

UDK : 621.874

## RAZMATRANJE PONAŠANJA DINAMIČKOG SISTEMA MOSNIH DIZALICA PRI DIZANJU TERETA U GRAĐEVINARSTVU

Slavko Zdravković<sup>1</sup>, Dragan Zlatkov<sup>2</sup>, Dragana Turnić<sup>3</sup>, Ivana Kostadinov<sup>4</sup>

**Rezime:** U radu se razmatra ponašanje dinamičkog sistema mosne dizalice, koja se koristi u građevinarstvu, kao sistema sa jednim ili dva stepena slobode. Primenjuje se Dalambert-ov princip o ravnoteži sila da bi se dobila diferencijalna jednačina kretanja. Razmatranjem pojednostavljenih jednačina kretanja lakše se sagledavaju uticaji pojedinih veličina na proces dizanja. Rezultati dobijeni na ovaj način su u granicama zadovoljavajuće tačnosti za praktičnu primenu. U zavisnosti od karakteristika dizalice i vrste kretanja dobija se veličina prigušenja od kojeg zavisi i maksimalna sila koja deluje na nosač.

**Cljučne reči:** mosna dizalica, stepen slobode, jednačine kretanja, pojednostavljeno razmatranje.

## ON BEHAVIOR OF BRIDGE CRANE DYNAMIC SYSTEM DURING LIFTING OF LOAD IN CONSTRUCTION

**Abstract:** This paper discusses the dynamic system behavior of bridge cranes which is used in the construction industry as a system with one or two degrees of freedom. D`Alamber`s principle on balance of forces is applied to obtain differential equations of motion. Considering the simplified equations of motion it is easier to analyze the impact of certain parameters in the process of lifting. The results obtained in this way are within the limits of satisfactory accuracy for practical application. Damping value, on which the maximum force acting on the girder depends, is obtained according to the crane characteristics and motion type.

**Keywords:** bridge crane, degree of freedom, equations of motion, simplified consideration.

---

<sup>1</sup> Prof. dr, Član Srpske Kraljevske Asocijacije akademika, inovatora i naučnika – SKAIN, Ekspert bivšeg Saveznog ministarstva za nauku, tehnologiju i razvoj u oblasti: 121 građevinsko inženjerstvo, aseizmičko građevinarstvo, stabilnost mostova, Građevinsko – arhitektonski fakultet Univerziteta u Nišu, ul. Aleksandra Medvedeva 14, Niš, Srbija, e-mail: slavko.zdravkovic@gaf.ni.ac.rs

<sup>2</sup> Dr, docent, Građevinsko – arhitektonski fakultet Univerziteta u Nišu, ul. Aleksadra Medvedeva 14, Niš, Srbija, e-mail: dragan.zlatkov@gaf.ni.ac.rs

<sup>3</sup> Dr, asistent, Građevinsko – arhitektonski fakultet Univerziteta u Nišu, ul. Aleksadra Medvedeva 14, Niš, Srbija, e-mail: dragana.turnic@gaf.ni.ac.rs

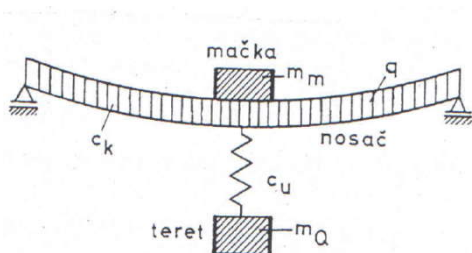
<sup>4</sup> Master inž.arh., student doktorskih studija, Građevinsko – arhitektonski fakultet Univerziteta u Nišu, ul. Aleksadra Medvedeva 14, Niš, Srbija, e-mail: ivanakostadinov@yahoo.com

## 1. UVOD

Poslednjih godina istraživači dizalica nastoje da tačnije odrede dinamičke sile, koje se javljaju pri dizanju, tj. ubrzanje pri dizanju i kočenje pri spuštanju tereta. Nastoji se da se odrede sile inercije sopstvene težine i tereta da bi se zamenili i isključili iz proračuna statički koeficijenti, koeficijent udara  $\varphi$  i koeficijent  $\psi$ , koji zamenjuju sile inercije sopstvene težine i tereta kod građevinskih mašina pri radu. Ovim se čine uprošćenja da bi se dobili jednostavni obrasci primenljivi u praksi. Ovakvim proračunom se umanjuje tačnost jer se pretpostavlja da je pogonski moment konstantan, kao i zato što nisu uzete u obzir zamajne mase mehanizma za dizanje koje imaju najveći uticaj na vrednost dinamičkih sila. U radu je postupak prikazan na sistemu sa jednom i dve mase.

