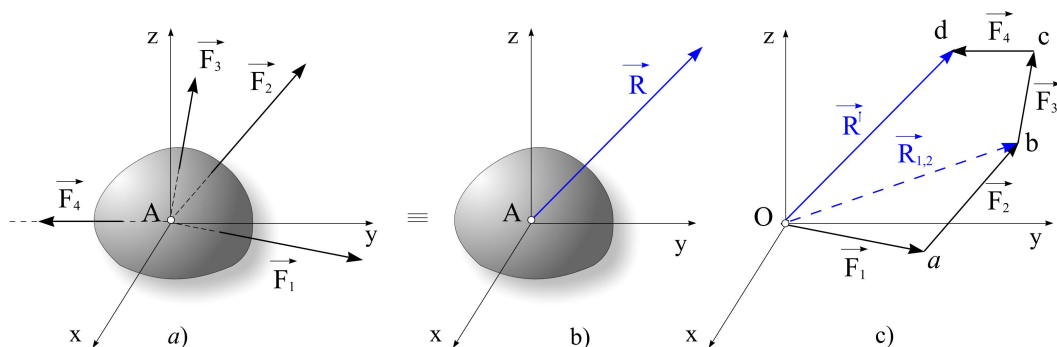
Upoređenjem izraza (4.10) i (4.11) zaključuje se da su rezultanta sistema sila i glavni vektor sistema sila isti vektori. Ako se sila  $\vec{R}' = \vec{R}$ , određena pomoću poligona sila, nanese na tačku A tela, tada ona zamenjuje dejstvo svih sila na telo, tj. ona je *rezultanta sistema sila*.

*Rezultanta sistema sučeonih sila geometrijski je određena završnom stranom poligona konstruisanog od vektora koji u usvojenoj razmeri predstavljaju date sile.*

#### 4.1.4 Slaganje sistema sučeonih sila u prostoru

Ako na telo deluje sistem sila čije napadne linije ne leže u istoj ravni, takav sistem sila se naziva *sistem sila u prostoru* ili *prostorni sistem sila*.

Na Slici 4.7 je prikazan postupak geometrijskog načina slaganja prostornog sistema sučeonih sila. Koordinatni sistem xyz je ucrtan da bi se istakao položaj sila u prostoru. Glavni vektor je određen završnom stranom poligona sila Oabcd koji ne leži u jednoj ravni, Slika 4.7 c). Prenošenjem glavnog vektora  $\vec{R}'$  u napadnu tačku A sistema sila određena je njegova rezultanta  $\vec{R} = \vec{R}'$ , Slika 4.7 b). Dokaz da vektor  $\vec{O}d$  predstavlja u izabranom razmeri rezultantu je isti kao u slučaju ravnog sistema sila, Slika 4.6.



Slika 4.7 a) Sistem sučeonih sila u prostoru; c) rezultanta sistema sučeonih sila; d) slaganje sistema sučeonih sila konstrukcijom poligona sila.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (4.13)$$

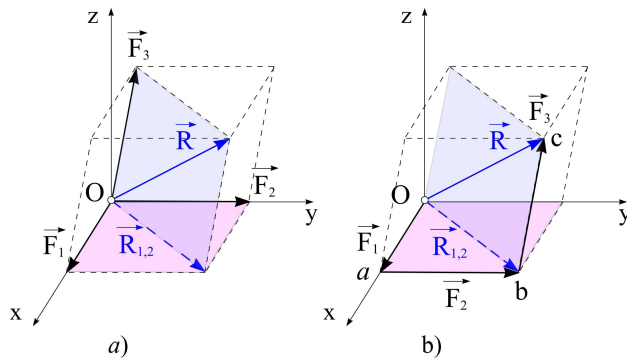
Rezultanta datih sila predstavlja po veličini, pravcu i smeru završnu stranu poligona sila konstruisanog od datih sila.

*Rezultanta proizvoljnog sistema sila u prostoru, koje imaju zajedničku napadnu tačku, deluje u toj tački i jednaka je vektorskom zbiru datih sila.*

Na Slici 4.8 a) je prikazano slaganje tri sile koje ne leže u istoj ravni postupnom primenom pravila paralelograma, a na Slici 4.8 b) postupnom primenom pravila trougla sila, kao što je opisano u prethodnom izlaganju.

$$\vec{R} = \vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i .$$

Na osnovu Slike 4.8 može se zaključiti da: *rezultanta  $\vec{R}$  prostornog sistema sučeonih sila,  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  predstavlja glavnu – telesnu dijagonalu paralelopipeda čije su ivice date sile.*

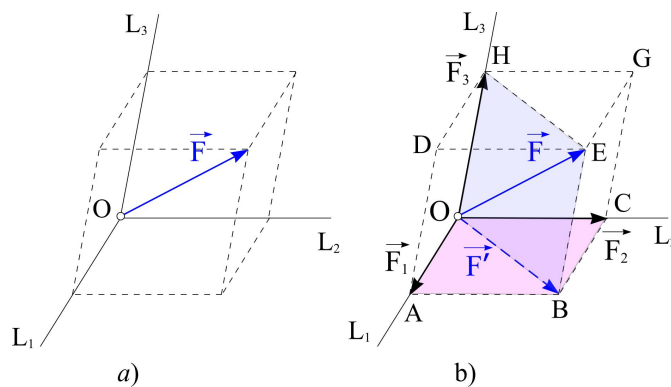


Slika 4.8 Slaganje tri sučeonice sile u prostoru a) paralelogrami sila; b) trouglovi sila, prostorni poligon  $Oabc$ .

### 4.1.5 Razlaganje sile na tri pravca koji ne leže u istoj ravni

Razlaganje sile na tri pravca  $L_1, L_2$  i  $L_3$ , koji ne leže u istoj ravni geometrijskim postupkom pokazano je na Slici 4.9. Sila može prvo primenom pravila paralelograma da se razloži na komponentu  $\vec{F}'$  koja leži u ravni  $OABC$  i komponentu  $\vec{F}_3$  na pravoj  $L_3$ , a zatim se komponenta  $\vec{F}'$ , takođe primenom pravila paralelograma, razlaže na komponente  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  u pravcima  $L_1$  i  $L_2$ :

$$\vec{F} = \vec{F}' + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 . \tag{4.14}$$



Slika 4.9 Razlaganje sile na tri pravca koji ne leže u istoj ravni

## VAŽNE NAPOMENE

- Rezultanta dve sile koje deluju na telo u istoj napadnoj tački (ili duž linija koje se seku) jednaka je vektorskom – geometrijskom zbiru sila. Napadna tačka rezultante je u istoj tački
- Rezultanta proizvoljnog broja sučeonih sila jednaka je njihovom vektorskom zbiru sa napadnom tačkom u tački preseka napadnih linija sila
- Rezultanta proizvoljnog sistema sila u prostoru, koje imaju zajedničku napadnu tačku, deluje u toj tački i jednaka je vektorskom zbiru datih sila
- Rezultanta sistema sučeonih sila geometrijski je određena završnom stranom poligona konstruisanog od vektora koji u razmeri predstavljaju date sile
- Rezultanta tri sile koje ne leže u istoj ravni predstavlja dijagonalu paralelopipeda, koji je konstruisan nad tim silama

## 4.2 Slaganje sistema sučeonih sila – analitički postupak

Slaganje više od dve sile primenom pravila paralelograma sila, tj. poligona sila, često zahteva mnogo geometrijskog i trigonometrijskog računanja kako bi se odredio intenzitet i pravac rezultante. Pri formiranju poligona sila potrebno je konstruisati orijentisane duži u odgovarajućoj razmeri, prenositi ih, nadovezivati itd. što predstavlja prilično nepraktičan postupak, naročito u slučaju prostornog sistema sila. Ovakvi problemi se jednostavnije rešavaju korišćenjem analitičkog postupka, o čemu će biti reči u ovom poglavlju.

### 4.2.1 Projekcija sile na osu i ravan

Primena analitičke metode za rešavanje zadataka statike zasniva se na pojmu *projekcije sile na osu*.

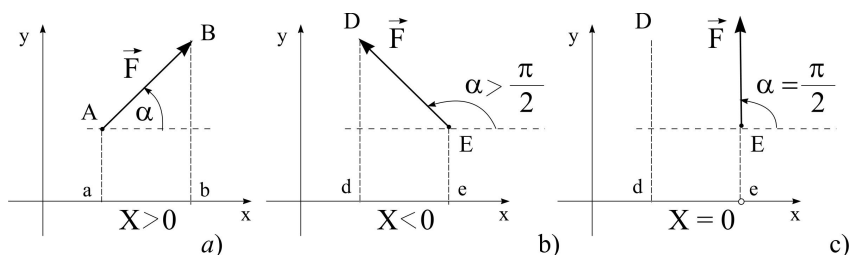
*Projekcija sile na osu je skalarna veličina jednaka proizvodu intenziteta sile i kosinusa ugla između pravca sile i pozitivnog smera ose* (videti poglavlje 2.3.3 – primena skalarnog proizvoda u mehanici).

Ako se projekcija sile  $\vec{F}$  na osu  $x$  označi velikim slovom, kojim je obeležena osa, tada je projekcija sile  $\vec{F}$  na osu  $x$ , Slika 4.10 a):

$$X = F \cos \alpha, \quad (4.15)$$

dok je projekcija sile  $\vec{F}_1$  na osu  $x$ , Slika 4.10 b):

$$X = F \cos \alpha = -F \cos(180^\circ - \alpha). \quad (4.16)$$



Slika 4.10 Projekcija sile na osu

Kao što se sa Slike 4.10 vidi, projekcija sile na osu je pozitivna ako je ugao između pravca sile i pozitivnog smera ose oštar, a negativna ako je ugao tup. Projekcija sile na osu je jednaka nuli ako je sila upravna na osu, Slika 4.10 c). Ugao se meri u odnosu na pozitivan smer ose.

Projekcija sile na osu jednaka je dužini odsečka između projekcije početka (tačka A, tačka E) vektora sile na osu i projekcije kraja vektora sile na osu (tačka B, tačka D), koji se uzima sa odgovarajućim znakom:

$$X = \overline{ab}, \quad X = -\overline{de}, \quad X = 0. \quad (4.17)$$

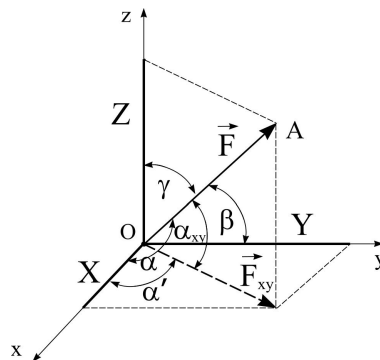
Projekcija sile  $\vec{F}$  na ravan  $Oxy$  je vektor  $\vec{F}_{xy}$ , koji se nalazi između projekcija početka i vrha sile  $\vec{F}$  na tu ravan, Slika 4.11. Za razliku od projekcije sile na osu, projekcija sile na ravan je vektor, jer ona nije okarakterisana samo svojom broječanom vrednošću, već i pravcem i smerom u ravni  $xOy$ . Intenzitet ove projekcije je:

$$F_{xy} = F \cos \alpha_{xy}, \quad (4.18)$$

gde je  $\alpha_{xy}$  ugao između pravca sile  $\vec{F}$  i ravni  $xOy$ .

