

## STATIČKI I DINAMIČKI PRORAČUN KONSTRUKCIJA SA POLUKRUTIM VEZAMA ŠTAPOVA U ČVOROVIMA

Slavko Zdravković<sup>1</sup>, Dragan Zlatkov<sup>2</sup>, Biljana Mladenović<sup>3</sup>

**Rezime:** U radu se daju teorijske osnove i izrazi za proračun statičkih i dinamičkih uticaja nosača sa polukrutim vezama štapova u čvorovima. U postojećoj literaturi detaljno je razrađen proračun linijskih sistema kod kojih su veze štapova u čvorovima apsolutno krute ili idealno zglavkaste. U realnim konstrukcijama uopšte, a posebno u montažnim, veze štapova u čvorovima mogu biti delimično krute, što može imati značajan uticaj na promenu naprezanja i deformacije u konstrukciji. U svetu postoji više postupaka sa različitim prilazima proračunu konstrukcija sa polukrutim vezama, međutim dokazano je da sve one vode istim rezultatima. Svi ovi pristupi se pored teorijske bave i eksperimentalnom analizom dobijenih rezultata.

**Ključne reči:** polukrute veze, statika, dinamika, konstrukcija.

## STATIC AND DYNAMIC CALCULATION OF THE STRUCTURE WITH SEMI-RIGID MEMBER CONNECTIONS IN JOINTS

**Abstract:** The paper gives a theoretical basis and terms for calculation of static and dynamic impact of girders with semi-rigid connections of members in joints. In the existing literature calculation of line systems in which the connections of members in joints are absolutely rigid or ideally pinned has been elaborated in detail. In real structures in general, and particularly in the precast ones, connections may be partially rigid, which can have a significant impact on the change of stresses and strains in the construction. In the world there are several procedures with different approaches to the calculation of structures with semi-rigid connections, but it was proven that all of them lead to the same results. All of these approaches give experimental analysis of the results in addition to theoretical one.

**Key words:** semi-rigid connections, static, dynamic, structure.

<sup>1</sup> Redovni prof., Ekspert Saveznog ministarstva za nauku, tehnologiju i razvoj, Građevinsko-arhitektonski fakultet u Nišu

<sup>2</sup> Stručni saradnik, Građevinsko-arhitektonski fakultet u Nišu, ul. A. Medvedeva 14 Niš

<sup>3</sup> Stručni saradnik, Građevinsko-arhitektonski fakultet u Nišu, ul. A. Medvedeva 14 Niš

## 1 UVOD

Proračun sistema vrši se najčešće uz pretpostavku da su štapovi u čvorovima vezani ili potpuno kruto (krut ugao) ili idealno zglavkasto. U realnim konstrukcijama, a naročito u montažnim, ove veze, tj. spojevi su po pravilu polukruti (elastični), što ima značajan uticaj na preraspodelu naprezanja i deformacije u konstrukciji objekta. Ostvarivanje trajne veze između elemenata montažnih sistema vrši se na više načina: po principu suve montaže, mokrim postupkom, ili prednaprežanjem u zavisnosti od vrste konstrukcije. Kada su u pitanju betonske montažne konstrukcije, pored kvalitetnog projektovanja, proračuna i izvođenja, spajanju prefabrikovanih elemenata mora se posvetiti posebna pažnja. Spojovima se ostvaruju međusobne veze elemenata, tj. monolitnost, statička i dinamička stabilnost konstrukcija, pa je njihova uloga višestruka. U zavisnosti od funkcije koju prvenstveno treba zadovoljiti, spojevi se mogu razlikovati prema: nameni, obliku, položaju i funkciji elemenata koje povezuju, silama koje treba da prime i prenesu, spojnim elementima i primenjenim materijalima, tehnologiji izvođenja i dr.

Proračun linijskih sistema uz pretpostavku da su štapovi u čvorovima vezani kruto ili idealno zglavkasto, poznat kao približan metod deformacije, koji se ovdje neće prikazivati jer je opšte poznat, može se na sličan način primeniti i na sisteme sa polukrutim – elastičnim vezama, samo uz primenu odgovarajućih veličina za polukrute veze, kako je to u literaturi [1] dato.

