TEHNIČKA MEHANIKA I

14. PREDAVANJE

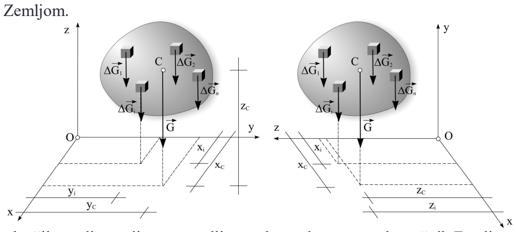
TEŽIŠTE KRUTOG TELA
TEŽIŠTE ZAPREMINE, POVRŠINE I LINIJE

Str 185-198 knjiga Poglavlje 9 – Težište krutog tela. Težište homogenih tela.

ŠTA ĆEMO NAUČITI U OVOM POGLAVLJU?

- **Definicija težišta**
- **Određivanje položaja težišta krutog tela, težišta zapremine, površi i linije**

Na svaki delić krutog tela, koje se nalazi u blizini Zemljine površine, deluje sila usmerena vertikalno naniže, koja se zove **sila teže**. Ova sila je rezultanta sile privlačenja Zemlje i centrifugalne sile, koja nastaje usled obrtanja tela zajedno sa Zemljom.



Za tela, čije su dimenzije zanemarljivo male u odnosu na poluprečnik Zemlje, može se smatrati da su:

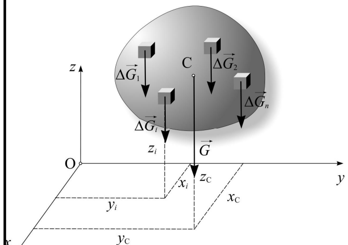
- **sile teže koje deluju na pojedine deliće tela paralelne među sobom i**
- **da prilikom bilo kakvog okretanja tela za svaki delić krutog tela zadržavaju konstantnu veličinu.**

Polje teže, kod koga su ispunjena ova dva uslova, zove se **homogeno polje teže**.

TEŽIŠTE HOMOGENIH TELA

Težita homogenih tela se određuju kao težišta odgovarajućih zapremina, površina i linija

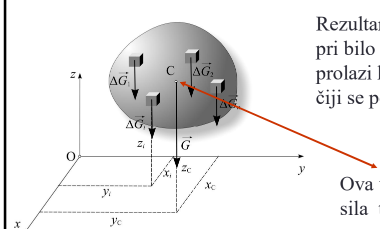
Sile $\Delta\vec{G}_i$ pri bilo kakvom okretanju tela, deluju u **istim napadnim tačkama** u telu i **ostaju uvek paralelne među sobom**. Tom prilikom se menjaju samo pravci njihovih napadnih linija u odnosu na telo.



Rezultanta $\vec{G}$ sila teže $\Delta\vec{G}_i$ koje deluju na deliće tela, je **težina tela.**

Kako se radi o sistemu paralelnih sila, težina tela se određuje iz jednačine:

$$G = \sum \Delta G_i$$

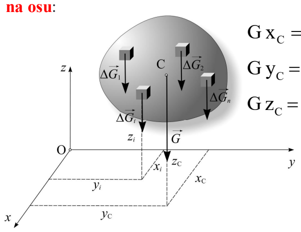


Rezultanta $\vec{G}$ sila $\Delta\vec{G}_i$, pri bilo kom položaju tela prolazi kroz jednu istu tačku C tela, čiji se položaj prema telu ne menja.

Ova tačka je središte paralelnih sila teže - **težište tela**

Težište tela je tačka čiji se položaj ne menja prema krutom telu. Kroz težište tela prolazi napadna linija rezultante sila teže delića krutog tela pri bilo kakvom položaju krutog tela u prostoru.