Problematika teorije dinamičkih sistema dizalica se pokazala kao kompleksna, jer se radi o komplikovanim sistemima sa više masa i opruga. Pri egzaktnom rešavanju problema, potrebno je uzeti u obzir i prigušenje sistema koje je relativno teško tačno odrediti. Prigušenje u nosećoj konstrukciji nastupa kao prigušenje materijala, prigušenje između točkova kolica i šine na dizaličnom nosaču i kao prigušenje između elemenata nosača.

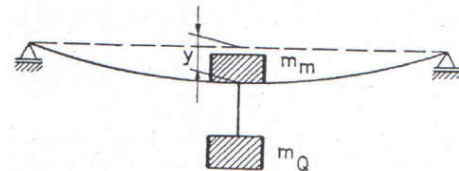
## 2. RAZMATRANJE SISTEMA MOSNE DIZALICE



Slika 1 - Prikaz mosne dizalice kao sistema sa dva stepena slobode kretanja

Sistem teret - kolica (mačka) – most je predstavljen sa dva stepena slobode (slika 1). Noseća konstrukcija krutosti  $c_k$ , opterećena sopstvenim kontinualno raspoređenim opterećenjem mase  $m$ , oslonjena je na krute oslonce. Dizalična staza je ovim uzeta kao kruta, što je najnepovoljniji slučaj za oscilovanje. Na sredini nosača nalaze se kolica mase  $m_m$ . Teret mase  $m_Q$  obešen je o užad krutosti  $c_u$ , koja su pričvršćena za doboš kolica.

Položaj kolica na sredini raspona je najnepovoljniji slučaj za nosač. Masa užeta je zanemarljivo mala u odnosu na druge mase, pa se ne uzima u obzir. Krutost užadi je funkcija modula elastičnosti  $E$  i dužine užeta. Usvaja se da je modul elastičnosti konstantan, a isto tako da je i promena dužine užeta u posmatranom vremenskom intervalu zanemarljivo mala. Iz datih pretpostavki sledi da je krutost užadi konstantna vrednost. Ovako predstavljen oscilujući sistem je relativno komplikovan, te se može pod određenim pretpostavkama pojednostaviti. Kao što je već napomenuto, kontinualno raspoređena masa noseće konstrukcije može da se zameni redukovanom koncentrisanom masom  $m_{red}$ . Masa kolica  $m_m$  i redukovana masa nosača  $m_{red}$  daju masu  $m_k$ . Saglasno napred iznetim pretpostavkama, takav sistem je predstavljen na slici 2.

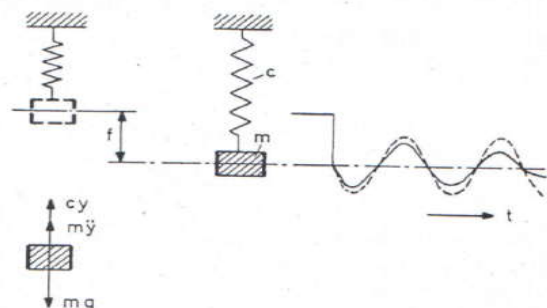


Slika 2 - Prikaz mosne dizalice kao sistema sa jednim stepenom slobode

Ako između mase  $m_k$  i  $m_Q$  postoji kruta veza, onda je moguće mase  $m_k$  i  $m_Q$  složiti u jednu masu, koja osciluje. Takođe je moguće složiti krutost mosta  $c_k$  i krutost užadi čime se dobija sistem sa jednim stepenom slobode kretanja.

Sistem je predstavljen na slici 3, gde oznake znače:

- $m$  - ukupna masa oscilujućeg sistema,
- $c$  - ukupna krutost oscilujućeg sistema.



Slika 3 - Ekvivalentni dinamički model mosne dizalice sa jednim stepenom slobode kretanja

Ukupna masa oscilujućeg sistema je jednaka:

$$m = m_k + m_Q, \quad (1)$$

gde je:

$m_k$  – masa kolica i redukovana masa noseće konstrukcije,  
 $m_Q$  – masa tereta.

Ukupna krutost oscilujućeg sistema jednaka je:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_k} + \frac{1}{c_u} \Rightarrow c = \frac{c_k c_u}{c_k + c_u} = \frac{mg}{f}, \quad (2)$$

gde je:

$c_k$  – krutost noseće konstrukcije,  
 $c_u$  – krutost užadi,

$f$  – spuštanje kuke, o koju je obešen teret, usled ugiba noseće konstrukcije i izduženja užadi pod opterećenjem od sopstvene težine korisnog tereta.

