

## 12.2 Unutrašnje sile u poprečnom preseku prostornog linijskog nosača

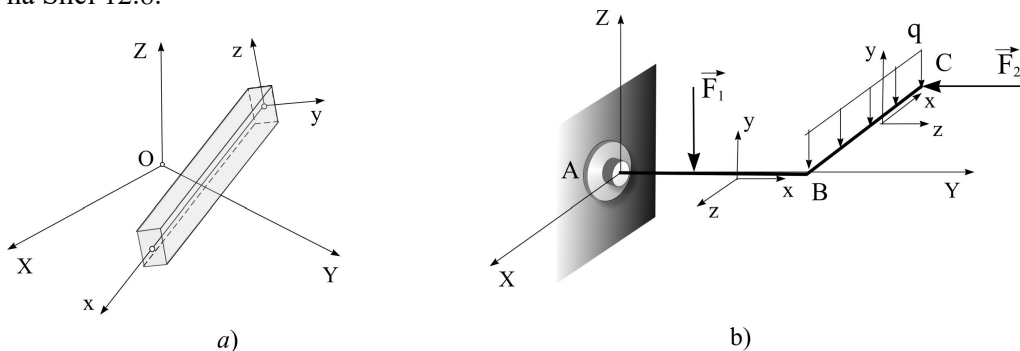
### 12.2.1 Opšte pretpostavke

Prostorni linijski nosači su nosači kod kojih ose svih štapova i sva opterećenja ne leže u istoj ravni. Veze prostornih linijskih nosača sa spoljašnjom sredinom, kao i sa drugim telima i konstrukcijama obrađene su u poglavlju 11. Broj reakcija veza statički određenih prostornih linijskih nosača ne sme da bude veći od šest, jer se za prostorni sistem sila može formirati najviše šest jednačina ravnoteže. U prostornim linijskim nosačima spoljašnja opterećenja izazivaju podužne – normalne sile, poprečne – transverzalne sile, momente uvrtnanja i momente savijanja.

Da bi se konstrukcija kvalitetno analizirala i proračunala usvaja se sistem oznaka i prikaza za: geometriju konstrukcije, opterećenja, reakcije i unutrašnje sile. Danas, kad se u proračunima isključivo primjenjuju računari, usvojen je sistem oznaka koji odgovara njihovoj upotrebi [10].

**Geometrija konstrukcije** se prikazuje u globalnom koordinatnom sistemu i lokalnom koordinatnom sistemu. Globalna geometrija daje podatke o čvorovima i štapovima. Podaci o čvorovima sadrže redni broj čvora i njegove koordinate u globalnom koordinatnom sistemu, za koji se usvaja desni pravougli koordinatni sistem, Slika 12.8.

Koordinatni početak globalnog koordinatnog sistema bira se proizvoljno. Položaj štapova zadaje se u globalnom, ali i u lokalnim sistemima. Lokalni koordinatni sistem pridružuje se svakom štapu tako što se koordinatni početak postavlja u prvom čvoru, a osa x usmerava prema drugom čvoru, Slika 12.8. Ako presek štapa ima dve glavne ose, tada se lokalna osa y bira tako da sa lokalnom osom x čini desni koordinatni sistem, a ravan xOy se poklapa sa glavnom ravni preseka štapa. Postavljanje lokalnog koordinatnog sistema štapa prikazano je na Slici 12.8.

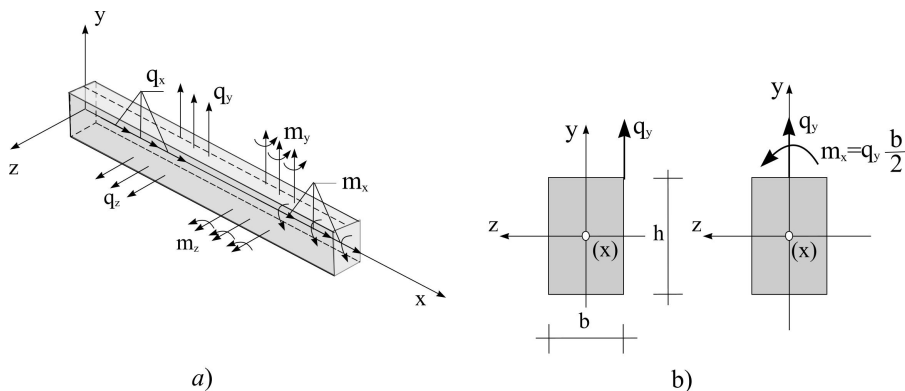


Slika 12.8 a) Štap u globalnom i lokalnom sistemu; b) prostorni linijski nosač sa globalnim i lokalnim koordinatnim sistemima.

**Opterećenje konstrukcije** se zadaje preko čvorova i štapova. Opterećenja čvorova prikazuju se u globalnom sistemu, dok se opterećenja štapova prikazuju u lokalnom sistemu.