Koordinate težišta, kao središta paralelnih sila teže, određuju se primenom **Varinjonove teoreme o momentu rezultante sistema paralelnih sila obzirom na osu**:



$$G\,x_C = \Delta G_1\,x_1 + \Delta G_2\,x_2 + \ldots + \Delta G_n\,x_n$$
$$G\,y_C = \Delta G_1\,y_1 + \Delta G_2\,y_2 + \ldots + \Delta G_n\,y_n$$
$$G\,z_C = \Delta G_1\,z_1 + \Delta G_2\,z_2 + \ldots + \Delta G_n\,z_n$$

$$x_C = \frac{\sum \Delta G_i\,x_i}{G} \qquad y_C = \frac{\sum \Delta G_i\,y_i}{G} \qquad z_C = \frac{\sum \Delta G_i\,z_i}{G}$$

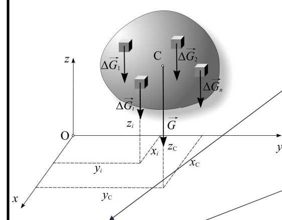
x_i, y_i, z_i koordinate napadnih tačaka sila teže pojedinih delića tela
x_C, y_C, z_C koordinate težišta.

Težište je geometrijska tačka.
Ona može da se nalazi i izvan konture datog tela (na primer kod prstena).

TEŽIŠTE ZAPREMINE

Homogena tela imaju konstantnu gustinu u svim tačkama.
Kod homogenih tela je težina bilo kog delića proporcionalna zapremini tog delića:

$$\Delta G_i = \gamma \Delta V_i \qquad \gamma - \text{specifična težina}$$



Težina celog tela je proporcionalna zapremini celog tela:

$$G = \gamma\,V$$

$$x_C = \frac{\sum \Delta G_i\,x_i}{G} \quad y_C = \frac{\sum \Delta G_i\,y_i}{G} \quad z_C = \frac{\sum \Delta G_i\,z_i}{G} \;\Rightarrow\; x_C = \frac{\sum \Delta V_i\,x_i}{V} \quad y_C = \frac{\sum \Delta V_i\,y_i}{V} \quad z_C = \frac{\sum \Delta V_i\,z_i}{V}$$

Položaj težišta homogenog tela zavisi samo od geometrijskog oblika posmatranog tela, dok **od specifične težine ne zavisi**.

Tačka C je težište zapremine V.

Ako telo **ne može da se rastavi na konačan broj delića** čija su težišta poznata, onda se u tom slučaju telo razdeli na veliki broj malih zapremina ΔV_i, a zatim se prelazi na **granični slučaj**, kada sve zapremine teže nuli, odnosno kada se odgovarajuće zapremine pretvaraju u tačke.

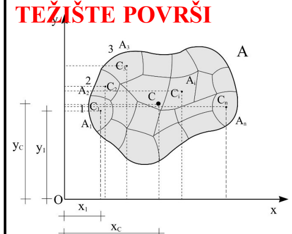
U tom slučaju sume u izrazima prelaze u integrale po celoj zapremini tela:

$$x_C = \frac{\sum \Delta V_i\,x_i}{V} \quad y_C = \frac{\sum \Delta V_i\,y_i}{V} \quad z_C = \frac{\sum \Delta V_i\,z_i}{V}$$

$$x_C = \frac{1}{V}\int_V x\,dV \quad y_C = \frac{1}{V}\int_V y\,dV \quad z_C = \frac{1}{V}\int_V z\,dV$$

gde su x, y i z koordinate diferencijalnog elementa zapremine tela dV.

TEŽIŠTE POVRŠI



$C_1\ (x_1, y_1);\ C_2\ (x_2, y_2);\ \ldots\ C_i\ (x_i, y_i);\ \ldots\ C_n\ (x_n, y_n)$

Ako je telo homogena ploča male debljine u ravni xy, i ako može da se podeli na delove površina $A_1, A_2, \ldots, A_n$, težište je određeno izrazima:

$$x_C = \frac{\sum \Delta A_i\,x_i}{A} \qquad y_C = \frac{\sum \Delta A_i\,y_i}{A}$$

težište površi površine A

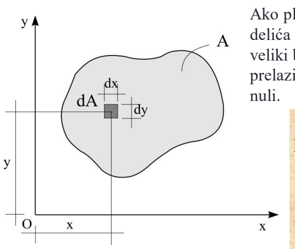
površina cele ploče

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

površina pojedinog elementa ploče ΔA_i

Izrazi za određivanje težišta površi:

$$x_C = \frac{\sum \Delta A_i\,x_i}{A}, \quad y_C = \frac{\sum \Delta A_i\,y_i}{A}, \quad z_C = \frac{\sum \Delta A_i\,z_i}{A}$$



Ako ploča ne može da se rastavi na konačan broj delića čija su težišta poznata, telo se razdeli na veliki broj **elementarnih površi** dA, a zatim se prelazi na granični slučaj, kada sve površi teže nuli.