## 2 STATIČKI PRORAČUN KONSTRUKCIJA SA POLUKRUTIM VEZAMA

Konstrukcije kod kojih međusobne veze štapova nisu apsolutno krute (krut ugao), već dozvoljavaju izvesnu relativnu rotaciju krajnjih poprečnih preseka u čvorovima su sistemi sa polukrutim vezama štapova u čvorovima. Pošto je takav sistem veza dosta čest u konstrukcijama, a pogotovu u montažnim, od interesa je razmotriti njihov proračun uzimajući u obzir elastičnost čvornih veza.

Za polukruto vezane štapove u čvorovima izvedeni su izrazi za momente na krajevima štapova, kao i uslovne jednačine metode deformacija [1], [2]. Ako se uvedu oznake  $\mu_{ik} = \varphi_{ik}^* / \varphi_i$ ,  $\mu_{ki} = \varphi_{ki}^* / \varphi_k$

gde su  $\varphi_i$  i  $\varphi_k$  uglovi obrtanja čvora  $i$  odnosno  $k$ , a  $\varphi_{ik}^*$  i  $\varphi_{ki}^*$  uglovi obrtanja krajnjih poprečnih preseka štapa  $ik$ ) i nazovu stepeni uklještenja štapa  $ik$  u čvorovima  $i$  i  $k$ , tada izrazi za momente na krajevima tako vezanih štapova prema [1] glase:

$$M_{ik} = a_{ik}\varphi_i^* + b_{ik}\varphi_k^* - c_{ik}\psi_{ik} + m_{ik}^{(o)} + m_{ik}^{(\Delta t)} \quad (1a)$$

$$M_{ki} = b_{ki}\varphi_i^* + a_{ki}\varphi_k^* - c_{ki}\psi_{ik} + m_{ki}^{(o)} + m_{ki}^{(\Delta t)} \quad (1b)$$

ili preko uglova obrtanja čvorova  $\varphi_i, \varphi_k$ :

$$M_{ik}^* = a_{ik}^*\varphi_i + b_{ik}^*\varphi_k - c_{ik}^*\psi_{ik} + m_{ik}^{(o)*} + m_{ik}^{(\Delta t)*} \quad (2a)$$

$$M_{ki}^* = b_{ki}^*\varphi_i + a_{ki}^*\varphi_k - c_{ki}^*\psi_{ik} + m_{ki}^{(o)*} + m_{ki}^{(\Delta t)*} \quad (2b)$$

Konstante  $a_{ik}^*, b_{ik}^*, c_{ik}^*$ , kao i početni momenti polukruto uklještenog štapa mogu se izraziti preko odgovarajućih veličina kruto uklještenog štapa (sa oznakama bez \*) i stepena uklještenja, na sledeći način:

$$a_{ik}^* = \mu_{ik} \left[ a_{ik} - (1 - \mu_{ki}) \frac{b_{ik}}{a_{ki}} b_{ik} \right] \quad (3a)$$

$$a_{ki}^* = \mu_{ki} \left[ a_{ki} - (1 - \mu_{ik}) \frac{b_{ik}}{a_{ik}} b_{ik} \right] \quad (3b)$$

$$b_{ik}^* = b_{ki}^* = \mu_{ik} \mu_{ki} \quad (3c)$$

$$c_{ik}^* = \mu_{ik} \left[ c_{ik} - (1 - \mu_{ki}) \frac{b_{ik}}{a_{ki}} c_{ki} \right] \quad (3d)$$

$$c_{ki}^* = \mu_{ki} \left[ c_{ki} - (1 - \mu_{ik}) \frac{b_{ik}}{a_{ik}} c_{ik} \right] \quad (3e)$$

$$m_{ik}^* = \mu_{ik} \left[ m_{ik} - (1 - \mu_{ki}) \frac{b_{ik}}{a_{ki}} m_{ki} \right] \quad (4a)$$