Opterećenje u lokalnom sistemu se u najopštijem slučaju sastoji od raspodeljenih sila u sva tri pravca i raspodeljenih momenata oko sve tri ose:  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$ ,  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$ . Pozitivni smerovi opterećenja u lokalnom sistemu elementa prikazani su na Slici 12.9. Raspodeljeni momenti se javljaju na gredi najčešće kao posledica ekscentričnog dejstva raspodeljenog opterećenja kao što je pokazano na Slici 12.9 b).

**Reakcije veza** se prikazuju kao koncentrisane sile u osloncima u globalnom sistemu. Pretpostavlja se da su smerovi reakcija u smeru osa koordinatnog sistema.



Slika 12.9 a) Pozitivni smerovi opterećenja u lokalnom sistemu; b) raspodeljeni moment.

### 12.2.2 Sile u preseku prostornih linijskih nosača

Posmatra se nosač, opterećen prostornim sistemom sila, Slika 12.10. Ako je potrebno odrediti unutrašnje sile koje deluju na poprečni presek u tački C, zamisli se presek, upravan na osu štapa, tj. upravan na tangentu na mestu preseka, kojim se nosač podeli na dva dela.

Ako se zamisli da je deo CB grede uklonjen, na mestu preseka će se pojaviti uticaj izdvojenog dela CB na deo AC u vidu unutrašnjih sila. Kako je gredni nosač opterećen prostornim sistemom sila, unutrašnje sile u poprečnom preseku predstavljaju takođe prostorni sistem sila. Ako se unutrašnje sile redukuju u težište poprečnog preseka, tačku C, dobija se *redukciona rezultanta* – glavni vektor  $\vec{R}_L$  i *redukcioni rezultujući spreg sila* – glavni moment  $\vec{M}_L$ . Takođe, deo AC deluje na deo CB unutrašnjim silama, čiji je glavni vektor  $\vec{R}_D$  i glavni moment  $\vec{M}_D$ . Na osnovu šeste aksiome ovi vektori su istog pravca i intenziteta, a suprotnog smera:

$$\vec{R}_D = -\vec{R}_L, \quad \vec{M}_D = -\vec{M}_L. \quad (12.14)$$

Glavni vektori  $\vec{R}_L$  i  $\vec{R}_D$  i glavni momenti  $\vec{M}_L$  i  $\vec{M}_D$  su prostorni vektori koji imaju po tri komponente  $N$ ,  $T_y$ ,  $T_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  u pravcima osa lokalnog koordinatnog sistema, Slika 12.10.

Dakle, delovi tela deluju jedan na drugi istim torzerom suprotnog predznaka. Kada se delovi tela ponovo spoje, dejstva odbačenih delova postaju unutrašnje sile u posmatranom preseku. Posmatrani presek u geometrijskom smislu je definisan: normalom preseka  $n$ , koja je u pravcu tangente na podužnu osu štapa, tangentom preseka  $t$ , koja je upravna na normalu, odnosno podužnu osu štapa, binormalom preseka  $b$ , koja sa tangentom i normalom čini desni koordinatni sistem.

Komponente glavnog vektora i glavnog momenta su:

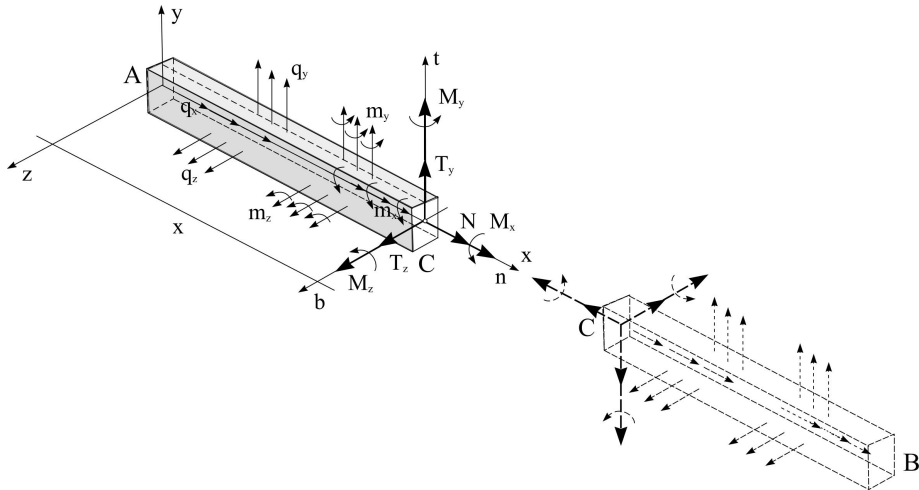
- $N$  - podužna ili normalna – aksijalna sila, koja predstavlja komponentu redukcionu rezultante u pravcu podužne ose štapa;
- $T_y$  - poprečna sila u ravni  $xOy$  ili transverzalna sila u  $y$  pravcu je komponenta redukcionu rezultante u pravcu ose  $y$ ;
- $T_z$  - poprečna sila u ravni  $xOz$  ili transverzalna sila u  $z$  pravcu je komponenta redukcionu rezultante u pravcu ose  $z$ ;
- $M_x$  - moment uvrtnja ili moment torzije je komponenta glavnog momenta u pravcu ose  $x$ ;