$$x_C = \frac{1}{A}\int_A x\,dA \qquad y_C = \frac{1}{A}\int_A y\,dA$$

težište površi površine A

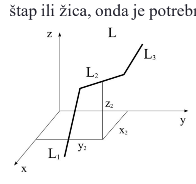
U slučaju zakrivljene ploče ili ljuske izrazi za određivanje koordinata težišta su:

$$x_C = \frac{1}{A}\int_A x\,dA, \quad y_C = \frac{1}{A}\int_A y\,dA, \quad z_C = \frac{1}{A}\int_A z\,dA$$

1.5.2020. 12

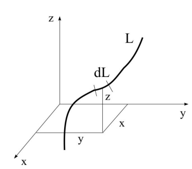
TEŽIŠTE LINIJE

Ako je geometrija tela takva da ima izraženu samo jednu dimenziju, kao što je štap ili žica, onda je potrebno odrediti težište linije.



$$x_C = \frac{\sum \Delta L_i\,x_i}{L} \quad y_C = \frac{\sum \Delta L_i\,y_i}{L} \quad z_C = \frac{\sum \Delta L_i\,z_i}{L}$$

Koordinate težišta linije dužine L ako ona može da se podeli na delove čije su pojedinačne dužine ΔL_i

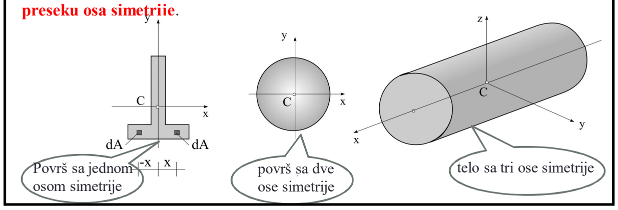


$$x_C = \frac{1}{L}\int_L x\,dL \quad y_C = \frac{1}{L}\int_L y\,dL \quad z_C = \frac{1}{L}\int_L z\,dL$$

Ako linija ne može da se rastavi na konačan broj delova, čija su težišta poznata, onda se u tom slučaju telo razdeli na veliki broj malih delova, pa sume u izrazima prelaze u integrale po celoj dužini tela

Težišta homogenih tela određuju se kao težišta odgovarajućih zapremina, površina i linija.

Težišta nekih tela, površi ili linija su delimično ili kompletno određena ako telo ima jednu ili dve ose simetrije.
Ako telo ima jednu osu simetrije, težište se nalazi negde na osi simetrije, jer svakom elementarnom delu dA na površi desno od ose simetrije, na udaljenju x od ose y, odgovara isti elementarni deo na rastojanju –x od ose simetrije.
Ukupan moment u odnosu na osu simetrije y svih elementarnih delova je jednak nuli, pa je $x_C=0$.
Analogno, **u slučaju da telo ima dve ili tri ose simetrije, težište se nalazi u preseku osa simetrije**.

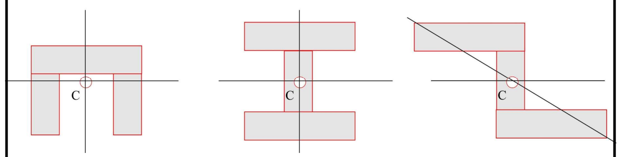


Koordinate težišta površine:

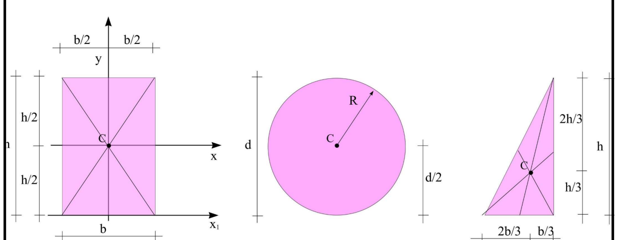
$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{x_1\cdot A_1 + x_2\cdot A_2 + x_3\cdot A_3 + \ldots + x_n\cdot A_n}{A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n}$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{y_1\cdot A_1 + y_2\cdot A_2 + y_3\cdot A_3 + \ldots + y_n\cdot A_n}{A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n}$$

Ako telo ima jednu osu simetrije, težište se nalazi negde na osi simetrije.
Ako telo ima dve ili tri ose simetrije, težište se nalazi u preseku osa simetrije.