U nekim slučajevima, kada treba odrediti projekciju sile na osu, pogodno je prvo odrediti projekciju sile na ravan u kojoj se nalazi osa, a zatim nju projektovati na datu osu. U slučaju prikazanom na Slici 4.11 bilo bi:

$$\begin{aligned} X &= F_{xy} \cos \alpha' = F \cos \alpha_{xy} \cos \alpha', \\ Y &= F_{xy} \sin \alpha' = F \cos \alpha_{xy} \sin \alpha'. \end{aligned} \quad (4.19)$$



Slika 4.11 Projekcija sile na ravan

U statiki se najčešće koriste projekcije sile na ose Dekartovog koordinatnog sistema  $Oxyz$ . Ako su uglovi između sile  $\vec{F}$  i osa  $x$ ,  $y$  i  $z$  jednaki  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ , kao na Slici 4.11, onda su projekcije  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  jednake:

$$X = F \cos \alpha, \quad Y = F \cos \beta, \quad Z = F \cos \gamma. \quad (4.20)$$

## 4.2.2 Analitički način definisanja sile

Za analitički način definisanja sile treba izabrati koordinatni sistem. Obično se koristi Dekartov koordinatni sistem  $Oxyz$  desne orijentacije, Slika 4.12 a). To je sistem kod koga će doći do poklapanja ose  $x$  najkraćim putem sa osom  $y$ , ako se osa  $x$  okreće u smeru suprotnom od smera kazaljke na satu, posmatrajući to obrtanje iz pozitivnog smera ose  $z$ .

Vektor  $\vec{F}$  koji predstavlja silu može se prikazati u analitičkom obliku, ako je poznat intenzitet sile  $F$  i njen pravac, odnosno uglovi  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  koje sila zaklapa sa koordinatnim osama. Veličine  $F$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  potpuno određuju datu silu  $\vec{F}$ .

Sila  $\vec{F}$  je u potpunosti određena ako su poznate njene projekcije  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  na ose pravouglog Dekartovog koordinatnog sistema, koje su date izrazima (4.20):

$$X = F \cos \alpha, \quad Y = F \cos \beta, \quad Z = F \cos \gamma.$$

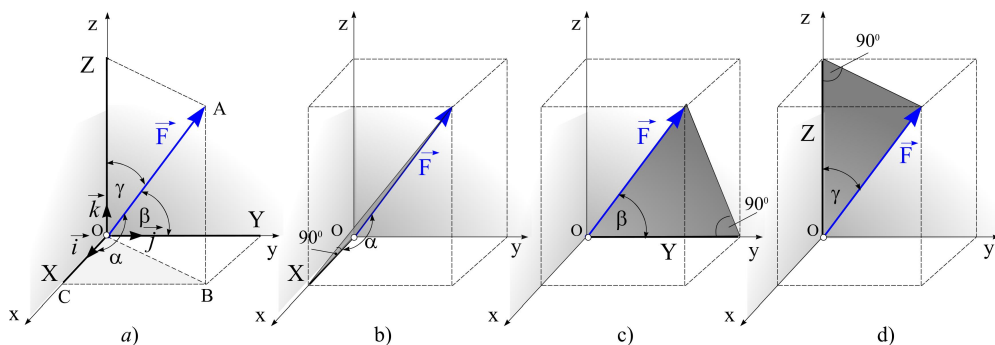
S druge strane, ako su poznate projekcije sile  $X$ ,  $Y$  i  $Z$ , onda se intenzitet sile određuje primenom Pitagorine teoreme na trouglove OBC i OAB, Slika 4.12 a):

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (4.21)$$

Intenzitet sile  $\vec{F}$  je jednak dijagonali paralelopipeda čije su ivice projekcije  $X$ ,  $Y$  i  $Z$ , a njen pravac je definisan kosinusima uglova koje ona zaklapa sa osama, koji su na osnovu (4.15), odnosno (4.20) i Slike 4.12:

$$\cos \alpha = \frac{X}{F}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{F}. \quad (4.22)$$

Ako su poznate projekcije sile na koordinatne ose, na osnovu poslednja dva izraza moguće je odrediti intenzitet sile i uglove koje ona gradi sa koordinatnim osama.



Slika 4.12 Analitički način definisanja sile u protoru – projekcije sile na ose Dekartovog koordinatnog sistema

Iz (4.21) i (4.22) sledi relacija između kosinusa uglova  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ :

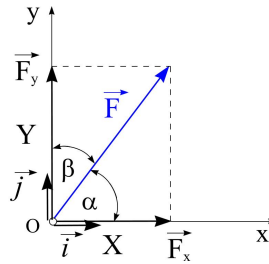
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (4.23)$$

Ako se sila  $\vec{F}$  razloži u pravce koji su paralelni pravcima koordinatnih osa, dobiće se komponente  $\vec{F}_x$ ,  $\vec{F}_y$  i  $\vec{F}_z$ , koje su brojno jednake projekcijama sile na koordinatne ose. Odavde sledi da vektor sile može da se konstruiše i geometrijskim putem koristeći pravilo paralelopipeda ako su poznate komponente, odnosno projekcije:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}. \quad (4.24)$$

Sila koja leži u ravni može da se definiše njenim projekcijama na ose  $x$  i  $y$ . Izrazi kojima je sila potpuno definisana preko projekcija glase:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \cos \alpha = \frac{X}{F}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{F}. \quad (4.25)$$



Slika 4.21 Analitički način definisanja sile u ravni – projekcije sile na ose Dekartovog koordinatnog sistema

Vektor sile u ravni glasi:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = X\vec{i} + Y\vec{j}. \quad (4.26)$$

### VAŽNE NAPOMENE

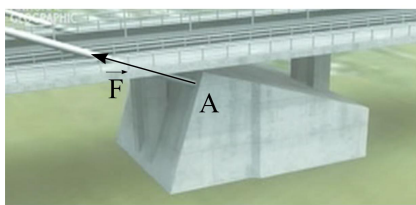
Sila je potpuno definisana (pravac, smer, intenzitet) ako su poznate njene projekcije na tri međusobno upravne ose izabranog koordinatnog sistema

Umesto da se konstruišu orijentisane duži – vektori da bi se predstavila sila, mogu se koristiti projekcije na ose izabranog koordinatnog sistema koje su jednake proizvodu intenziteta sile i kosinusa ugla između ose i sile, što predstavlja analitički način definisanja sile

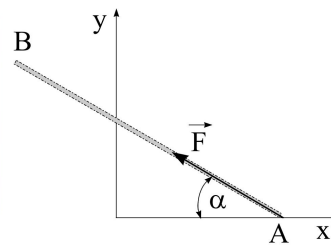
### Primeri određivanja projekcija sile u ravni

#### Primer 4.5

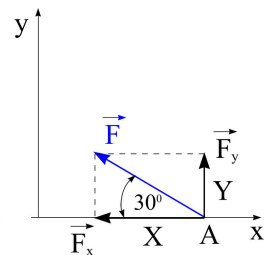
Kabl AB je napregnut silom  $\vec{F}$  intenziteta 400 kN, Slika P 4.5. Kabl je pod uglom od  $30^\circ$  u odnosu na horizontalu. Odrediti projekcije sile i izraziti vektor sile preko njenih komponenta.



a)



b)



c)

Slika P 4.5 a) Detalj mosta sa kablom; b) sila u kablju; c) sila i projekcije sile.

Sila  $\vec{F}$  izražena preko komponenta, izraz (4.26) je:  $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ , gde su X i Y projekcije sile, koje su na osnovu izraza (4.15):

$$X = -F \cos 30^\circ = -400 \frac{\sqrt{3}}{2} = -346 \text{ kN}, \quad Y = F \sin 30^\circ = 400 \frac{1}{2} = 200 \text{ kN}.$$

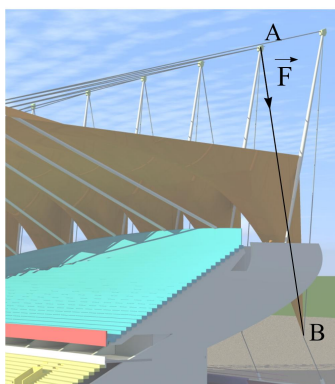
Komponente vektora su:

$$\vec{F}_x = X\vec{i}, \quad \vec{F}_y = Y\vec{j},$$

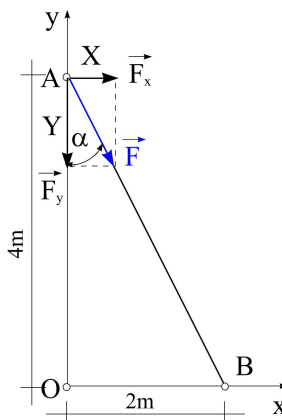
pa vektor sile  $\vec{F}$  glasi:  $\vec{F} = -346\vec{i} + 200\vec{j}$  (kN).

## Primer 4.6

Kabl AB je zategnut silom  $\vec{F}$  intenziteta 500 N, Slika P 4.6 a). Pravac kabla je definisan geometrijom, Slika P 4.6 b). Odrediti projekcije date sile i izraziti je vektorski.



a)



b)

Slika P 4.6 a) Sila u kablju; b) vektor sile i njegove projekcije.

Na osnovu pravouglog trougla OAB može se odrediti ugao  $\alpha$  između napadne linije sile  $\vec{F}$  i y ose:

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = 0,894 \Rightarrow \alpha = 26,6^\circ, \quad \sin \alpha = 0,447.$$

Projekcije sile na x i y pravac, odnosno intenziteti komponenta vektora su:

$$X = F \sin \alpha = 500 \cdot 0,448 = 223,5 \text{ N},$$

$$Y = -F \cos \alpha = -500 \cdot 0,894 = -447 \text{ N}.$$

Komponente vektora  $\vec{F}$  su:

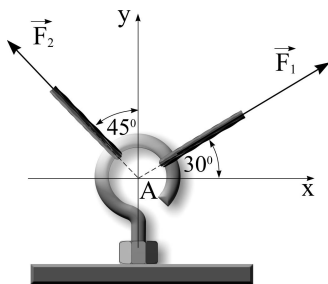
$$\vec{F}_x = F_x \vec{i} = 223,5 \vec{i},$$

$$\vec{F}_y = F_y \vec{j} = -447 \vec{j},$$

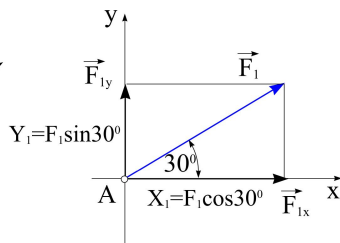
pa je vektor sile:  $\vec{F} = 223,5 \vec{i} - 447 \vec{j}$  (N).

## Primer 4.7

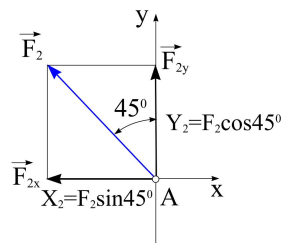
Odrediti projekcije sila  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  koje deluju u kablovima, Slika P 4.7, na pravce x i y i predstaviti ih vektorski. Intenziteti sila su 10 kN i 8 kN.



a)



b)



c)

Slika P 4.7 a) Sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ ; b) projekcije sile  $\vec{F}_1$ ; c) projekcije sile  $\vec{F}_2$ .