$M_y$  - moment savijanja u ravni  $xOz$ , tj. oko ose  $y$  je komponenta glavnog momenta u pravcu ose  $y$ ;

$M_z$  - moment savijanja u ravni  $xOy$ , tj. oko ose  $z$  je komponenta glavnog momenta u pravcu ose  $z$ ,

pri čemu se koristi veza između momenta sile u odnosu na tačku i momenta sile u odnosu na osu:

$$M_{C_x} = M_x, \quad M_{C_y} = M_y, \quad M_{C_z} = M_z.$$



Slika 12.10 Prikaz unutrašnjih sila u preseku štapa

Posmatrajući ravnotežu levog ili desnog dela tela na Slici 12.10, iz uslova ravnoteže sledi :

*Normalna sila  $N$  jednaka je algebarskom zbiru projekcija u pravcu normale preseka svih sila sa jedne ili druge strane preseka.*

*Poprečna sila  $T_y$  jednaka je algebarskom zbiru projekcija u pravcu tangente preseka svih sila sa jedne ili druge strane preseka.*

*Poprečna sila  $T_z$  jednaka je algebarskom zbiru projekcija u pravcu binormale preseka svih sila sa jedne ili druge strane preseka.*

*Moment uvrtnja  $M_x$  jednak je algebarskom zbiru projekcija u pravcu normale preseka svih momenata sa jedne ili druge strane preseka.*

*Moment savijanja  $M_y$  jednak je algebarskom zbiru projekcija u pravcu tangente preseka svih momenata sa jedne ili druge strane preseka.*

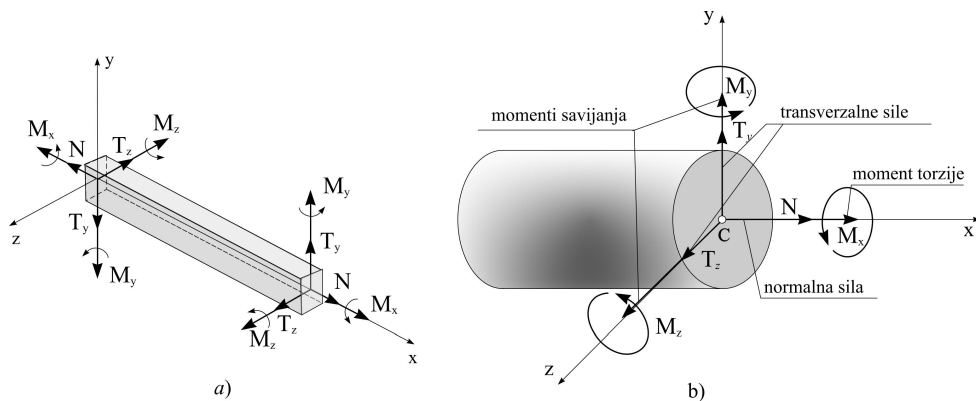
*Moment savijanja  $M_z$  jednak je algebarskom zbiru projekcija u pravcu binormale preseka svih momenata sa jedne ili druge strane preseka.*

### 12.2.3 Konvencija o znaku sila u preseku

Unutrašnje sile prikazuju se u lokalnom sistemu. Za razliku od štapa rešetkaste konstrukcije, kod štapa u prostoru nema jedinstvenog dogovora o znacima unutrašnjih sila i načinu njihovog grafičkog prikaza.

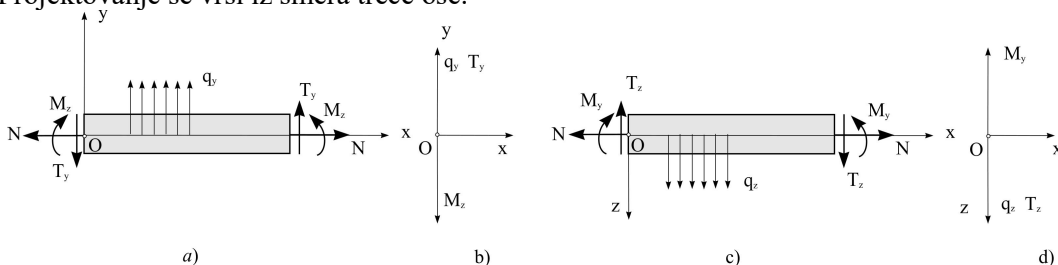
U ovoj knjizi je izložena konvencija zasnovana na desnom koordinatnom sistemu, koja je u skladu sa računarskim metodama.

Usvajanje pozitivnih smerova zasniva se na smerovima lokalnog sistema u preseku čija se normala podudara sa pozitivnim smerom lokalne ose  $x$ . Ovi smerovi kompatibilni su sa smerovima opterećenja i pomeranja.



Slika 12.11 a) Pozitivni smerovi unutrašnjih sila na krajevima elementa štapa; b) pozitivne unutrašnje sile na desnom kraju nosača.