Saglasno D'Alambert-ovom principu o ravnoteži sila dobija se diferencijalna jednačina sistema (slika 3), koja glasi:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + cy - mg &= 0 / : m \\ \ddot{y} + \omega^2 y - g &= 0 \end{aligned}, \quad (3)$$

gde je uvedena veličina

$$\omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{g}{f}. \quad (4)$$

Dobijena je diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima, čije je rešenje, kao što je poznato, jednako zbiru opšteg rešenja homogenog dela diferencijalne jednačine i partikularnog rešenja:

$$y = y_h + y_p. \quad (5)$$

Izračunavanjem  $y_h$  i  $y_p$  na poznati način, dobija se rešenje:

$$y = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{g}{\omega^2}. \quad (6)$$

ili, vodeći računa o relaciji (4):

$$y = A \sin \omega t + B \cos \omega t + f,$$

$$\dot{y} = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t.$$

Početni položaj i početna brzina oscilovanja daju granične uslove za određivanje koeficijenata A i B. Za vreme  $t = 0$  izduženje opruge je:

$$y(0) = \frac{mg}{c} = f \quad (7)$$

a brzina, kojom se teret odize od podloge dobija se pomoću zakona količine kretanja:

$$\dot{y}(0) = v \frac{m_Q}{m} = \alpha V \frac{m_Q}{m} \quad (8)$$

gde je:

$v$  – brzina kojom se teret odize od podloge,

$\alpha$  – faktor odizanja, najviše jednak jedinici,

$V$  – nazivna brzina dizanja.

U momentu odizanja tereta od podloge brzina  $v$  je jednaka nekom delu nazivne brzine (brzine ustaljenog kretanja) i zavisi od mnogih faktora, koje je ovako uprošćenim sistemom nemoguće obuhvatiti.

$$y(0) = B + f = f, \quad B = 0,$$

$$\dot{y}(0) = A\omega = v \frac{m_Q}{m}, \quad (9)$$

$$A = v \frac{m_Q}{m\omega} = v \frac{m_Q}{m} \sqrt{\frac{f}{g}},$$

gde je kružna frekvencija  $\omega = \sqrt{\frac{g}{f}}$ .

Rešenje diferencijalne jednačine kretanja (3) je:

$$y = A \sin \omega t + f. \quad (10)$$

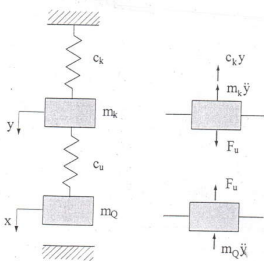
Iz rešenja se vidi da se promena dužine opruge  $y$  sastoji iz konstantnog dela  $f$  i oscilujućeg  $A \sin \omega t$ . Sila opruge  $F_u$  jednaka je proizvodu promene dužine opruge  $y$  i krutosti opruge  $c$ . Za razliku od većine problema u mašinstvu gde se traže pretežno frekvencije, za izračunavanje noseće konstrukcije u građevinarstvu interesantne su najveće amplitude.

### 3. RAZMATRANJE SISTEMA SA DVA STEPENA SLOBODE KRETANJA

Mosna dizalica je ovde predstavljena sistemom sa dve mase i dve opruge (slika 4.). Jednu masu sačinjavaju masa kolica i redukovana masa glavnih nosača dizalice, dok drugu masu predstavlja korisni teret. Krutost noseće konstrukcije je zamenjena oprugom krutosti  $c_k$ , a krutost užadi oprugom čija je krutost  $c_u$ . Dizalica stoji tačno iznad oslonaca staze. Iz ravnoteže sistema sila sa slike 4. slede diferencijalne jednačine kretanja:

$$m_k \ddot{y} + c_k y - c_u (x - y) = 0, \quad (11)$$

$$m_Q \ddot{x} + c_u (x - y) = 0, \quad (12)$$



Slika 4 - Ekvivalentni dinamički sistem mosne dizalice sa dva stepena slobode kretanja

U prethodnim jednačinama krutosti opruga iznose:

$$c_k = \frac{Q + G_m + G_k}{f_k}, \quad (13)$$

$$c_u = \frac{Q}{f_u}, \quad (14)$$

gde je:

$Q$  - težina tereta,

$G_m$  - težina kolica,

$G_k$  - redukovana težina noseće konstrukcije,

$f_k$  - ugib noseće konstrukcije,

$f_u$  - statičko istežanje užadi usled opterećenja teretom.