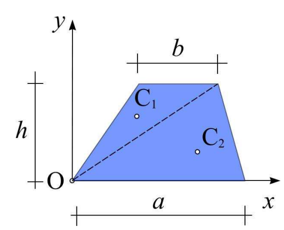


TEŽIŠTA PROSTIH POVRŠINA



TEŽIŠTA SLOŽENIH POVRŠINA

Da bi se što jednostavnije primenili izrazi za određivanje težišta potrebno je izabrati koordinatni sistem tako da su ose paralelne sa ivicama tela



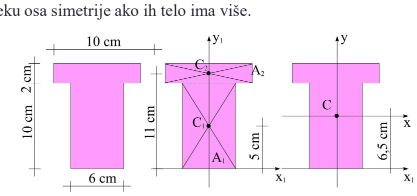
$$x_C = \frac{\sum \Delta A_i\, x_i}{A}$$

$$y_C = \frac{\sum \Delta A_i\, y_i}{A}$$

Trapez se može rastaviti na delove: dva trougla, ili na pravougaonik i trougao.

$$y_C = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{bh}{2}\frac{2}{3}h + \frac{ah}{2}\frac{1}{3}h}{\frac{bh}{2}+\frac{ah}{2}} = \frac{h}{3}\frac{a+2b}{a+b}.$$

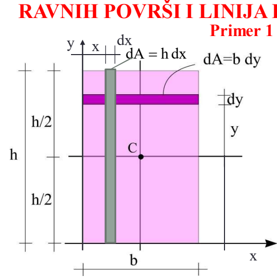
- Podeli se telo na konačan broj manjih delova koji imaju jednostavnije oblike, na primer pravougaonik, trougao, krug, deo kruga;
- Ako na telu postoje otvori proizvoljnog oblika (kružnog, kvadratnog, pravougaonog itd.), onda su u izrazima za određivanje težišta površi koordinate tih veličina negativne;
- Izabere se koordinatni sistem tako da su ose paralelne sa ivicama tela;
- Težište se nalazi uvek na osi simetrije, ako telo ima jednu osu simetrije, tj. u preseku osa simetrije ako ih telo ima više.



$$x_C = 0,\quad y_C = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{6\cdot 10\cdot 5 + 10\cdot 2\cdot 11}{6\cdot 10 + 10\cdot 2} = 6{,}5\,\text{cm}.$$

PRIMERI ODREĐIVANJA TEŽIŠTA HOMOGENIH RAVNIH POVRŠI I LINIJA INTEGRACIJOM

Primer 1 Odrediti položaj težišta površi pravougaonika



Za određivanje koordinate y_C težišta trougla za elementarnu površ se usvaja pravougaonik širine dy, koji je na odstojanju y od ose x. Površina elementarnog dela je:

$$dA = b\,dy$$

Površina pravougaonika je:

$$A = \int_A dA = \int_0^h b\,dy = b\,y\Big|_0^h = bh$$

Udaljenje težišta od ose x je:

$$y_C = \frac{1}{A}\int_A y\,dA = \frac{1}{bh}\int_0^h y\,b\,dy = \frac{1}{bh}\,b\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^h = \frac{h}{2}$$

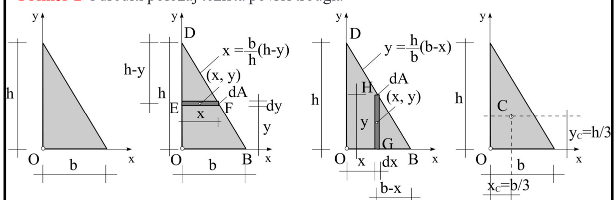
Za određivanje koordinate x_C za elementarnu površ se usvaja pravougaonik širine dx, koji je na odstojanju x od ose y. Površina elementarnog dela je:

$$dA = h\,dx$$

Udaljenje težišta od ose y je:

$$x_C = \frac{1}{A}\int_A x\,dA = \frac{1}{bh}\int_0^b x\,h\,dx = \frac{1}{bh}\,h\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^b = \frac{b}{2}$$

Primer 2 Odrediti položaj težišta površi trougla

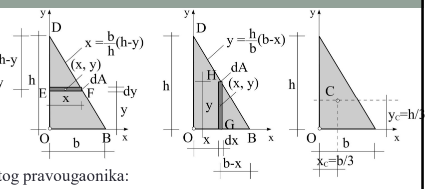


Za određivanje koordinate y_C težišta trougla za elementarnu površ se usvaja pravougaonik širine dy, koji je na odstojanju y od ose x.