$$m_{ki}^* = \mu_{ki} \left[ m_{ki} - (1 - \mu_{ik}) \frac{b_{ik}}{a_{ik}} m_{ik} \right] \quad (4b)$$

$$M_{ik}^* = \mu_{ik} \left[ M_{ik} - (1 - \mu_{ki}) \frac{b_{ik}}{a_{ki}} M_{ki} \right] \quad (5a)$$

$$M_{ki}^* = \mu_{ki} \left[ M_{ki} - (1 - \mu_{ik}) \frac{b_{ik}}{a_{ik}} M_{ik} \right] \quad (5b)$$

a njihovo fizičko značenje prikazano je na Sl.1, pri čemu su:

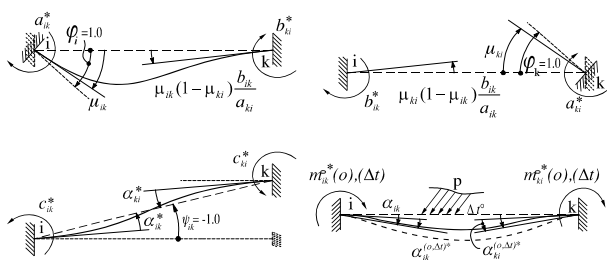
$$\alpha_{ik}^* = \mu_{ik} - (1 - \mu_{ik}) \mu_{ki} \frac{b_{ik}}{a_{ik}} \quad (6a)$$

$$\alpha_{ki}^* = \mu_{ki} - (1 - \mu_{ki}) \mu_{ik} \frac{b_{ik}}{a_{ki}} \quad (6b)$$

$$\alpha_{ik}^{*(o,\Delta t)} = \mu_{ik} \alpha_{ik}^{(o,\Delta t)} - (1 - \mu_{ik}) \mu_{ki} \frac{b_{ik}}{a_{ki}} \alpha_{ki}^{(o,\Delta t)} \quad (6c)$$

$$\alpha_{ki}^{*(o,\Delta t)} = \mu_{ki} \alpha_{ki}^{(o,\Delta t)} - (1 - \mu_{ki}) \mu_{ik} \frac{b_{ik}}{a_{ki}} \alpha_{ki}^{(o,\Delta t)} \quad (6d)$$

dobijeni principom superpozicije.

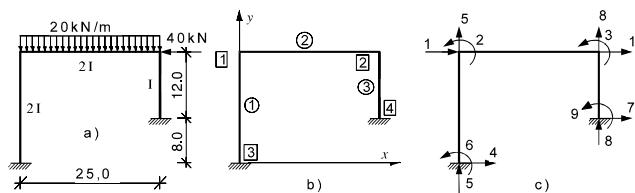


Sl.1 Fizičko značenje konstanti štapova i početnih momenata polukruto uklještenog štapa

Iz izraza (3a) do (3e) može se uočiti da se variranjem vrednosti  $\mu_{ik}$  i  $\mu_{ki}$  sa 1 i 0 dobijaju ranije definisani štapovi: tip *k* ( $\mu_{ik} = \mu_{ki} = 1$ ) tip *g* ( $\mu_{ik} = 1; \mu_{ki} = 0$ ), tip *z* ( $\mu_{ik} = \mu_{ki} = 0$ ), te se u daljoj analizi svi mogu tretirati kao jedinstven tip polukruto (semi-rigid) uklještenog štapa, što značajno pojednostavljuje i unificira proračun, a što je od posebnog značaja kod izrade kompjuterskih programa za proračun konstrukcija. Proračun se sprovodi klasičnom metodom deformacije uvažavajući polukrute veze štapova u čvorovima.