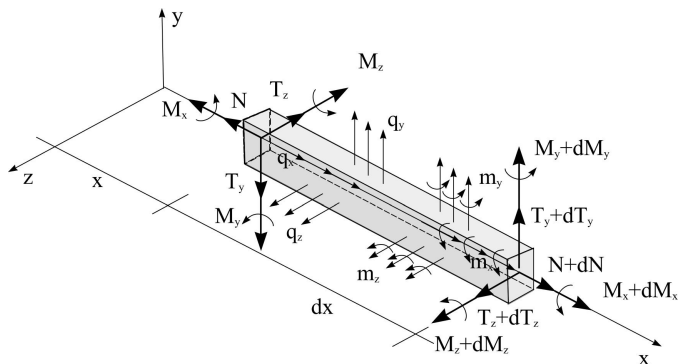
Pozitivni smerovi opterećenja i sile u presecima, kao i načini projektovanja i crtanja dijagrama pri savijanju štapa u lokalnim ravninama xOy i xOz, prikazani su na Slici 12.12. Projektovanje se vrši iz smera treće ose.



Slika 12.12 a) Pozitivni smerovi unutrašnjih sila za savijanje štapa u ravni xOy; b) smerovi crtanja pozitivnih veličina za savijanje štapa u ravni xOy; c) pozitivni smerovi unutrašnjih sila za savijanje štapa u ravni xOz; d) smerovi crtanja pozitivnih veličina za savijanje štapa u ravni xOz.

## 12.2.4 Diferencijalne veze između spoljašnjih i unutrašnjih sila

Veze se posmatraju na diferencijalnom elementu pravolinijskog štapa prikazanog na Slici 12.13.



Slika 12.13 Diferencijalni element štapa u prostoru

Ako se zanemare diferencijalne veličine drugoga reda, iz šest jednačina ravnoteže diferencijalnog elementa prostornog štapa:

$$\begin{aligned}
\sum X = 0 &\rightarrow N + dN - N + q_x dx = 0, \\
\sum Y = 0 &\rightarrow T_y + dT_y - T_y + q_y dx = 0, \\
\sum Z = 0 &\rightarrow T_z + dT_z - T_z + q_z dx = 0, \\
\sum M_x = 0 &\rightarrow M_x + dM_x - M_x + m_x dx = 0, \\
\sum M_y = 0 &\rightarrow M_y + dM_y - M_y - T_z dx + m_y dx = 0, \\
\sum M_z = 0 &\rightarrow M_z + dM_z - M_z + T_y dx + m_z dx = 0,
\end{aligned} \tag{12.15}$$

sledi:

$$\frac{dN}{dx} = -q_x, \quad \frac{dT_y}{dx} = -q_y, \quad \frac{dT_z}{dx} = -q_z, \quad \frac{dM_x}{dx} = -m_x, \quad \frac{dM_y}{dx} - T_z = -m_y, \quad \frac{dM_z}{dx} + T_y = -m_z. \tag{12.16}$$

Na osnovu svega izloženog vidi se da kod prostornih linijskih nosača postoje transverzalne sile i momenti savijanja u dve ravni, u horizontalnoj xOz i vertikalnoj xOy.

Crtanje statičkih dijagrama kod prostornih linijskih nosača vrši se na isti način kao i kod linijskih nosača u ravni, s tim što se posebno crtaju dijagrami transverzalnih sila i momenata savijanja za vertikalnu ravan nosača i horizontalnu ravan nosača, pri čemu se znaci transverzalnih sila i momenata savijanja određuju kako je to definisano na Slici 12.12.

Dijagram aksijalnih sila konstruiše se na isti način kao kod ravnih nosača.

Nova vrsta uticaja je torzija, tj. moment torzije i crtanje dijagrama momenata torzije. Konstrukcija dijagrama momenata torzije vrši se analogno crtanju dijagrama aksijalnih sila.