Površina elementarnog dela je: $dA = xdy = \frac{b}{h}(h-y)dy$

Širina pravougaonika x je ovde izražena u funkciji udaljenja y težišta elementarnog dela od ose x, korišćenjem proporcije $b:h = x:(h-x)$ koja je posledica sličnosti trouglova $\Delta OBD \sim \Delta EFD$

$dA = xdy = \frac{b}{h}(h-y)dy$



Koordinata težišta y_C datog pravougaonika:

$$y_C = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^h y\,x\,dy}{\int_0^h x\,dy} = \frac{\int_0^h y\frac{b}{h}(h-y)dy}{\int_0^h \frac{b}{h}(h-y)dy} = \frac{\frac{1}{6}bh^2}{\frac{1}{3}bh} = \frac{h}{3}$$

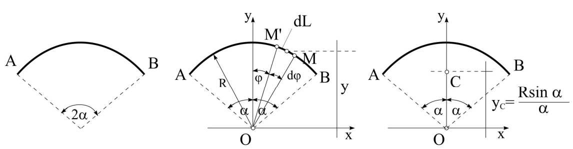
$$x_C = \frac{b}{3},\ y_C = \frac{h}{3}$$

Analognim postupkom dobija se koordinata težišta x_C

Elementarna površ $dA = y\,dx = \frac{h}{b}(b-x)$ $\qquad h:b = y:(b-x)$

Koordinata težišta x_C datog pravougaonika: $x_C = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b x\,y\,dx}{\int_0^b y\,dx} = \frac{\int_0^h x\frac{h}{b}(b-x)dx}{\int_0^h \frac{h}{b}(b-x)dx} = \frac{b}{3}.$

Primer 3 Odrediti položaj težišta kružnog luka



Poluprečnik luka je R, a centralni ugao 2α. Koordinatni sistem je izabran tako da osa y bude osa simetrije, pa je x_C=0, dok je x osa postavljena kroz centar O. Treba odrediti udaljenje y_C težišta od ose x.

Elementu luka odgovara centralni ugao dφ, pa je njegova dužina: $dL = Rd\varphi$

Dužina celog luka je: $L = \int_L dL = \int_{-\alpha}^{\alpha} Rd\varphi = 2R\alpha$

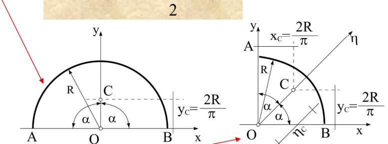
Koordinata težišta elementarnog dela $\overset{\frown}{MM'}$: $y = R\cos\varphi$

Težište kružnog luka se nalazi na osi simetrije, na rastojanju od centra $y_C = \frac{\int_L ydL}{L} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}(R\cos\varphi)(Rd\varphi)}{2R\alpha} = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}$

Težište kružnog luka $y_C = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$

Za polukružnu liniju ugao α je π/2, pa je:

$$y_C = \frac{R\sin\alpha}{\alpha} = \frac{R\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi}$$



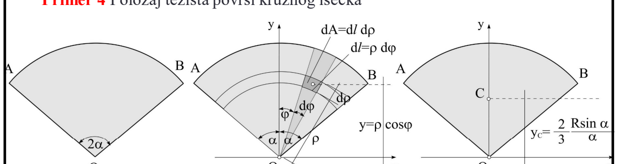
Kod četvrtine kružnice težište se nalazi na odstojanju η_C koje se dobija zamenom α = π/4 u izraz za težište kružnog luka:

$$\eta_C = R\frac{\sin\alpha}{\alpha} = R\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}R$$

Koordinate težišta x_C i y_C dobijaju se projektovanjem dužine η_C na x, odnosno na y osu:

$$x_C = y_C = \eta_C\cos 45^0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}R\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2R}{\pi}$$

Primer 4 Položaj težišta površi kružnog isečka



Kružni isečak OAB je poluprečnika **R**, sa centralnim uglom **2α**. Koordinatni sistem je postavljen tako da osa y bude osa simetrije, pa je x_C**=0**, dok je x osa postavljena kroz centar O. Treba pdrediti udaljenje y_C