Projekcija sile na osu jednaka je proizvodu sile i kosinusa ugla (ili sinusa komplementarnog ugla) koji sila zaklapa sa osom. Projekcije sile  $\vec{F}_1$ , Slika P 4.7 a), su:

$$X_1 = F_1 \cos 30^\circ = 10 \frac{\sqrt{3}}{2} = 8,66 \text{ kN}, \quad Y_1 = F_1 \sin 30^\circ = 10 \frac{1}{2} = 5 \text{ kN},$$

a projekcije sile  $\vec{F}_2$ , Slika P 4.1 c), su:

$$X_2 = -F_2 \sin 45^\circ = -8 \frac{\sqrt{2}}{2} = -5,657 \text{ kN}, \quad Y_2 = F_2 \cos 45^\circ = 8 \frac{\sqrt{2}}{2} = 5,657 \text{ kN}.$$

Komponente sile  $\vec{F}_1$  su:  $\vec{F}_{1x} = X_1 \vec{i} = 8,66 \vec{i}$  (kN),  $\vec{F}_{1y} = Y_1 \vec{j} = 5 \vec{j}$  (kN), pa vektor sile  $\vec{F}_1$  glasi:

$$\vec{F}_1 = 8,66 \vec{i} + 5 \vec{j} \text{ (kN)}.$$

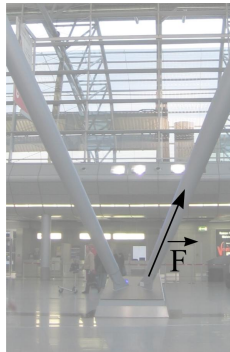
Komponente sile  $\vec{F}_2$  su:  $\vec{F}_{2x} = X_2 \vec{i} = -5,657 \vec{i}$  (kN),  $\vec{F}_{2y} = Y_2 \vec{j} = 5,657 \vec{j}$  (kN).

Vektor sile  $\vec{F}_2$  glasi:  $\vec{F}_2 = -5,657 \vec{i} + 5,657 \vec{j}$  (kN).

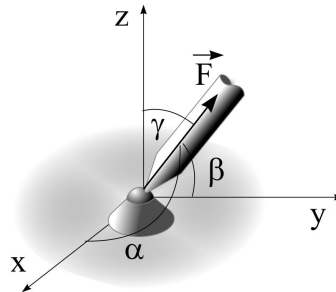
### Primeri odredivanja projekcija sile u prostoru

#### Primer 4.8

Štap prikazan na Slici P 4.8 napregnut je silom  $F = 40$  kN. Vektor sile izraziti preko njegovih komponentata, ako je poznato da je ugao koji vektor zaklapa sa y osom  $\beta = 45^\circ$ , a sa z osom  $\gamma = 60^\circ$ .



a)



b)

Slika P 4.8 a) Sila u štapu; b) vektor sile.

Pošto su poznati samo uglovi koje vektor zaklapa sa pozitivno orijentisanim osama y i z, ugao koji zaklapa sa osom x se određuje primenom relacije (4.23):

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ = 1,$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ} = \sqrt{1 - (0,707)^2 - (0,5)^2} = \pm 0,5.$$

Dobijena su dva rešenja od kojih je samo jedno realno. Ugao je ili  $\alpha = \arccos(+0,5) = 60^\circ$  ili  $\alpha = \arccos(-0,5) = -60^\circ = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ . Kako su projekcije sile na ose y i z pozitivne, jer su uglovi  $\beta$  i  $\gamma$  oštri (poglavlje 4.2.1), na osnovu



Slike P 4.8 se može zaključiti da je projekcija sile na osu x negativna, tj. da se sila nalazi u drugom oktantu, a to znači da je realno rešenje  $\alpha = 120^\circ$  (ugao se meri u odnosu na pozitivan smer ose).

Projekcije sile  $\vec{F}$  su primenom izraza (4.20):

$$X = F \cos \alpha = F \cos 120^\circ = 40(-0,5) = -20 \text{ kN},$$

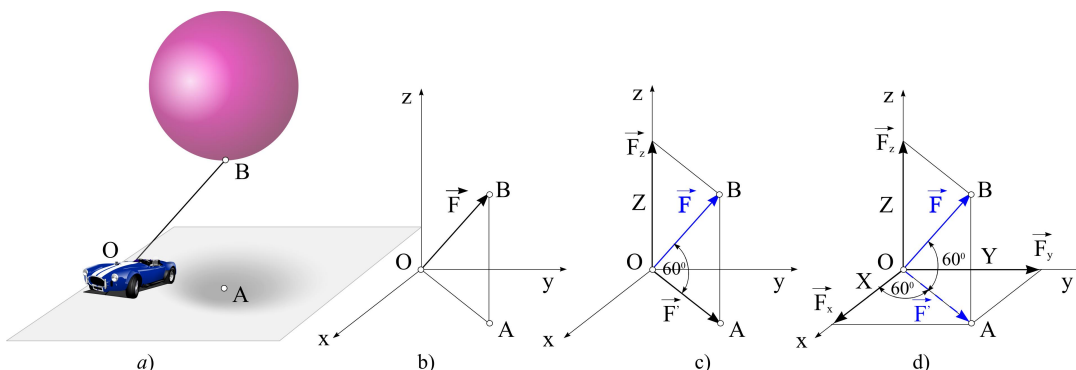
$$Y = F \cos \beta = F \cos 45^\circ = 40 \frac{\sqrt{2}}{2} = 28,28 \text{ kN},$$

$$Z = F \cos \gamma = F \cos 60^\circ = 40 \frac{\sqrt{3}}{2} = 34,64 \text{ kN}.$$

Sila  $\vec{F}$  izražena vektorski glasi:  $\vec{F} = -20\vec{i} + 28,28\vec{j} + 34,64\vec{k}$  (kN).

#### Primer 4.9

Uže prikazano na Slici P 4.9 a) drži balon. Sila u užetu je 700 N. Projekcija tačke B na horizontalnu ravan xOy je u tački A, Slika P 4.9 b). Ako je ugao između OA i x ose  $60^\circ$ , a između OA i vektora  $\vec{F}$  takođe  $60^\circ$ , odrediti projekcije sile na ose x, y i z i predstaviti silu preko njenih komponentata.



Slika P 4.9 a) Uže; b) sila u užetu; c) projektovanje sile na ravan xOy i osu z; d) projektovanje komponente  $\vec{F}'$  na x i y osu.

Vektor  $\vec{F}$  se može prvo projektovati na ravan xOy i osu z, čime se dobija vektor  $\vec{F}'$  i projekcija Z, Slika P 4.9 c), (videti poglavlje 4.2.1, Slika 4.11, izrazi (4.18) i (4.19)):

$$F' = F \cos 60^\circ = 700 \frac{1}{2} = 350 \text{ N}, \quad Z = F \sin 60^\circ = 700 \frac{\sqrt{3}}{2} = 606,22 \text{ N},$$

a zatim vektor  $\vec{F}'$  projektovati na ose x i y, Slika P 4.9 d):

$$X = F' \cos 60^\circ = 350 \frac{1}{2} = 175 \text{ N}, \quad Y = F' \sin 60^\circ = 350 \frac{\sqrt{3}}{2} = 303,11 \text{ N}.$$

Projekcije vektora  $\vec{F}$  su pozitivne, pa su komponente vektora u smeru pozitivnih osa, a vektor  $\vec{F}$  glasi:  $\vec{F} = 175\vec{i} + 303,11\vec{j} + 606,22\vec{k}$  (N).

### 4.2.3 Projekcija zbiru vektora na osu

Analitički naèin odredivanja rezultante sistema sušeeonih sila svodi se na primenu metode projekcije sile na osu i poznate teoreme vektorske algebre o projekciji rezultante vektora na osu.

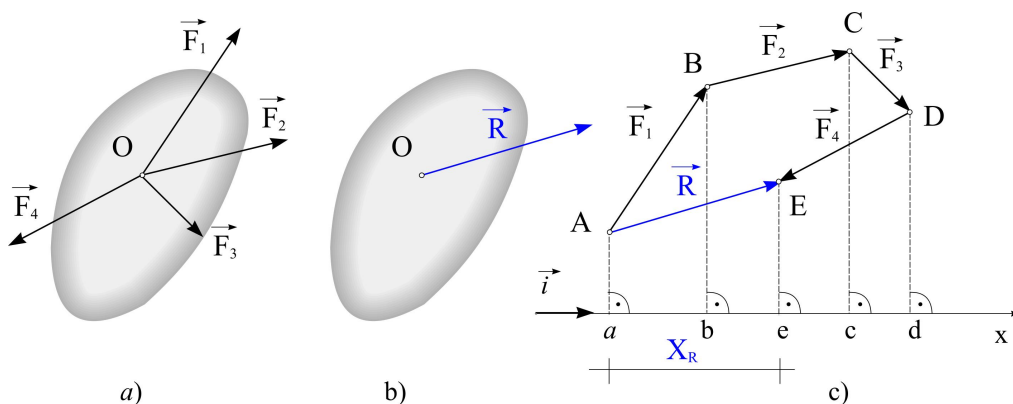
**Teorema:** *Projekcija rezultante više vektora na neku osu jednaka je algebarskom zbiru projekcija komponentnih vektora na tu istu osu tj. projekcija zbiru vektora jednaka je algebarskom zbiru projekcija komponentnih vektora.*

Neka na telo deluje sistem sušeeonih sila  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  i  $\vec{F}_4$ , Slika 4.22 a), èija je rezultanta  $\vec{R}$ , Slika 4.22 b):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4, \quad (4.27)$$

određena završnom stranom poligona sila ABCDE, Slika 4.22 c), (postupak opisan u poglavlju 4.1.3). Ako je  $u_F$  usvojena razmera za sile, rezultanta je:

$$\vec{R} = u_F \vec{AE}. \quad (4.28)$$



Slika 4.22 a) Sistem sušeeonih sila; b) rezultanta sistema sušeeonih sila; c) projekcija vektorskog zbiru na osu.

Projekcije pojedinih sila na osu x su:

$$X_1 = u_F \overline{ab}, \quad X_2 = u_F \overline{bc}, \quad X_3 = u_F \overline{cd}, \quad X_4 = -u_F \overline{de}, \quad (4.29)$$

a projekcija rezultante  $\vec{R}$  na osu x je:

$$X_R = u_F \overline{ae}. \quad (4.30)$$

Ako se saberu sve projekcije, dobija se:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = u_F (\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} - \overline{de}). \quad (4.31)$$

Sa Slike 4.22 c) je oèigledno da se sabiranjem duži na osi x dobija:

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} - \overline{de} = \overline{ae}, \quad (4.32)$$

pa se zamenom (4.32) u (4.31), imajući u vidu izraz (4.30) dobija:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = u_F \overline{ae} = X_R, \quad (4.33)$$

èime je teorema dokazana.

U opštem sluèaju, projekcija rezultante sistema od n sila na osu x je:

$$X_R = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i. \quad (4.34)$$

U poglavlju 2.3.3 (primena skalarnog proizvoda u mehanici) je pokazano da je projekcija nekog vektora na osu, definisanu jediničnim vektorom, jednaka skalarnom proizvodu vektora i orta ose. Na primer, ako je vektor sila  $\vec{F}$ , a ort x ose vektor  $\vec{i}$ , onda je:

$$X = \vec{F} \cdot \vec{i} = F \cos \alpha. \quad (4.35)$$

Skalarnim množenjem jednačina  $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  sa ortom  $\vec{i}$ , dobija se jednačina (4.34):

$$\vec{R} \cdot \vec{i} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{i},$$

$$X_R = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i.$$

#### 4.2.4 Analitički način određivanja rezultante prostornog i ravnog sistema sučeonih sila

Da bi se analitičkim postupkom odredio intenzitet, pravac i smer rezultante jednog sistema sila, potrebno je odrediti projekcije svih sila na ose odabranog referentnog koordinatnog sistema  $Oxyz$ . Zbog toga svaka sila sistema treba da bude tačno definisana u odnosu na koordinatni sistem, tj. treba da budu poznati intenziteti svih sila sistema, kao i uglovi koje one zaklapaju sa koordinatnim osama.