### Primeri određivanja sila u preseku prostornih linijskih nosača

#### Primer 12.13

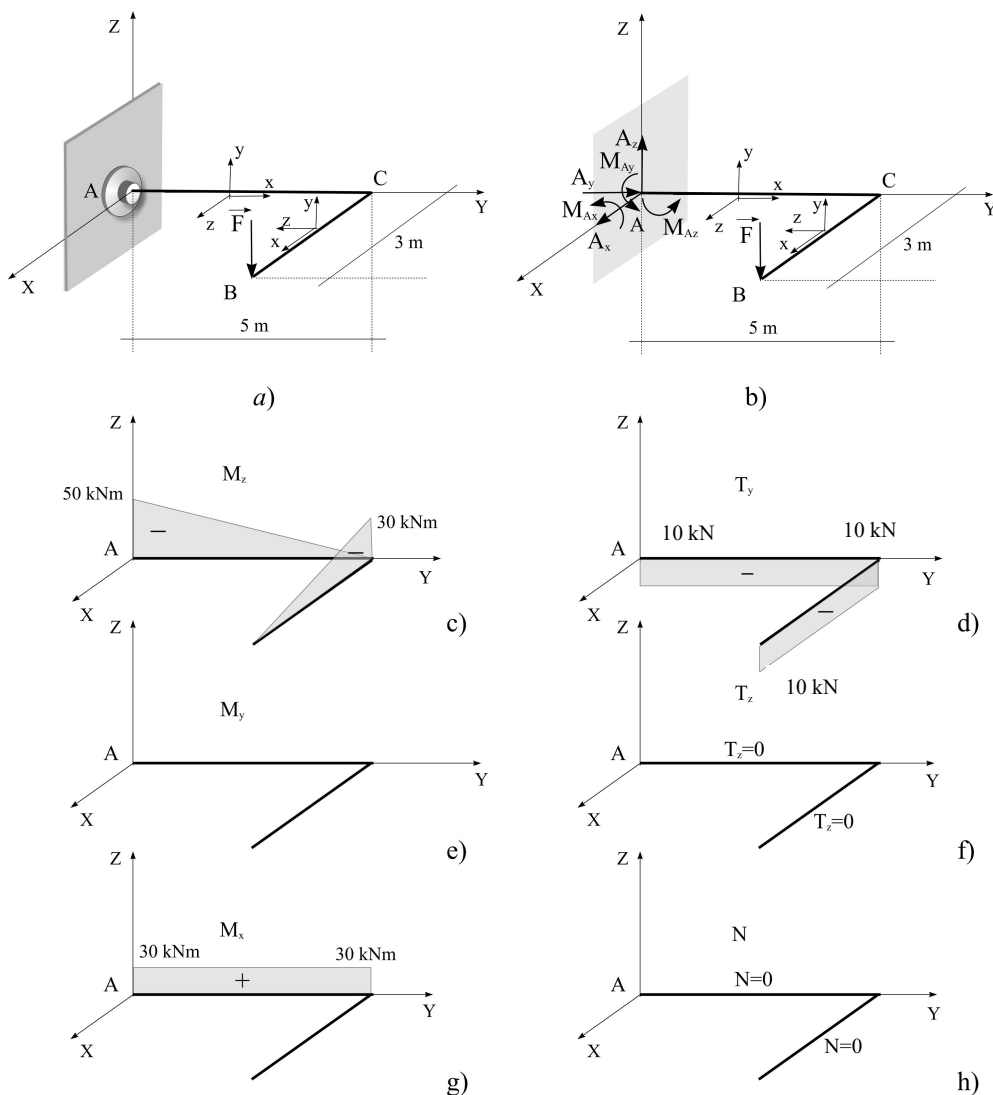
Prostorni linijski nosač je uklješten u A i opterećen silom  $F=10$  kN, Slika P 12.13 a). Napadna linija sile prolazi kroz slobodan kraj B i paralelna je sa osom z. Odrediti reakcije uklještenja i nacrtati dijagrame sila u presecima.

Reakcije veza predstavljaju se u globalnom koordinatnom sistemu XYZ i određuju iz uslova ravnoteže proizvoljnog prostornog sistema sila:

$$\begin{aligned}
\sum X = 0 &\rightarrow A_x = 0, \quad \sum Y = 0 \rightarrow A_y = 0, \quad \sum Z = 0 \rightarrow A_z - F = 0, \\
\sum M_x = 0 &\rightarrow M_{A_x} - F \cdot 5 = 0, \quad \sum M_y = 0 \rightarrow M_{A_y} + F \cdot 3 = 0, \quad \sum M_z = 0 \rightarrow M_{A_z} = 0, \\
A_x = 0, \quad A_y = 0, \quad A_z = F = 10 \text{ kN}, \quad M_{A_x} = 50 \text{ kNm}, \quad M_{A_y} = -30 \text{ kNm}, \quad M_{A_z} = 0.
\end{aligned}$$

Za svaki deo linijskog nosača vezan je lokalni koordinatni sistem xyz, pri čemu se osa x poklapa sa osama štapova, dok su ose y i z postavljene tako da sa osom x čine koordinatni sistem desne orijentacije, Slika P 12.13 a).

Sile u presecima mogu se odrediti bez određivanja reakcija veze, gledajući desno od preseka. Karakteristični preseki su početak štapa AC, tačka A i kraj štapa, tačka C<sup>A</sup>, odnosno, početak štapa CB, tačka C<sup>B</sup> i kraj tog štapa, tačka B. Kako na štapovima nema raspodeljenih tereta, dijagrami momenata savijanja  $M_z$  i  $M_y$  su funkcije prvog reda, dok su transverzalne i normalne sile konstantnih vrednosti, ukoliko nisu jednaki nuli. Za određivanje znaka sila u presecima treba se pridržavati konvencije o znaku, Slika 12.12.



Slika P 12.13 a) Konzola sa globalnim koordinatnim sistemom i lokalnim koordinatnim sistemima; b) konzola sa reakcijama veze; c) dijagram momenata savijanja u ravni xOy; d) dijagram transverzalnih sila  $T_y$ ; e) dijagram momenata savijanja u ravni xOz; f) dijagram transverzalnih sila  $T_z$ ; g) dijagram momenata torzije; h) dijagram normalnih sila.