Karakteristična jednačina je oblika:

$$\begin{vmatrix} c_k + c_u - m_k \omega^2 & -c_u \\ -c_u & c_u - m_Q \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (15)$$

Posle uvođenja pomoćnih veličina

$$a_1 = \frac{c_k}{m_k}, a_2 = \frac{c_u}{m_Q}, a_3 = \frac{c_u}{m_k}, \quad (16)$$

dobija se:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{2}\right)^2 - a_1 a_2} \quad (17)$$

Ovim su određene kružne frekvencije sistema  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Viša frekvencija odgovara istosmernom kretanju masa  $m_k$  i  $m_Q$ , a niža frekvencija kretanju u suprotnom smeru. Saglasno frekvencijama  $\omega_1$  i  $\omega_2$  dobijaju se dva odnosa amplituda  $\beta_1$  i  $\beta_2$ :

$$\beta_1 = \frac{a_2}{a_2 - \omega_1^2} \text{ i } \beta_2 = \frac{a_2}{a_2 - \omega_2^2} \quad (18)$$

Početni uslovi pri odizanju tereta od podloge su:

$$t = 0, y = 0, x = 0,$$

$$\dot{y} = 0 = A_1 \omega_1 + A_2 \omega_2$$

$$\dot{x} = 0 = \beta_1 A_1 \omega_1 + \beta_2 A_2 \omega_2 \quad (19)$$

$$A_1 = \frac{v}{\omega_1(\beta_1 - \beta_2)}, A_2 = \frac{v}{\omega_2(\beta_1 - \beta_2)}.$$

Najveća poremećajna sila koja deluje na noseću konstrukciju, izaziva i najveći ugib. Ova sila je najveća kada je  $y$  najveće, tj:

$$F'_{\max} = c_k y_{\max}. \quad (20)$$

Amplituda  $y$  je sastavljena iz dva dela koja osciluju različitim frekvencijama. U najnepovoljnijem slučaju

$$F'_{\max} = c_k \alpha V \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 \omega_2 (\beta_1 - \beta_2)}. \quad (21)$$

Dinamički faktor za noseću konstrukciju iznosi:

$$\psi_k = \frac{F_{\max}}{Q} = \frac{Q + F'_{\max}}{Q} \quad (22)$$

$$\psi_k = 1 + c_k \alpha V \frac{\omega_1 + \omega_2}{Q \omega_1 \omega_2 (\beta_1 - \beta_2)}$$

#### 4. RAZMATRANJE POJEDNOSTAVLJENIH JEDNAČINA KRETANJA

Radi boljeg sagledavanja uticaja pojedinih veličina na proces dizanja, izvršice se razmatranje jednačina u pojednostavljenom obliku.

Ranije je već konstatovano da su mase uređaja za dizanje osetno veće od mase mosta, pa se u procesu dizanja ponašaju kao zamajni točak, koji tromo reaguje na promenu broja okretaja. Zato, procena  $\ddot{y} = 0$  može da se usvoji, što i merenja u mnogim istraživanim slučajevima pokazuju.

Diferencijalne jednačine za prvi period kretanja mogu da se napišu u obliku:

$$\ddot{y} + \omega_k^2 y - K_1 \varphi = 0, \quad (23)$$

$$\ddot{\varphi} + H \dot{\varphi} + \omega_D^2 \varphi - K_2 y = M, \quad (24)$$

gde je:

$$\omega_k^2 = \frac{c_k + c_u}{m_k}, \quad \omega_D^2 = \frac{c_u r^2}{i_u^2 J_D}, \quad K_1 = \frac{c_u r^2}{i_u m_k},$$

$$K_2 = \frac{c_u r}{i_u J_D}, \quad M = \frac{M_{D0}}{J_D}, \quad H = \frac{h}{J_D}.$$

Iz procene  $\ddot{y} = 0$  dobija se:

$$y = \frac{K_1 \varphi}{\omega_k^2}, \quad (25)$$

čime jednačina (24) postaje:

$$\ddot{\varphi} + H \dot{\varphi} + \left( \omega_D^2 - \frac{K_1 K_2}{\omega_k^2} \right) \varphi = M. \quad (26)$$

Ovde  $\omega_H^2 = \omega_D^2 - \frac{K_1 K_2}{\omega_k^2}$  predstavlja frekvenciju

ekvivalentnog sistema, saglasno kome masa uređaja za dizanje osciluje između opruge mosta i užadi. Veličina  $\omega_D^2$  je frekvencija delimičnog sistema, koji se sastoji od mase uređaja za dizanje i užadi. Kao spoljni faktor javljaju se  $K_1$  i  $K_2$ . Razmatrajući jednačinu (26) vidi se iz  $H = h/J_D$  da se nagib odgovarajuće krive upravljanja  $h$  ovde pojavljuje kao konstanta prigušenja.