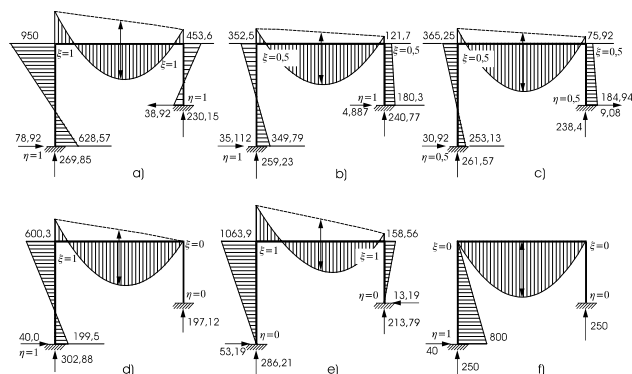
Za računanje veličina datih izrazima (4) i (5) za štapove sa konstantnim poprečnim presekom za različite stepene uklještnja  $\mu_{ik}$  i  $\mu_{ki}$  sastavljen je kompjuterski program MK-TAB a rezultati proračuna prikazani su tabelarno [6].

Za prikazani numerički primer na Sl.2 za različite stepene uklještnja pojedinih štapova u čvorove okvira izvršena je diskretizacija sistema, određene su matrice krutosti i vektori ekvivalentnog opterećenja štapova, matrica krutosti sistema i vektor slobodnih članova, sračunate su komponente vektora pomeranja i sile na krajevima štapova okvira, što je detaljno prikazano u radu [6], za  $\mu_{11} = \mu_{21} = \zeta = 0.5$  i  $\mu_{31} = \mu_{41} = \eta = 0.5$  (Sl. 2c). Za neke razmatrane slučajeve prikazani su dijagrami momenata savijanja i reakcije oslonaca okvira (Sl. 3).



Sl.2 a) nosač i opterećenje, b) oznake štapova i čvorova, c) generalisana pomeranja

Ovaj primer statičkog proračuna sistema sa polukrutim vezama za razmatrane stepene uklještnja urađen je korišćenjem programa STRESS sa matricama krutosti polukruto uklještenih štapova sračunatih sa uticajem normalnih sila na deformaciju.



Sl.3 Dijagrami momenata savijanja za različite stepene uklještnja

### 3 DINAMIČKI PRORAČUN KONSTRUKCIJA SA POLUKRUTIM VEZAMA

Matrični oblik kao metod analize konstrukcija, a u poslednje vreme posebno metod konačnih elemenata (MKE) nalazi široku primenu u dinamičkoj analizi konstrukcija u raznim oblastima inženjerskog konstrukterstva.

Za okvir prikazan na Sl.2 za različite stepene uklještnja pojedinih štapova u švorovima (slučajevi od a) do f)) sračunate su kružne frekvence i periode oscilovanja slobodnih horizontalnih oscilacija okvira, kao i horizontalne seizmičke sile prema Pravilniku [9]i maksimalno horizontalno pomeranje okvira za sračunato seizmičko opterećenje prema članu 16. Pravilnika. Okvir je tretiran kao armirano-betonski sa dimenzijama poprečnih preseka štapova određenih dimenzionisanjem konstrukcije za uticaje usled jednako podeljenog opterećenja  $q=20$  kN/m i koncentrisane sile u čvoru 2 od 40 kN (Sl.2a) pod uslovom da lom nastupa po armaturi. Dobijene su sledeće dimenzije poprečnih preseka: za štapove 1 i 2  $b/h=50/115$  cm, a za štap 3 je  $b/h=50/90$  cm. Modul elastičnosti betona je određen prema Pravilniku BAB 87 i za usvojenu marku betona MB30 iznosi  $E=3150 \cdot 10^4$  kN/m<sup>2</sup>, te je uporedna krutost na savijanje okvira (štap 3)  $EI = 1746937,5$  kNm<sup>2</sup>. težina konstrukcije je  $Q=ql=20 \cdot 25=500$  kN. Kružne frekvencije rama su određene prema izrazu:

$$\omega^i = \sqrt{\frac{1}{mu_i^i}} = \sqrt{\frac{gEI}{QE I u_i^i}}$$

gde je:

- $\omega^i$  kružna frekvencija slobodnih oscilacija okvira (i= a) do f))
- $g$  ubrzanje zemljine teže
- $u_i^i$  horizontalno pomeranje mase  $m$  okvira (i= a) do f)).