Elementarna površ je na rastojanju **ρ** od koordinatnog početka, širine **dρ**. Položaj elementarne površi je određen uglom **φ**, a njegova dužina je dužina luka $dl = \rho d\varphi$

Površina elementarnog dela je površina pravougaonika: $dA = dl \cdot d\rho = \rho\,d\varphi\,d\rho$

Koordinata y težišta elementarne površi je $y = \rho\cos\varphi$

Površina A kružnog isečka može se odrediti iz proporcije: $R^2\pi : 2\pi = A : 2\alpha \quad \Rightarrow \quad A = R^2\alpha$

$$y_C = \frac{\int_A ydA}{A} = \frac{\int_0^R\int_{-\alpha}^{\alpha}(\rho\cos\varphi)(\rho\,d\varphi\,d\rho)}{R^2\alpha} = \frac{\int_0^R \rho^2 d\rho \int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi\,d\varphi}{R^2\alpha} = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

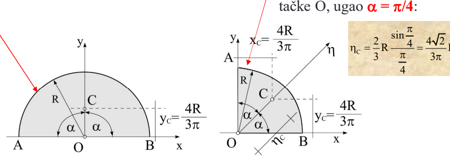
Odrediti težište polukružne površi i četrvrtine kruga.

Kod polukružne površi centralni ugao je **2α=π**, odnosno **α=π/2**, pa su koordinate težišta:

$$x_C = 0,\quad y_C = \frac{2}{3}R\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$

Težište četvrtine kružne površinalazi se na osi simetrije η, na udaljenju težišta od tačke O, ugao **α = π/4**:

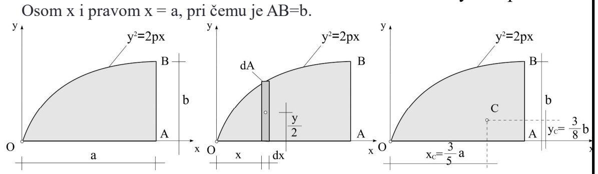
$$\eta_C = \frac{2}{3}R\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}R$$



Koordinate težišta x_C i y_C dobijaju projektovanjem dužine η_C na x, odnosno y osu:

$$x_C = y_C = \eta_C\cos 45^0 = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}R\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4R}{3\pi}$$

Primer 5 Odrediti položaj težišta površi ograničene parabolom $y^2 = 2px$, Osom x i pravom x = a, pri čemu je AB=b.



Parametar p parabole se može odrediti zamenom koordinata tačke B (a,b) u jednačini parabole:

$$b^2 = 2pa \quad \Rightarrow \quad p = \frac{b^2}{2a} \qquad y^2 = 2px = \frac{b^2}{a}x$$

Elementarni deo je pravougaonik širine dx, visine y

Površina elementarnog dela je $dA = y\,dx$

Koordinate elementarne površi su **(x, y/2)**

Ukupna površina je: $A = \int_A dA = \int_0^a y\,dx = \int_0^a \frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{x}\,dx = \frac{b}{\sqrt{a}} x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{2}{3}ab$

Koordinate težišta dobijaju se primenom izraza za težište površi, integraljenjem po x, odnosno y:

$$x_C = \frac{\int_A x\,dA}{A} = \frac{\int_0^a xy\,dx}{\frac{2}{3}ab} = \frac{\int_0^a x\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{x}\right)dx}{\frac{2}{3}ab} = \frac{\frac{2}{5}\frac{b}{\sqrt{a}}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a}{\frac{2}{3}ab} = \frac{\frac{2}{5}a^2b}{\frac{2}{3}ab} = \frac{3}{5}a$$

$$y_C = \frac{\int_A \frac{1}{2}y\,dA}{A} = \frac{\int_0^a \frac{1}{2}yy\,dx}{\frac{2}{3}ab} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a \frac{b^2}{a}x\,dx}{\frac{2}{3}ab} = \frac{\frac{1}{2}\frac{b^2}{a}\int_0^a x\,dx}{\frac{2}{3}ab} = \frac{\frac{b^2}{2a}\frac{x^2}{2}}{\frac{2}{3}ab}\Bigg|_0^a = \frac{3}{8}b$$

$$x_C = \frac{3}{5}a$$

$$y_C = \frac{3}{8}b$$