Vrednosti sila u preseccima su:

$$M_{z,A} = -F \cdot 5 = -50 \text{ kNm}, \quad M_{z,C^A} = -F \cdot 0 = 0, \quad M_{z,C^B} = -F \cdot 3 = -30 \text{ kNm},$$

$$M_B = -F \cdot 0 = 0, \quad M_{y,A} = 0, \quad M_{y,C^A} = 0, \quad M_{y,C^B} = 0, \quad M_{y,B} = 0,$$

$$M_{x,A} = F \cdot 3 = 30 \text{ kNm}, \quad M_{x,C^A} = F \cdot 3 = 30 \text{ kNm}, \quad M_{x,C^B} = 0, \quad M_{x,B} = 0,$$

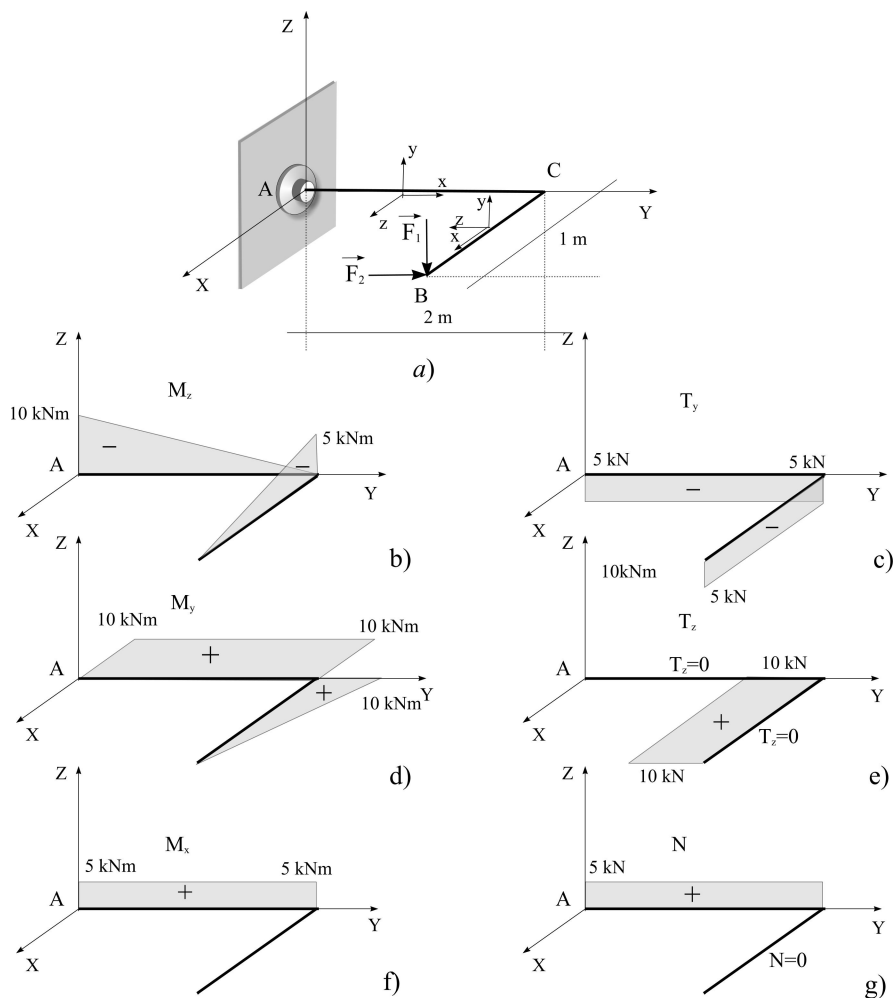
$$T_{y,A} = F = -10 \text{ kN}, \quad T_{y,C^A} = F = -10 \text{ kN}, \quad T_{y,C^B} = -10 \text{ kN}, \quad T_{y,B} = -10 \text{ kN},$$

$$T_{z,A} = 0, \quad T_{z,C^A} = 0, \quad T_{z,C^B} = 0, \quad T_{z,B} = 0,$$

$$N_A = 0, \quad N_{C^A} = 0, \quad N_{C^B} = 0, \quad N_B = 0.$$

## Primer 12.14

Na slobodnom kraju konzole, prikazane na Slici P 12.14, deluju sile  $F_1=5\text{ kN}$  i  $F_2=10\text{ kN}$ . Nacrtati dijagrame sila u preseccima.