Ako su sile definisane analitički – svojim projekcijama na koordinatne ose, glavni vektor, odnosno rezultanta se može odrediti primenom teoreme o projekciji vektorskog zbira na osu, jednačina (4.34):

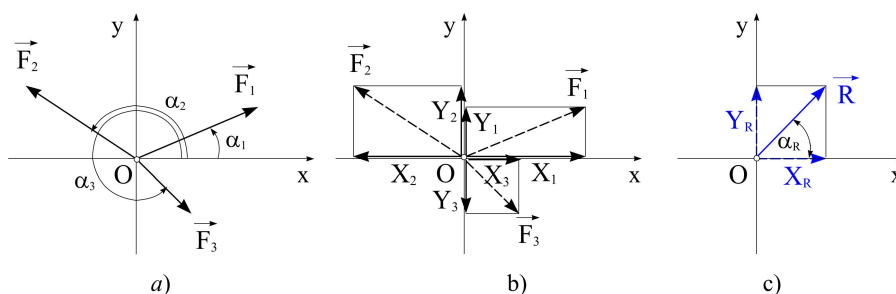
$$X_R = \sum X_i, \quad Y_R = \sum Y_i, \quad Z_R = \sum Z_i. \quad (4.36)$$

Kad su određene projekcije rezultante na koordinatne ose, onda je na osnovu (4.21) i (4.22):

$$R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2}, \quad \cos \alpha_R = \frac{X_R}{R}, \quad \cos \beta_R = \frac{Y_R}{R}, \quad \cos \gamma_R = \frac{Z_R}{R}, \quad (4.37)$$

čime je određen intenzitet i pravac rezultante sistema sučeonih sila. Ove formule omogućavaju da se reši problem slaganja sila analitičkim putem.

Ako su sile definisane svojim intenzitetima i uglovima koje zaklapaju sa koordinatnim osama, Slika 4.23 a), onda, da bi se odredila rezultanta sistema sučeonih sila u ravni analitičkim putem, treba prvo odrediti projekcije tih sila na ose  $x$  i  $y$ , Slika 4.23 b).



Slika 4.23 a) Sistem sučeonih sila u ravni; b) sile i projekcije sila na ose  $x$  i  $y$ ; c) projekcije rezultante i rezultanta datog sistema sila.

Algebarski zbir projekcija sila na osu jednak je projekciji rezultante na tu osu, Slika 4.23 c). Izrazi (4.36) i (4.37) glase:

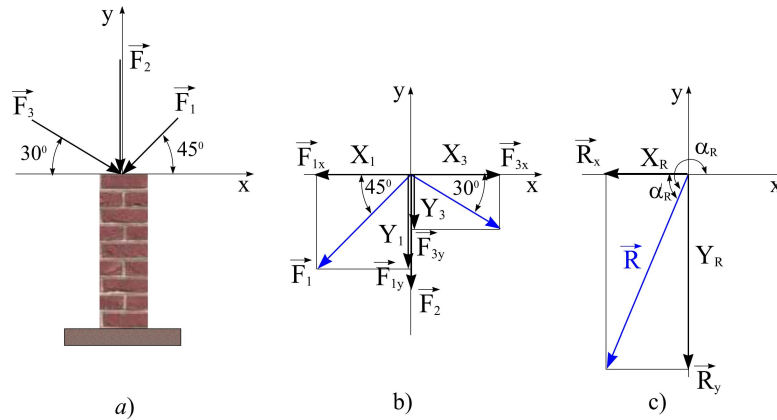
$$X_R = \sum X_i, \quad Y_R = \sum Y_i, \quad (4.38)$$

$$R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2}, \quad \cos \alpha_R = \frac{X_R}{R}, \quad \cos \beta_R = \frac{Y_R}{R}. \quad (4.39)$$

### Primeri određivanja rezultante sušconih sila u ravni analitičkim postupkom

#### Primer 4.10

Stub je opterećen silama intenziteta  $F_1=8$  kN,  $F_2=10$  kN i  $F_3=4$  kN, Slika P 4.10 a). Odrediti intenzitet i pravac rezultante datog sistema sušconih sila.



Slika P 4.10 a) Stub opterećen silama; b) projekcije sila na ose x i y; c) projekcije rezultante.

Projekcije sila na x i y ose prikazane su na Slici P 4.10 b). Projekcije rezultante na x i y osu su:

$$X_R = \sum X_i = -F_1 \cos 45^\circ + F_3 \cos 30^\circ = -8 \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \frac{\sqrt{3}}{2} = -5,657 + 2,165 = -3,492 \text{ kN},$$

$$Y_R = \sum Y_i = -F_1 \sin 45^\circ - F_2 - F_3 \sin 30^\circ = -8 \frac{1}{2} - 10 - 4 \frac{1}{2} = -16 \text{ kN}.$$

Komponente rezultante  $\vec{R}_x$  i  $\vec{R}_y$  su u pravcu negativnih osa x i y, Slika P 4.10 c). Vektor rezultante glasi:

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y = X_R \vec{i} + Y_R \vec{j} = -3,492 \vec{i} - 16 \vec{j} \text{ (kN)}.$$

Intenzitet rezultante je:

$$R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2} = \sqrt{(-3,492)^2 + (-16)^2} = 16,377 \text{ kN}.$$

Pravac rezultante je definisan uglom  $\alpha_R'$ , odnosno  $\alpha_R = \alpha_R' + 180^\circ$ , Slika P 4.10 c), koji može da se odredi primenom (4.39):

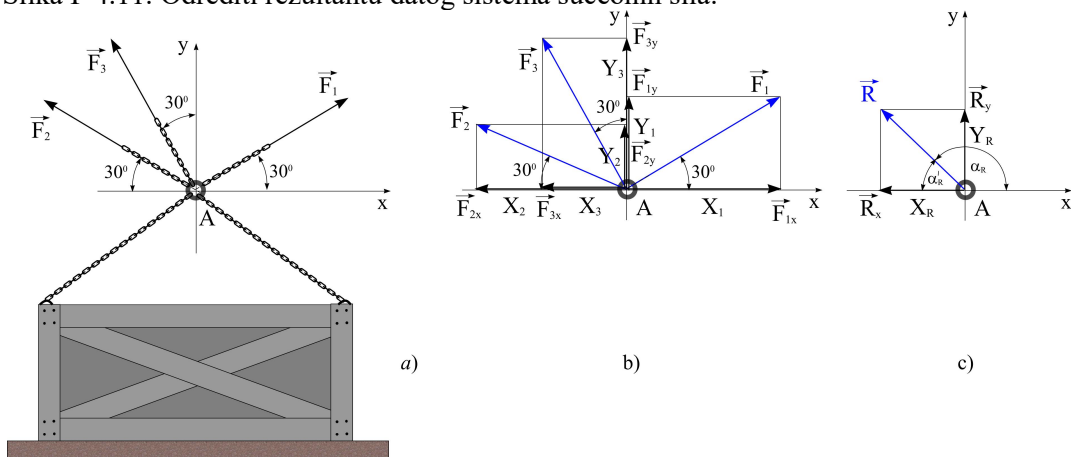
$$\cos \alpha_R' = \frac{X_R}{R}, \quad \cos \beta_R' = \frac{Y_R}{R}, \text{ ili}$$

$$\text{tg } \alpha_R' = \frac{Y_R}{X_R} = \left| \frac{16}{3,492} \right| = 4,5819,$$

$$\alpha_R' = \text{arc tg } 4,5819 = 77,688^\circ \Rightarrow \alpha_R = 180^\circ + 77,688^\circ = 257^\circ 39' 26''.$$

## Primer 4.11

Kran podiže sanduk lancima u kojima su sile  $F_1=200$  N,  $F_2=300$  N i  $F_3=400$  N, Slika P 4.11. Odrediti rezultantu datog sistema sučeonih sila.



Slika P 4.11 a) Sistem sučeonih sila; b) projekcije sila na ose x i y; c) rezultanta i projekcije rezultante.

Projekcije rezultante na ose x i y su:

$$X_R = \sum X_i = F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 30^\circ - F_3 \sin 30^\circ = 200 \frac{\sqrt{3}}{2} - 300 \frac{\sqrt{3}}{2} - 400 \frac{1}{2} = -286,60 \text{ N},$$

$$Y_R = \sum Y_i = F_1 \sin 30^\circ + F_2 \sin 30^\circ + F_3 \cos 30^\circ = 696,41 \text{ N}.$$

Intenzitet i pravac rezultante su:

$$R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2} = \sqrt{(-286,60)^2 + (696,41)^2} = 753,078 \text{ N},$$

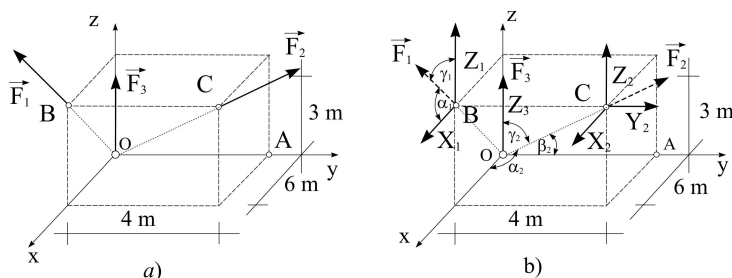
$$\operatorname{tg} \alpha'_R = \frac{Y_R}{X_R} = \left| \frac{696,41}{286,60} \right| = 2,4299,$$

$$\alpha'_R = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2,4299 = 67,60^\circ \Rightarrow \alpha_R = 180^\circ - 67,60^\circ = 112^\circ 22' 42''.$$

### Primer određivanja rezultante sučeonih sila u prostoru analitičkim postupkom

## Primer 4.12

Odrediti rezultantu datog sistema sučeonih sila. Intenziteti sila su:  $F_1 = 5$  kN,  $F_2 = 15$  kN i  $F_3 = 7$  kN.



Slika P 4.12 a) Sistem sučeonih sila; b) projekcije sila na ose x, y i z.

Pravci sila  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  i  $\vec{F}_3$  mogu se odrediti na osnovu Slike 4.12 b). Sila  $\vec{F}_1$  je u pravcu dijagonale bočne strane  $\overline{OB}$  paralelopipeda, u ravni xOz, sila  $\vec{F}_2$  je prostorna, u pravcu telesne dijagonale  $\overline{OC}$  paralelopipeda, a sila  $\vec{F}_3$  je u pravcu ose z.