Jednačina kretanja nosača glasi:

$$y = A_1 \sin \omega_1 t. \quad (27)$$

Pretpostavlja se da je  $\omega_k = \omega$ .

Maksimalna sila koja deluje na nosač je:

$$F'_{\max} = c_k y_{\max} \frac{0,053 Q}{\sqrt{f}} \left( v - \frac{30 Q r^2}{i_u^2 h_i} \right). \quad (28)$$

gde je:

$f$  [cm] - spuštanje kuke, o koju je obešen teret, usled ugiba konstrukcije i izduženja užadi. Uticaj sopstvene težine noseće konstrukcije se ne uzima u obzir,

$v$  [m/min] - nazivna brzina dizanja tereta,

$Q$  [kN] - težina tereta,

$r$  [m] - poluprečnik doboša,

$h_i$  [kNms] - nagib krive upravljanja,

$i_u$  - prenosni odnos donje koturače.

Konačni izraz za dinamički faktor je:

- bez uticaja prigušenja

$$\psi_k = 1 + \frac{0,053 Q}{\sqrt{f}} \left( v - \frac{30 Q r^2}{i_u^2 h_i} \right), \quad (29)$$

- sa uticajem prigušenja

$$\psi_k = 1 + \frac{0,048 Q}{\sqrt{f}} \left( v - \frac{30 Q r^2}{i_u^2 h_i} \right). \quad (30)$$

#### 5. ZAKLJUČAK

Iz prethodnog razmatranja se može zaključiti da su dinamički modeli mosnih dizalica ekvivalentni dinamički sistemi čiji je zadatak bio da se u dinamičkom smislu ponašaju kao stvarni sistemi. Istraživanja problema dinamike dizalica omogućila su da se pri uprošćenju modela dođe do dovoljno tačnih rezultata primenljivih za praksu. Osnovni zadatak proračuna dizalica je da se teorijski dokaže da dizalica odgovara zahtevima bezbednosti uzimajući u obzir radne uslove, kao i stanje u toku transporta, montaže i demontaže. Opterećenja koja deluju na dizalice mogu biti stalna, povremena i

posebna, pa pri proračunu naprezanja na zamor materijala sva ova opterećenja treba uzeti u obzir. Može se reći da se sve preporuke uglavnom zasnivaju na iskustvenim i eksperimentalnim rezultatima.

### ZAHVALNOST

Istraživanja prezentovana u ovom radu finansirana su od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije u okviru projekta sa evidencionim brojem TR36016 za projektni ciklus od 2011.-2014. godine, koji nosi naziv "Eksperimentalna i teorijska istraživanja linijskih i površinskih sistema sa polukrutim vezama sa aspekta teorije drugog reda i stabilnosti", u organizaciji Građevinsko-arhitektonskog fakulteta Univerziteta u Nišu, i inovacionog projekta pod nazivom „Seismo-Safe 2G3-Goseb Building System“ (Project IF ID476) koji je je finansiran od strane Inovacionog fonda Republike Srbije, a koji je sproveden 2014. u „Projektinžinjeri Tim“ d.o.o. u Nišu, Srbija.

### LITERATURA

- [1] R. Mijajlović; Dinamički faktor pri dizanju tereta , časopis „Naučni podmladak“ Univerzitet u Nišu, broj1, 1970, str. 97-108.
- [2] M. Milićević, S. Zdravković; Dinamika konstrukcija, Univerzitet u Nišu, 1984.
- [3] D. Oštrić, N.Zrnić, A. Brkić; O modeliranju mosnih dizalica za istraživanje dinamičkih pojava tokom njihovog kretanja, Tehnika – Mašinstvo, vol. L1.No 3-4, Beograd, 1966, str. M1-M6.
- [4] R. Mijajlović, Z. Marinković, M. Jovanović; Dinamika i optimizacija dizalica – monografija, Univerzitet u Nišu – Mašinski fakultet, Niš, 2002.
- [5] S. Zdravković; Dinamika konstrukcija – zbirka rešenih zadataka, Građevinski fakultet Univerziteta u Nišu, AGM . knjiga, Beograd, 2001.
- [6] M. Jovanović, Lj. Spasić, D Mijajlović, J. Jovanović; Prilog dinamičkoj sintezi mosnih dizalica, XVI International conf. ICMFMDI 2000, Mašinski fakultet, Beograd, 2000.