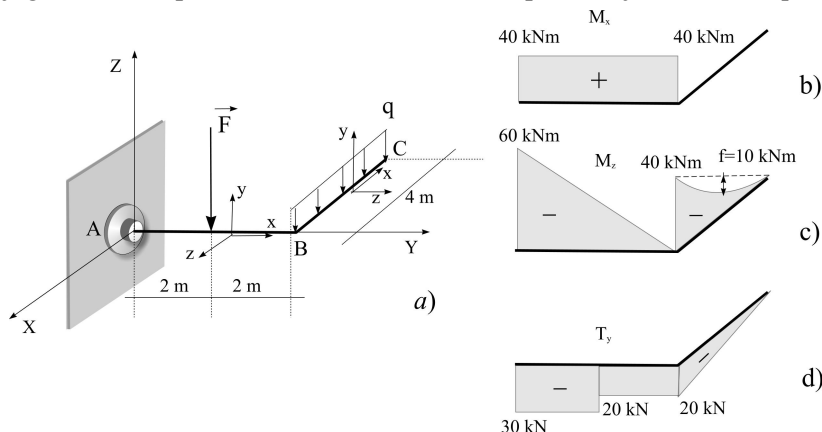


Slika P 12.14 a) Konzola sa globalnim koordinatnim sistemom i lokalnim koordinatnim sistemima; b) dijagram momenata savijanja u ravni  $xOy$ ; c) dijagram transverzalnih sila  $T_y$ ; d) dijagram momenata savijanja u ravni  $xOz$ ; e) dijagram transverzalnih sila  $T_z$ ; f) dijagram momenata torzije; g) dijagram normalnih sila.

Sila  $F_1$  izaziva savijanje štapa AC u ravni  $xOy$  i štapa CB u ravni  $xOy$ , smicanje štapova AC i CB u pravcu ose  $y - T_y$  i torziju štapa AC –  $M_x$ . Sila  $F_2$  izaziva savijanje štapa AC u ravni  $xOz$ , savijanje štapa CB u ravni  $xOz$ , smicanje štapa CB u pravcu ose  $z - T_z$ , kao i aksijalno zatezanje štapa AC.

Primer 12.15

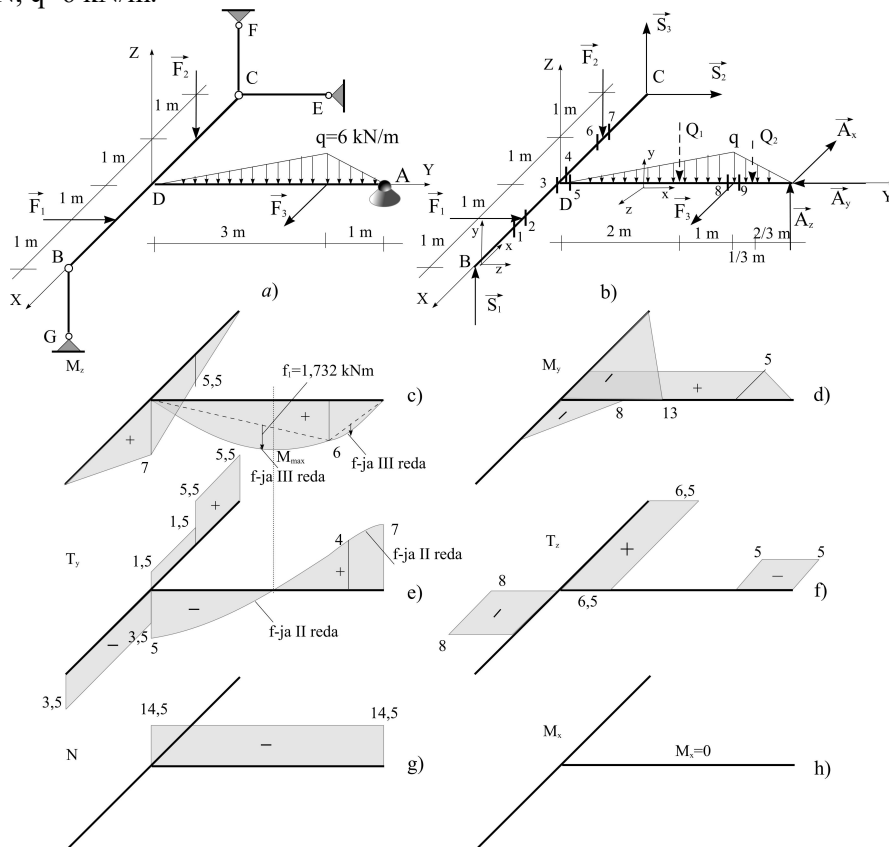
Nacrtati dijagrame sila u preseccima za datu konzolu i opterećenje  $F=10\text{ kN}$ ,  $q=5\text{ kN/m}$ .



Slika P 12.15 a) Konzola sa globalnim koordinatnim sistemom i lokalnim koordinatnim sistemima; b) dijagram momenata torzije; c) dijagram momenata savijanja u ravni xOy; d) dijagram transverzalnih sila  $T_y$ .

Primer 12.16

Određiti reakcije veza za dati prostorni linijski nosač koji je vezan sfernim osloncem u A i štapovima BG, CE i CF. Nacrtati dijagrame sila u preseccima ako je  $F_1=8\text{ kN}$ ,  $F_2=4\text{ kN}$ ,  $F_3=5\text{ kN}$ ,  $q=6\text{ kN/m}$ .



Slika P 12.16 a) Prostorni linijski nosač b) nosač oslobođen veza sa globalnim koordinatnim sistemom i lokalnim koordinatnim sistemima; c) dijagram momenata savijanja u ravni xOy; d) dijagram momenata savijanja u ravni xOz; e) dijagram transverzalnih sila  $T_y$ ; f) dijagram transverzalnih sila  $T_z$ ; g) dijagram normalnih sila; i) dijagram momenata torzije.