Pravci sila  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  su:

$$\overline{OB} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 6,708 \text{ m}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{6}{\sqrt{45}} = 0,8944, \quad \sin \alpha_1 = \frac{3}{\sqrt{45}} = 0,4472,$$

$$\overline{OC} = \sqrt{6^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{61} \text{ m}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{6}{\sqrt{61}} = 0,7682, \quad \cos \beta_2 = \frac{4}{\sqrt{61}} = 0,5121,$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{3}{\sqrt{61}} = 0,3841.$$

Projekcije sila  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  i  $\vec{F}_3$  na ose x, y i z su respektivno:

$$X_1 = F_1 \cos \alpha_1 = 5 \frac{6}{\sqrt{45}} = 4,47 \text{ kN}, \quad Y_1 = 0, \quad Z_1 = F_1 \sin \alpha_1 = 5 \frac{3}{\sqrt{45}} = 2,23 \text{ kN},$$

$$X_2 = F_2 \cos \alpha_2 = 11,52 \text{ kN}, \quad Y_2 = F_2 \cos \beta_2 = 7,68 \text{ kN}, \quad Z_2 = F_2 \cos \gamma_2 = 5,76 \text{ kN},$$

$$X_3 = 0, \quad Y_3 = 0, \quad Z_3 = 7 \text{ kN}.$$

Projekcije rezultante su:

$$X_R = \sum_{i=1}^3 X_i = X_1 + X_2 + X_3 = 4,47 + 11,52 + 0 = 15,99 \text{ kN},$$

$$Y_R = \sum_{i=1}^3 Y_i = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0 + 7,68 + 0 = 7,68 \text{ kN},$$

$$Z_R = \sum_{i=1}^3 Z_i = Z_1 + Z_2 + Z_3 = 2,23 + 5,76 + 7,00 = 14,99 \text{ kN},$$

pa je intenzitet rezultante:

$$R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2} = \sqrt{15,99^2 + 7,68^2 + 14,99^2} = 23,22 \text{ kN},$$

a uglovi koje ona zaklapa sa koordinatnim osama su:

$$\cos \alpha_R = \frac{X_R}{R} = \frac{15,99}{23,22} = 0,68875,$$

$$\cos \beta_R = \frac{Y_R}{R} = \frac{7,68}{23,22} = 0,3307,$$

$$\cos \gamma_R = \frac{Z_R}{R} = \frac{14,99}{23,22} = 0,6455.$$

### 4.3. Ravnoteža sistema sušeeonih sila

Potreban i dovoljan uslov ravnoteže sistema sušeeonih sila koje deluju na kruto telo je da je rezultanta tih sila (glavni vektor) jednaka nuli. Ako na telo deluje sistem sila  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , telo će biti u ravnoteži ako je zadovoljena vektorska jednačina:

$$\vec{R}' = \vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0. \quad (4.40)$$

Jednačina (4.40) predstavlja *vektorski uslov ravnoteže* sistema sučeonih sila.

Uslovi koje treba da zadovolje sile da bi bile u ravnoteži mogu da se izraze u geometrijskom i u analitičkom obliku.

### 4.3.1 Geometrijski uslov ravnoteže sistema sučeonih sila

Kako se rezultanta sistema sučeonih sila  $\vec{R}$  određuje postupnom primenom pravila paralelograma, ili kao završna strana poligona konstruisanog od tih sila, to rezultanta  $\vec{R}$  može da bude jednaka nuli samo kada se vrh poslednje sile u poligonu sila poklapa sa početkom prve sile, tj. kada je poligon sila zatvoren, Slika 4.24 b).

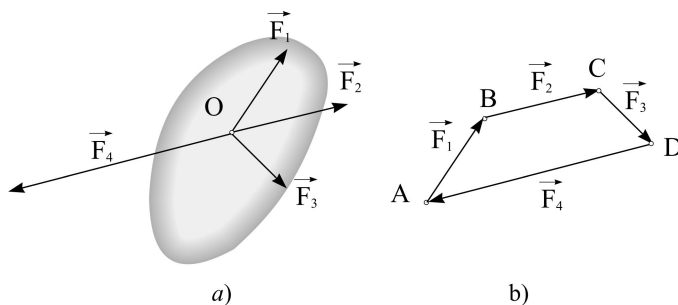
*Sistem sučeonih sila je u ravnoteži ako je poligon sila zatvoren.*

### 4.3.2 Analitički uslovi ravnoteže sistema sučeonih sila

Da bi rezultanta bila jednaka nuli, tj. da bi bila zadovoljena jednačina (4.40), moraju da budu sve tri projekcije rezultante na ose izabranog koordinatnog sistema jednake nuli. Na osnovu izraza (4.36) sledi:

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0. \quad (4.41)$$

Ovo su analitički uslovi ravnoteže prostornog sistema sučeonih sila. Očigledno je da je u slučaju prostornog sistema sučeonih sila potrebno da budu zadovoljena tri uslova ravnoteže: *algebarski zbir projekcija sila na svaku od osa Dekartovog koordinatnog sistema mora biti jednak nuli.*



Slika 4.24 a) Uravnotežen sistem sila; b) zatvoren poligon sila.

U slučaju sistema sučeonih sila u ravni, koordinatne ose se biraju tako da sile leže u jednoj koordinatnoj ravni. Ako je to ravan  $xOy$ , onda je svaka od projekcija sila na osu  $z$  jednaka nuli:

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = \dots = Z_n = 0, \quad (4.42)$$

pa je treća jednačina od jednačina (4.41) identički zadovoljena, bez obzira da li je sistem sila u ravnoteži ili ne. Kao uslovi ravnoteže ostaju jednačine:

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0. \quad (4.43)$$

Dakle, u slučaju sistema sučeonih sila u ravni potrebno je da budu zadovoljena dva uslova ravnoteže: *algebarski zbir projekcija sila na svaku od dve međusobno upravne ose u ravni dejstva sila mora biti jednak nuli.*

Jednačine (4.41) i (4.43) se nazivaju *jednačine ravnoteže* ili *uslovi ravnoteže* sistema sučeonih sila.

Slobodno kruto telo na koje deluje sistem sušeeonih sila koji zadovoljava uslove ravnoteže (4.41), odnosno (4.43), je u stanju mirovanja, tj. apsolutne ravnoteže (u statiki se isključuje mogućnost jednolikog pravolinijskog kretanja).

Ako na telo deluje sistem kolinearnih sila (sile imaju istu napadnu liniju), koordinatna osa se bira tako da bude paralelna silama, pa sledi da je za ravnotežu sistema kolinearnih sila koje su paralelne sa x osom potrebno da bude zadovoljen jedan uslov ravnoteže:

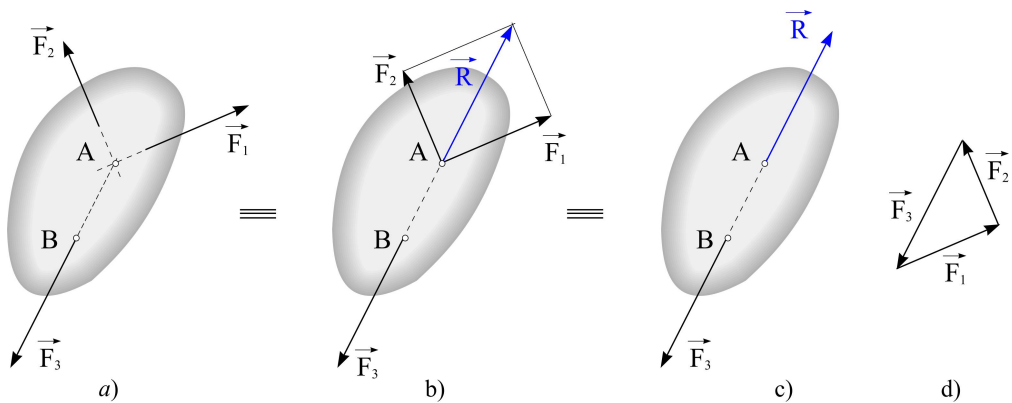
$$\sum X_i = 0, \text{ ili } \sum F_i = 0, \quad (4.44)$$

da je *algebarski zbir svih sila jednak nuli*.

### 4.3.3 Ravnoteža tri sile

Pri rešavanju zadataka statike ponekad je vrlo korisno da se upotrebi sledeća teorema:

*Ako se slobodno, kruto telo, nalazi u ravnoteži pod dejstvom tri neparalelne sile koje leže u istoj ravni, tada napadne linije tih sile moraju da se seku u jednoj tački.*



Slika 4.25 a) Sistem neparalelnih sila  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  i  $\vec{F}_3$  u ravni; b) dve sile zamenjene rezultantom; c) dejstvo dve sile  $\vec{R} = -\vec{F}_3$ ; d) zatvoren poligon sile.

Da bi se dokazala ova teorema treba, uočiti bilo koje dve od tri sile, na primer  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ . Kako prema uslovima ove teoreme sile leže u jednoj ravni i nisu paralelne, to će se njihove napadne linije seći u nekoj tački A, Slika 4.25 a). Sada sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  treba premestiti duž njihovih napadnih linija u tačku A i složiti ih u rezultantu  $\vec{R}$ , Slika 4.25 b):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (4.45)$$

Sada na telo deluju samo dve sile: sila  $\vec{R}$  i sila  $\vec{F}_3$  čija je napadna tačka B. Ako se telo pri tome nalazi u ravnoteži, onda na osnovu aksiome dva, sile  $\vec{R}$  i  $\vec{F}_3$  moraju biti na istoj napadnoj liniji (prava AB), Slika 4.25 c), istih intenziteta i suprotnih smerova, tj:

$$\vec{R} = -\vec{F}_3. \quad (4.46)$$

Ovo je moguće samo ako se presek napadnih linija sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  nalazi na napadnoj liniji sile  $\vec{F}_3$  i ako sila  $\vec{F}_3$  leži u ravni sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ , čime je teorema dokazana.

Prema tome, da bi kruto telo na koje deluju tri sile u ravni bilo u ravnoteži *napadne linije sile moraju da se seku u jednoj tački i poligon konstruisan od tih sile (trougao sile) mora da bude zatvoren*.



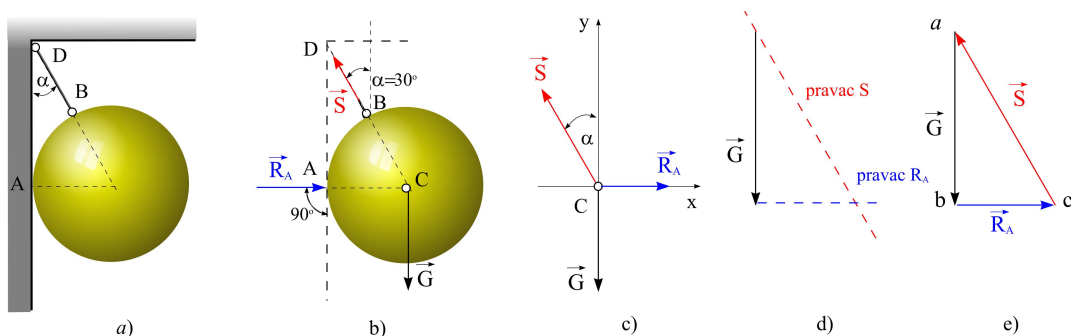
## Postupak rešavanja problema

- *Izbor tela čija se ravnoteža posmatra.* Izbor je obično uslovljen silama koje treba da se odrede
- *Oslobađanje tela od veza i prikazivanje bitnih dimenzija i uglova.* Crtež treba da bude precizan, ali se mogu izostaviti nebitni detalji
- *Crtnanje vektora koji predstavljaju sve spoljašnje sile koje deluju na telo i reakcije veza i njihovo označavanje.* Treba uključiti silu zemljine teže ako se namerno ne zanemaruje
- *Postavljanje koordinantnog sistema da bi se sile na dijagramu slobodnog tela izrazile preko projekcija*
- *Formiranje uslova ravnoteže.* Oblik uslova ravnoteže koji će se koristiti zavisi od toga kakav sistem sila deluje na telo i da li će se koristiti geometrijski ili analitički postupak
- U slučaju ravnog sistema sučeonih sila mogu se odrediti *najviše dve nepoznate reakcije veza analitičkim putem*, jednačine (4.43), dok se u slučaju sistema sučeonih sila u prostoru mogu odrediti *najviše tri nepoznate reakcije veza primenom analitičkog postupka*, jednačine (4.41)
- Rešavanje problema ravnoteže tela pod dejstvom ravnog sistema sučeonih sila *geometrijskim (vektorskim) postupkom* predstavlja konstrukciju trougla, tj. poligona sila. U slučaju ravnog sistema sila, sve spoljašnje sile se mogu zameniti njihovom rezultantom, pa tada na telo osim te rezultante mogu delovati još *najviše dve nepoznate sile koje se određuju iz uslova da trougao sila mora biti zatvoren.* Ako na neko telo deluje više sila koje leže u istoj ravni i sučeoane su onda te sile moraju da obrazuju zatvoreni poligon da bi telo bilo u ravnoteži
- *Određivanje nepoznatih veličina, provera ispravnosti rešenja i analiza dobijenih rezultata*

## Primer ravnoteže sučeonih sila u ravni – geometrijski postupak

### Primer 4.13

Homogena kugla težine  $G=10$  kN oslanja se u tački A na vertikalni zid idealno glatke površi. Kugla je vezana gipkim neistegljivim užetom BD, koje je u tački D vezano za zid. Ugao između užeta i zida je  $30^\circ$ . Težina užeta se zanemaruje. Za položaj ravnoteže kugle, Slika P 4.13 a), odrediti silu u užetu i reakciju zida u A [9].



Slika P 4.13 a) Kugla vezana užetom i oslonjena na zid; b) telo oslobođeno veza; c) sistem sučeonih sila; d) konstrukcija trougla sila; e) zatvoreni poligon (trougao) sila.

Kugla je vezano telo, koje treba osloboditi veza. Na kuglu deluje aktivna sila, težina  $\vec{G}$  u centru (težištu) kugle. Uklanjanjem zida i presecanjem užeta kugla je oslobođena veza, Slika P 4.13 b). Reakcija veze u A je  $\vec{R}_A$ , a sila u užetu je  $\vec{S}$ . Pravac reakcije  $\vec{R}_A$  je normalan na zid i prolazi kroz centar kugle C, dok reakcija užeta  $\vec{S}$  ima pravac užeta. Smer reakcije  $\vec{R}_A$  je prema vezanom telu, dok je uže uvek zategnuto, pa je smer reakcije  $\vec{S}$  od tela (od B prema D). Prema tome, kad se kugla oslobodi veza, na nju deluju tri sile čije se napadne linije seku u centru kugle, Slika P 4.13 b). Nepoznati su intenziteti reakcija veza  $\vec{R}_A$  i  $\vec{S}$ , dok su njihovi pravci poznati u saglasnosti sa vrstom veze. Zadatak se može rešiti primenom geometrijskog uslova ravnoteže koji predstavlja formiranje zatvorenog trougla sila.

Konstrukcija trougla sila, Slika P 4.13 d) i e), vrši se tako što se prvo nanese vektor  $\vec{ab}$  koji u izabranoj razmeri predstavlja težinu kugle  $\vec{G}$  (konstrukcija poligona sila je detaljno opisana u 4.1.3). Zatim se iz početka  $a$  vektora  $\vec{ab}$  i kraja  $b$  tog vektora povlače linije paralelne pravcima traženih reakcija veza. Ovde je iz tačke  $a$  povučena prava paralelna sili  $\vec{S}$ , a iz  $b$  prava paralelna reakciji  $\vec{R}_A$ . Presek ovih linija određuje potrebne veličine reakcija, dok strelice pokazuju smerove koje ove reakcije moraju imati da bi trougao bio zatvoren. Kod zatvorenih poligona sila, vektori moraju biti usmereni tako da strelice budu usmerene uvek jedna za drugom u istom smeru. Veličine reakcija  $\vec{S}$  i  $\vec{R}_A$  sada mogu da se izmere sa crteža, čitajući njihove veličine u izabranoj razmeri:

$$R_A = u_F \overline{bc} = 5,8 \text{ kN}; \quad S = u_F \overline{ca} = 11,6 \text{ kN},$$

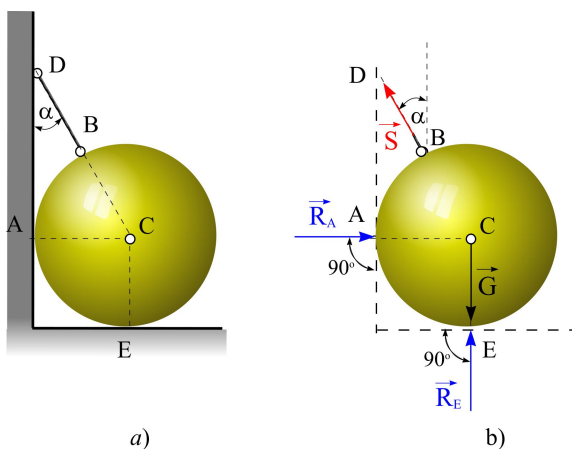
gde je  $u_F$  razmera za silu, na primer  $u_F = \frac{2 \text{ kN}}{1 \text{ cm}}$ .

Ovaj postupak, u kome je zatvoreni poligon sila konstruisan u izabranoj razmeri, a veličine reakcija očitane direktnim merenjem sa crteža, naziva se *geometrijskim ili grafičkim rešenjem zadatka*. Za ovakvo rešenje bilo je potrebno imati brojne vrednosti sile  $G$ , koja je u ovom primeru 10 kN, kao i ugla  $\alpha$ , koji je u ovom primeru  $30^\circ$ .

Do rešenja se može doći primenom trigonometrije, analizom trougla na Slici 4.13 e). U trouglu sila  $abc$  svi uglovi su poznati, kao i stranica  $\vec{ab}$ , koja u datoj razmeri predstavlja intenzitet težine  $G$ , pa su intenziteti traženih reakcija:

$$R_C = G \operatorname{tg} \alpha, \quad S = \frac{G}{\cos \alpha}.$$

Trigonometrijsko rešenje je bolje od grafičkog, jer ono ne sadrži sitne greške, koje su posledica grafičke konstrukcije i očitavanja veličina sa crteža. Međutim, u nekim slučajevima trigonometrijsko rešenje može da bude veoma komplikovano. Najjednostavniji je analitički postupak, opisan u poglavlju 4.3.2, pomoću koga se uglavnom rešavaju zadaci.



Slika P 4.13-2 a) Kugla vezana užetom, oslonjena na zid i na pod; b) telo oslobođeno veza.

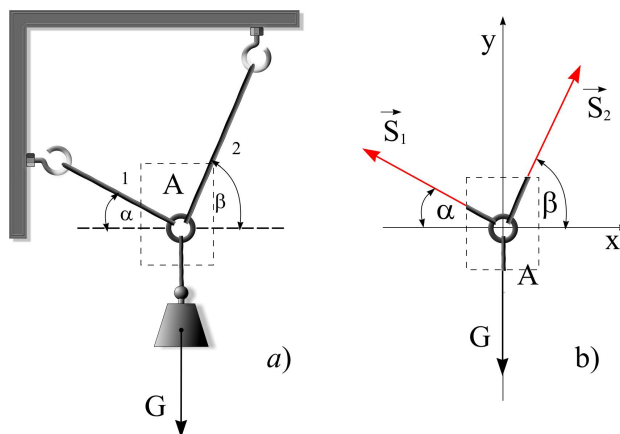
Ako je, na primer, kugla vezana kao na Slici P 4.13 a) i pri tome leži na horizontalnoj podlozi, Slika P 4.13-2 a), pored reakcija  $\vec{S}$  i  $\vec{R}_A$ , postoji i reakcija oslanjanja na idealno glatku površ horizontalne podloge  $\vec{R}_E$ , Slika P 4.13-2 b), što znači da postoje tri nepoznate reakcije veza. Iako je poznato da te tri reakcije veza sa aktivnom silom  $\vec{G}$  formiraju zatvoreni poligon sila, ne postoji način da se odrede veličine pojedinih reakcija. Zato se ovakvi problemi nazivaju *statički neodređeni*. Suvršne veze ili oslonci koji postoje pored onih koji su neophodni (potrebni i dovoljni) za ravnotežu kugle u ravni nazivaju se *prekobrojne veze* (ili oslonci).

*Kako je razlaganje sile u ravni na više od dva pravca neodređen problem, zaključuje se da je pri analizi ravnoteže nekog tela pod dejstvom sučeonih sila koje leže u istoj ravni nemoguće odrediti više od dve nepoznate.*

### Primeri ravnoteže sučeonih sila u ravni – analitički postupak

#### Primer 4.14

Teg težine  $G=10$  kN je okačen o sistem kablova kao na Slici P 4.14. Odrediti sile u kablovima 1 i 2, ako je  $\alpha=30^\circ$  i  $\beta=60^\circ$ .



Slika P 4.14 a) Teg vezan kablovima; b) sistem sučeonih sila.

Da bi se odredile sile u kablovima 1 i 2 potrebno je iseći kablove blizu tačke A u kojoj su oni vezani i postaviti reakcije veza, a to su sile koje imaju pravac kabla, usmerene prema tački vešanja, jer je kabl uvek zategnut, kao što je opisano u poglavlju 3.3.5. U vertikalnom kablovima je sila koja je jednaka težini tega  $G=10$  kN. Dakle, radi se o sistemu od tri sušeeone sile, čije napadne linije prolaze kroz tačku A, od kojih je jedna poznata, a dve su nepoznate ( $S_1$  i  $S_2$ ).

Usvoji se prvo koordinatni sistem, kao na Slici P 4.13 b), i postave jednačine ravnoteže (4.43):

$$\sum X = 0 \rightarrow -S_1 \cos \alpha + S_2 \cos \beta = 0,$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow S_1 \sin \alpha + S_2 \sin \alpha - G = 0.$$

Ovo je sistem od dve jednačine sa dve nepoznate, koji može da se reši na više načina. Ako se iz prve jednačine izrazi  $S_2$  i to unese u drugu, dobija se:

$$S_2 = S_1 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta},$$

$$S_1 \sin \alpha + S_1 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \sin \alpha = G \Rightarrow S_1 = \frac{G \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad S_2 = \frac{G \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Zamenom datih vrednosti za težinu i uglove dobijaju se veličine sila zatezanja u kablovima:

$$S_1 = \frac{10 \cos 60^\circ}{\sin(30^\circ + 60^\circ)} = 5 \text{ kN}, \quad S_2 = \frac{10 \cos 30^\circ}{\sin(30^\circ + 60^\circ)} = 5\sqrt{3} \text{ kN}.$$

#### Primer 4.15

Odrediti reakcije veza analitičkim putem za primer 4.13.

Ako na telo deluje sistem sila čije se napadne linije seku u jednoj tački i sve su u istoj ravni, da bi se rešio problem ravnoteže potrebno je da se koordinatni sistem  $xOy$  postavi tako da sile leže u ravni  $xOy$  i da bude zadovoljen uslov ravnoteže  $\vec{R}' = \vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$ , a da bi rezultanta bila jednaka nuli potrebno je da su njene projekcije na obe ose jednake nuli, izraz (4.43):

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0,$$

što predstavlja dve skalarne jednačine ravnoteže, koje se koriste za rešavanje zadataka ravnoteže sistema sušeeonih sila analitičkim putem. U slučaju sistema sušeeonih sila, Slika P 4.13 c), jednačine ravnoteže glase:

$$\sum X = 0 \rightarrow R_A - S \sin \alpha = 0,$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow -G + S \cos \alpha = 0.$$

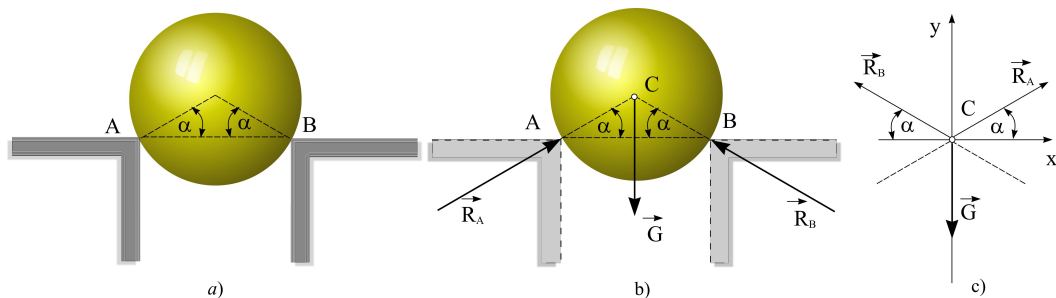
Rešavanjem ovog sistema jednačina dobijaju se reakcije veza:

$$S = \frac{G}{\cos \alpha}, \quad R_A = \frac{G}{\cos \alpha} \sin \alpha = G \operatorname{tg} \alpha.$$

Zamenom  $G=10$  kN i  $\alpha=30^\circ$ , sledi:  $R_A=5,77$  kN,  $S=11,56$  kN.