Komponente reakcije veze u A –  $\vec{A}_x$ ,  $\vec{A}_y$ ,  $\vec{A}_z$  i tri sile u štapovima  $\vec{S}_1$ ,  $\vec{S}_2$ ,  $\vec{S}_3$  mogu se odrediti iz jednačina ravnoteže prostornog sistema sila:

$$\sum X = 0 \rightarrow -A_x + F_3 = 0,$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow S_2 + F_1 - A_y = 0,$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow A_z + S_1 + S_3 - F_2 - Q_1 - Q_2 = 0,$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow A_z \cdot 4 - Q_1 \cdot 2 - Q_2 \left( 3 + \frac{1}{3} \right) = 0,$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow -S_1 \cdot 2 + S_3 \cdot 2 - F_2 \cdot 1 = 0,$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow A_x \cdot 4 - S_2 \cdot 2 - F_3 \cdot 3 = 0,$$

$$A_x = 5 \text{ kN}, \quad A_y = 14,5 \text{ kN}, \quad A_z = 7 \text{ kN}, \quad S_1 = 3,5 \text{ kN}, \quad S_2 = 6,5 \text{ kN}, \quad S_3 = 5,5 \text{ kN}.$$

Određivanje vrednosti unutrašnjih sila u karakterističnim preseccima nosača:

Momenti savijanja  $M_z$ :

$$M_B = 0, \quad M_1 = M_2 = S_1 \cdot 1 = 3,5 \text{ kNm}, \quad M_3 = S_1 \cdot 2 = 7 \text{ kNm},$$

$$M_4 = S_3 \cdot 2 - F_2 \cdot 1 = 7 \text{ kNm}, \quad M_5 = -Q_1 \cdot 2 - Q_2 \cdot 3,333 + A_z \cdot 4 = 0,$$

$$M_8 = M_9 = A_z \cdot 1 - Q_2 \cdot 0,333 = 6 \text{ kNm}, \quad M_A = 0,$$

$$M_6 = M_7 = S_3 \cdot 1 = 5,5 \text{ kNm}, \quad M_C = 0,$$

$$f_1 = \frac{q l_1^2 \sqrt{3}}{27} = 2\sqrt{3} \text{ kNm}, \quad f_2 = \frac{q l_2^2 \sqrt{3}}{27} = 0,38 \text{ kNm}.$$

Transverzalne sile  $T_y$ :

$$T_B = T_1 = T_2 = T_3 = -S_1 = -3,5 \text{ kN}, \quad T_4 = T_6 = S_3 - F_2 = 1,5 \text{ kN}, \quad T_7 = T_C = S_3 = 5,5 \text{ kN},$$

$$T_A = A_z = 7 \text{ kN}, \quad T_8 = T_9 = A_z - Q_2 = 4 \text{ kN}, \quad T_5 = A_z - Q_2 - Q_1 = -5 \text{ kN}.$$

Momenti savijanja  $M_y$ :

$$M_B = 0, \quad M_1 = M_2 = 0, \quad M_3 = -F_1 \cdot 1 = -8 \text{ kNm},$$

$$M_5 = A_x \cdot 4 - F_3 \cdot 3 = 5 \text{ kNm}, \quad M_8 = M_9 = A_x \cdot 1 = 5 \text{ kNm}, \quad M_A = 0,$$

$$M_4 = -S_2 \cdot 2 = -13 \text{ kNm}, \quad M_6 = M_7 = S_2 \cdot 1 = 6,5 \text{ kNm}, \quad M_C = 0.$$

Transverzalne sile  $T_z$ :

$$T_B = T_1 = F_1 + S_2 - A_y = 0, \quad T_2 = T_3 = S_2 - A_y = -8 \text{ kN}, \quad T_4 = T_6 = T_7 = T_C = S_2 = 6,5 \text{ kN},$$

$$T_5 = T_8 = F_3 - A_x = 0, \quad T_9 = T_A = -A_x = -5 \text{ kN}.$$

Normalne sile  $N$ :

$$N_5 = N_8 = N_9 = N_A = -A_y = -14,5 \text{ kN},$$

$$N_B = N_1 = N_2 = N_3 = A_x - F_3 = 0, \quad N_4 = N_6 = N_7 = N_C = 0.$$

Momenti torzije  $M_x$ :

$$M_B = M_1 = M_2 = M_3 = Q_1 \cdot 2 + Q_2 \cdot 3,333 - A_z \cdot 4 = 0,$$

$$M_5 = M_8 = M_9 = M_A = 0, \quad M_4 = M_6 = M_7 = M_C = 0.$$

Dijagrami sila u preseccima dati su na Slici P 12.16 c), d), e), f), g) i i).

**Najvažnije u ovom poglavlju**

- Šta su sile u presecima ravnih i prostornih linijskih nosača
- Kako se formiraju dijagrami momenata savijanja, transversalnih i normalnih sila kod linijskih nosača u ravni
- Kako se crtaju dijagrami momenata savijanja, transversalnih sila, normalnih sila i momenata torzije kod prostornih linijskih nosača