## Primer 4.16

Kugla idealno glatke površi, težine  $G$ , leži na ivicama površi, kao na Slici P 4.16 a). Odrediti reakcije veza analitičkim postupkom.



Slika P 4.16 a) Kugla oslonjena na zidove u A i B; b) telo oslobođeno veza; c) sistem sučeonih sila.

Iz jednačina ravnoteže sistema sučeonih sila, Slika P 4.16 c):

$$\sum X = 0 \rightarrow R_A \cos 30^\circ - R_B \cos 30^\circ = 0,$$

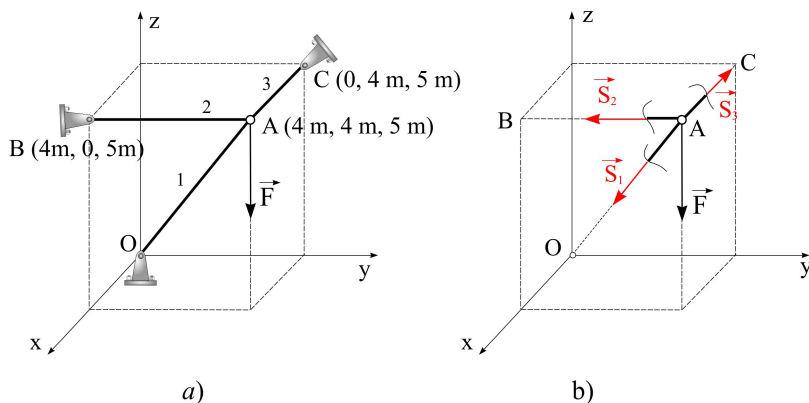
$$\sum Y = 0 \rightarrow -G + R_A \sin 30^\circ + R_B \sin 30^\circ = 0,$$

dobija se:  $R_A = R_B = G$ .

### Primeri ravnoteže sučeonih sila u prostoru – analitički postupak

## Primer 4.17

U čvoru A vezani su štapovi 1, 2 i 3 kao na Slici P 4.17. Odrediti sile u štapovima usled dejstva sile  $F=5$  kN.



Slika P 4.17 a) Štapovi vezani u čvoru A; b) sile u štapovima i sila  $\vec{F}$  čine prostorni sistem sučeonih sila.

Sile u štapovima se određuju na isti način kao u sličnim primerima uravnoteženih sistema sučeonih sila u ravni. Da bi se odredile sile u štapovima  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AO}$ , potrebno je iseći štapove blizu tačke A u kojoj su oni vezani i postaviti reakcije veza, a to su sile koje imaju pravce štapova (poglavlje 3.3.5, 5 prost štap). Sile  $\vec{S}_2$  i  $\vec{S}_3$  su u horizontalnoj ravni, dok je sila  $\vec{S}_1$  prostorna, tako da zajedno sa aktivnom silom  $\vec{F}$ , koja deluje u pravcu ose z, ovaj sistem od tri nepoznate sile i jedne date sile predstavlja prostorni sistem sila čije se

napadne linije seku u tački A. Da bi mogle da se odrede projekcije sile  $\vec{S}_1$  na koordinatne ose, treba odrediti uglove koje ona zaklapa sa koordinatnim osama. Iz analitičke geometrije je poznato da se uglovi između neke prave u prostoru i koordinatnih osa mogu odrediti ako se znaju koordinate dve tačaka na toj osi. Tačke O (0, 0, 0) i A (4 m, 4 m, 5 m) određuju pravac štapa 1, pa su kosinusi pravca sile  $\vec{S}_1$ :

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_O - x_A}{AO} = \frac{x_O - x_A}{\sqrt{(x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2 + (z_O - z_A)^2}} =$$

$$= \frac{0 - 4}{\sqrt{(0 - 4)^2 + (0 - 4)^2 + (0 - 5)^2}} = -\frac{4}{\sqrt{57}},$$

$$\cos \beta_1 = \frac{y_O - y_A}{AO} = \frac{y_O - y_A}{\sqrt{(x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2 + (z_O - z_A)^2}} = -\frac{0 - 4}{\sqrt{57}} = -\frac{4}{\sqrt{57}},$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{z_O - z_A}{AO} = \frac{z_O - z_A}{\sqrt{(x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2 + (z_O - z_A)^2}} = \frac{0 - 5}{\sqrt{57}} = -\frac{5}{\sqrt{57}}.$$

Projekcije sile  $\vec{S}_1$  su:

$$S_{1x} = S_1 \cos \alpha_1 = -\frac{4}{\sqrt{57}} S_1, \quad S_{1y} = S_1 \cos \beta_1 = -\frac{4}{\sqrt{57}} S_1, \quad S_{1z} = S_1 \cos \gamma_1 = -\frac{5}{\sqrt{57}} S_1,$$

pa jednačine ravnoteže datog sistema sila glase:

$$\sum X = 0 \rightarrow -S_3 - S_1 \frac{4}{\sqrt{57}} = 0,$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow -S_2 - S_1 \frac{4}{\sqrt{57}} = 0,$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow -S_1 \frac{4}{\sqrt{57}} - F = 0.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobijaju se sile u štapovima:

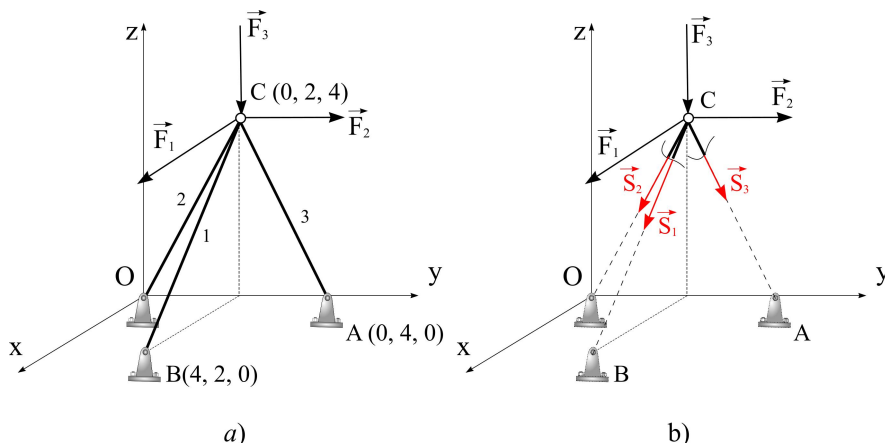
$$S_1 = -\sqrt{57} \text{ kN}, \quad S_2 = -S_1 \frac{4}{\sqrt{57}} = -(-\sqrt{57}) \frac{4}{\sqrt{57}} = 4 \text{ kN},$$

$$S_3 = -S_1 \frac{4}{\sqrt{57}} = -(-\sqrt{57}) \frac{4}{\sqrt{57}} = 4 \text{ kN}.$$

Napomena: ovde je pretpostavljeno da su štapovi zategnuti, Slika 3.36 (unutrašnje sile kod zategnutih štapova su usmerene od čvora prema sredini štapa). Kako su dobijene pozitivne vrednosti za sile u štapovima  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$ , to znači da su ti štapovi zategnuti, a dobijena negativna vrednost za silu u štapu  $\overline{AO}$  ukazuje na to da je štap pritisnut (unutrašnje sile kod pritisnutih štapova su usmerene prema čvorovima).

## Primer 4.18

U čvoru C vezani su štapovi 1, 2 i 3 i deluju sile  $F_1=5$  kN,  $F_2=4$  kN i  $F_3=12$  kN, koje su paralelne koordinatnim osama, kao na Slici P 4.18. Odrediti sile u štapovima.



Slika P 4.18 a) Štapovi vezani u čvoru C; b) prostorni sistem sučeonih sila.

Sa Slike P 4.18 je očigledno da se štapovi 2 i 3 nalaze u ravni  $yOz$ , dok je štap 1 u ravni  $xOz$ . Aktivne sile koje deluju u čvoru C su paralelne osama  $x$ ,  $y$  i  $z$ . Primenom uslova ravnoteže sistema sila čije napadne linije prolaze kroz jednu tačku, u ovom slučaju C, određuju se nepoznate sile u štapovima 1, 2 i 3. Na osnovu poznatih koordinata tačaka O, C, B i A, Slika P 4.18 a), kojima su definisani pravci štapova, tj. sile u štapovima, mogu se odrediti uglovi između štapova i koordinatnih osa:

$$\cos \alpha_2 = \frac{x_O - x_C}{CO} = 0, \quad \cos \alpha_3 = \frac{x_A - x_C}{CA} = 0,$$

$$\begin{aligned} \cos \beta_2 &= \frac{y_O - y_C}{CO} = \frac{0 - 2}{\sqrt{(x_O - x_C)^2 + (y_O - y_C)^2 + (z_O - z_C)^2}} = \\ &= \frac{-2}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{-2}{\sqrt{20}} = \frac{-2}{2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \beta_3 &= \frac{y_A - y_C}{CA} = \frac{4 - 2}{\sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \end{aligned}$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{z_O - z_C}{CO} = \frac{0 - 4}{2\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \gamma_3 = \frac{z_A - z_C}{CA} = \frac{0 - 4}{2\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_B - x_C}{CB} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \beta_1 = \frac{y_B - y_C}{CB} = 0,$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{z_B - z_C}{CB} = \frac{0 - 4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ako se pretpostavi da su štapovi zategnuti, Slika P 4.18 b), jednačine ravnoteže glase:

$$\sum X = 0 \rightarrow F_1 + S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow F_2 - S_2 \frac{1}{\sqrt{5}} + S_3 \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow -F_3 - S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_2 \frac{2}{\sqrt{5}} - S_3 \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,$$

a vrednosti sila u štapovima su:

$$S_1 = -5\sqrt{2} \text{ kN}, \quad S_2 = \frac{\sqrt{5}}{4} \text{ kN}, \quad S_3 = -\frac{15}{4}\sqrt{5} \text{ kN}.$$

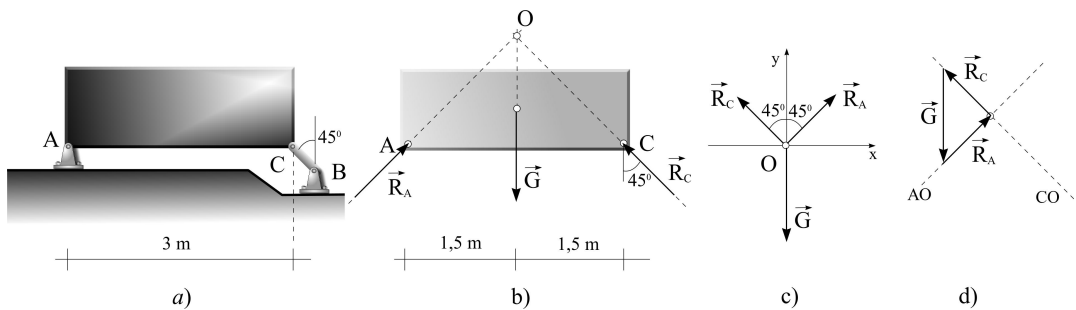
Dobijene negativne vrednosti za sile  $\vec{S}_1$  i  $\vec{S}_3$  ukazuju na to da su štapovi 1 i 3 pritisnuti.

### Primeri ravnoteže tri sile u ravni

Ako na telo koje je u ravnoteži deluju samo tri sile, onda je neophodno da se one seku u jednoj tački i da je njihov vektorski zbir jednak nuli, odnosno trougao sila zatvoren, što je pokazano u poglavlju 4.3.3. Često je rešavanje problema ravnoteže tela pojednostavljeno ukoliko se uoči da je moguće primeniti uslov ravnoteže tri sile. Ako su poznati pravci dve od tri sile, potraži se presečna tačka njihovih napadnih linija, a zatim se pravac treće odredi tako što se provuče prava kroz tu presečnu tačku i napadnu tačku sile, čime je određena njena napadna linija. Zatim se primenom uslova ravnoteže sistema sušconih sila sračunaju vrednosti traženih nepoznatih sila analitičkim putem, ili se formiranjem zatvorenog trougla sila odrede geometrijskim putem.

#### Primer 4.19

Odrediti reakcije veza kojima je ploča težine  $G=5 \text{ N}$  vezana za podlogu, Slika P 4.19 a).



Slika P 4.19 a) Vezano telo; b) telo oslobođeno veza; c) tri sušcone sile; d) zatvoren trougao sila.

Plaća je vezana nepokretnim osloncem u A i prostim štapom BC, Slika P 4.19 a). Opterećena je samo sopstvenom težinom, koja deluje u težištu pravougonika, Slika 4.19 b), a kada se oslobodi veza i silama veza. Reakcija u tački C je u pravcu štapa BC, dok pravac i smer reakcije u A nije unapred poznat. Kako na ploču deluju tri sile u istoj ravni, koje nisu paralelne, to će ploča biti u ravnoteži ako napadne linije svih sila prolaze kroz tačku O preseka napadnih linija težine  $\vec{G}$  i reakcije  $\vec{R}_C$ . Na taj način je određen pravac reakcije  $\vec{R}_A$ . Trougao ACO je jednakokrako pravougli. Da bi ploča bila u ravnoteži reakcije veza



$\vec{R}_A$  i  $\vec{R}_C$  i težina  $\vec{G}$  moraju da čine zatvoreni trougao sila, Slika P 4.19 d), iz koga se dobijaju smerovi reakcija i njihove vrednosti:

$$R_A = R_B = \frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3,55 \text{ kN}.$$

Zadatak se može rešiti primenom uslova ravnoteže sistema sučeonih sila, Slika P 4.19 c). Iz jednačina ravnoteže:

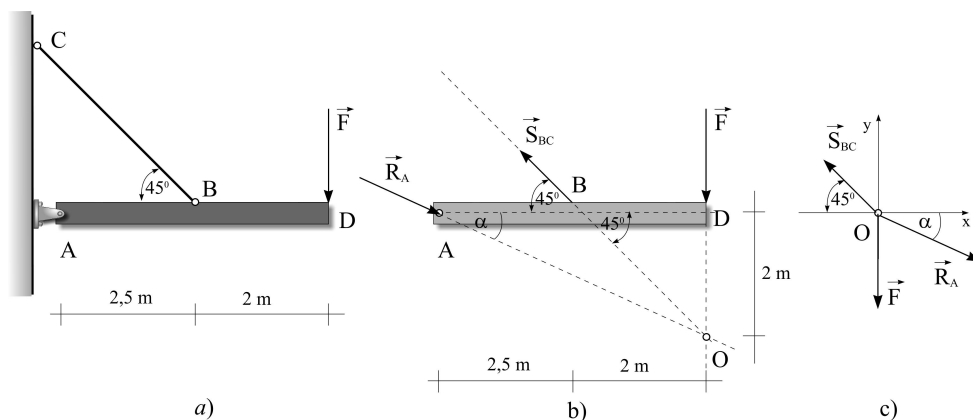
$$\sum X = 0 \rightarrow R_A \sin 45^\circ - R_C \sin 45^\circ = 0,$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow R_A \cos 45^\circ + R_C \cos 45^\circ - G = 0,$$

dobija se isto rešenje kao i trigonometrijskim postupkom.

#### Primer 4.20

Telo vezano nepokretnim osloncem u tački A za zid, u horizontalnom položaju održava uže BC, Slika P 4.20 a). Ako se težina tela zanemari, a intenzitet sile  $\vec{F}$  je 10 kN, odrediti reakcije veza primenom pravila ravnoteže tri sile u ravni.



Slika P 4.20 a) Vezano telo; b) sile prolaze kroz tačku O; c) tri sučeoone sile.

Na telo deluje vertikalna sila  $\vec{F}$ , sila u užetu, koja ima pravac užeta, i reakcija zglobove veze nepokretnog oslonca, što znači da napadne linije te tri sile treba da se seku u jednoj tački. Presek napadnih linija sile  $\vec{F}$  i sile u užetu  $\vec{S}_{BC}$  je tačka O, Slika P 4.20. Reakcija  $\vec{R}_A$  deluje u tački A, a njena napadna linija treba da prolazi kroz tačku O, pa je pravac reakcije  $\vec{R}_A$  određen pravom AO.

Jednačine ravnoteže sistema sučeonih sila, Slika P 4.20 c), glase:

$$\sum X = 0 \rightarrow R_A \cos \alpha - S_{BC} \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow -R_A \sin \alpha + S_{BC} \sin 45^\circ - F = 0.$$

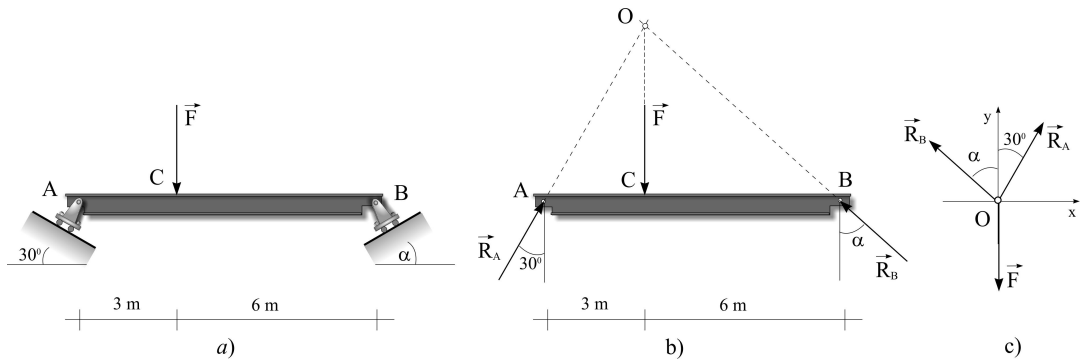
Ugao  $\alpha$  može da se odredi iz pravouglog trougla OAD:

$$\sin \alpha = \frac{DO}{AO} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4,5^2}} = 0,4065, \quad \cos \alpha = \frac{AD}{AO} = \frac{4,5}{\sqrt{2^2 + 4,5^2}} = 0,9146.$$

Rešavanjem jednačina ravnoteže dobija se:  $R_A = 19,68 \text{ kN}$ ,  $S_{BC} = 18\sqrt{2} \text{ kN}$ .

## Primer 4.21

Štap AB je zanemarljive težine. Koristeći uslov ravnoteže tri sile u ravni odrediti koliki treba da bude ugao  $\alpha$  da bi telo bilo u ravnoteži, ako je sila  $F=2$  kN.



Slika P 4.21 a) Telo vezano pokretnim osloncima; b) dijagram slobodnog tela; c) tri sušeeone sile.

Pokretan oslonac A je pod uglom od  $30^0$  u odnosu na horizontalu, pa je reakcija veze  $\vec{R}_A$  pod uglom od  $30^0$  u odnosu na vertikalni pravac. Presek napadne linije sile  $\vec{F}$  i reakcije  $\vec{R}_A$  je tačka O, kroz koju treba da prolazi i napadna linija reakcije  $\vec{R}_B$  pokretnog oslonca B. Ugao  $\alpha$  može da se odredi iz pravouglog trougla BCO. Pre toga treba odrediti katetu  $\overline{CO}$  na osnovu pravouglog trougla ACO, čiji su uglovi poznati, kao i jedna kateta  $\overline{AC}=3$  m:

$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{\overline{AC}}{\overline{CO}} = \frac{3}{\overline{CO}} \Rightarrow \overline{CO} = \frac{3}{\operatorname{tg} 30^0} = 3\sqrt{3} = 5,2 \text{ m},$$

$$\overline{BO} = \sqrt{(\overline{CB})^2 + (\overline{CO})^2} = 7,94 \text{ m},$$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{BO}} = \frac{6}{7,94} = 0,7557 \Rightarrow \alpha = 45^0 23' 55''.$$

Sada mogu da se odrede intenziteti reakcija  $\vec{R}_A$  i  $\vec{R}_B$  iz jednačina ravnoteže:

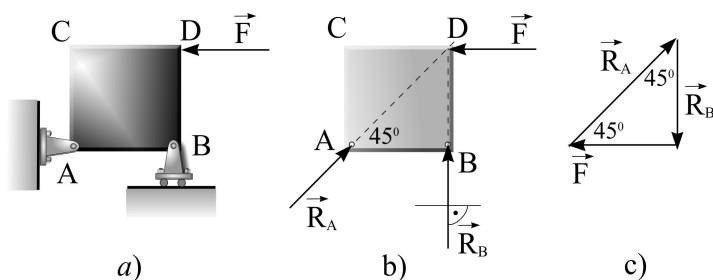
$$\sum X = 0 \rightarrow R_A \sin 30^0 - R_B \sin \alpha = 0,$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow R_A \cos 30^0 + R_B \cos \alpha - F = 0,$$

$$R_A = -1,54 \text{ kN}, \quad R_B = 1,02 \text{ kN}.$$

## Primer 4.22

Kvadratna ploča zanemarljive težine vezana je nepokretnim osloncem u A, pokretnim osloncem u B i opterećena silom  $F = 2 \text{ kN}$ , Slika P 4.22 a). Odrediti reakcije veza, koristeći pravilo za ravnotežu tri sile u ravni.



Slika P 4.22 a) Ploča vezana nepokretnim i pokretnim osloncem; b) tri sile prolaze kroz tačku D; c) trougao sila.

Telo se oslobodi veza i odredi tačka preseka napadnih linija sile  $\vec{F}$  i reakcije  $\vec{R}_B$  pokretnog oslonca, Slika P 4.22 b). Tačkama A i D je određen pravac reakcije  $\vec{R}_A$ . To je pravac dijagonale kvadrata, pa je trougao sila pravougli jednakokraki, Slika P 4.22 c), iz koga je očigledno da je:

$$R_B = -2 \text{ kN}, \quad R_A = 2\sqrt{2} \text{ kN}.$$

### Najvažnije u ovom poglavlju

- Kako se određuje rezultanta sistema sučeonih sila u ravni i prostoru
- Kako se razlaže sila na dva pravca u ravni i tri pravca koji ne leže u istoj ravni
- Kako se sila predstavlja analitički preko svojih komponentata, odnosno projekcija
- Koji su uslovi ravnoteže sistema sučeonih sila u ravni i prostoru
- Ravnoteža tri neparalelne sile u ravni