Rezultati proračuna su prikazani u sledećoj Tabeli.

	Elu <sub>i</sub> [m]	$\omega$ [s <sup>-1</sup> ]	T[s]	K <sub>d</sub> = 0,7/T	K <sub>d,usv</sub>	S[kN]	u <sub>1,s</sub> [m]
a	149,00	11,22	0,539	1,251	1,000	50,00	0,0077
b	229,91	9,036	0,694	1,007	1,000	50,00	0,0120
c	383,26	6,998	0,897	0,780	0,780	39,00	0,0156
d	402,25	6,830	0,919	0,760	0,760	38,00	0,0159
e	505,70	6,093	1,030	0,679	0,679	33,95	0,0179
f	633,27	5,445	1,153	0,607	0,607	30,35	0,0201

Ovaj primer seizmičkog proračuna sistema sa polukrutim vezama za različite stepene uklještenja analiziran je korišćenjem programa SASS uz primenu matrica krutosti za konkretne stepene uklještenja.. Sračunate su sopstvene vrednosti horizontalnih seizmičkih sila, a dobijene vrednosti su prikazane u listingu u Prilogu 9 u [6].

#### 4 ZAKLJUČAK

U konstrukcije sa polukrutim vezama ubrajaju se sistemi kod kojih veze štapova u čvorovima nisu apsolutno krute, već dozvoljavaju, u opštem slučaju, izvestan stepen relativne pomerljivosti u pravcima generalisanih pomeranja. U dosadašnjoj inženjerskoj praksi pri projektovanju konstrukcija vrlo se je malo, ili ni malo, o tome vodilo računa. Ukoliko je uticaj polukrutih veza potcenjen a one se u proračunu tretiraju kao zglobne, to se negativno odražava na ekonomičnost konstrukcije. Ukoliko se pak pretpostavi nerealno veliki stepen uklještenja štapova u čvorovima dobijeni rezultati proračuna nisu na strani sigurnosti, što može negativno da se odrazi na nosivost, trajnost i stabilnost konstrukcije.

Pokazano je da se postojeći programski paketi za statički i dinamički proračun konstrukcija mogu primeniti i za proračun konstrukcija sa polukrutim vezama štapova u čvorovima.

Na priloženim numeričkim primerima, kako pri statičkom tako i pri dinamičkom (seizmičkom) opterećenju, momenti savijanja, kao i osnovne dinamičke karakteristike, pomeranja i seizmičke sile

se dosta razlikuju u zavisnosti od stepena uklještenja. Ovo nedvosmisleno ukazuje da se realna krutost veze mora adekvatno uzimati pri proračunu svih inženjerskih konstrukcija.

#### LITERATURA

- [1] *Proračun sistema elastično vezanih štapova metodom deformacije*, M. Milicevic, XVII Jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Zadar, 1986.
- [2] *Uticaj krutosti veza na veličinu kritičnog opterećenja i promenu napreznja u linijskim sistemima*, M. Milicevic, S. Zdravkovic, Savetovanje o novoj tehničkoj regulativi u građevinarstvu, DGKM, Skoplje, 1986.
- [3] *Significance and part of elastic connections of members with joints in earthquake engineering*, S.Zdravkovic, M. Milicevic, R. Folic, D. Zlatkov, , Proceedings of 11 WCEE, Acapulco, Mexico, 1996.
- [4] *Theoretical basis and dynamic design of the systems with semi-rigid connections of members with joints*, M. Milicevic, S. Zdravkovic, R. Folic, and D. Zlatkov, Proceedings of 11 WCEE, Acapulco, Mexico, 1996.
- [5] *Static and dynamic testing of structures with semi-rigid connections*, S. Zdravkovic, M. Milicevic, D. Drenic, D. Zlatkov, Proceedings of IABSE Colloquium, Istanbul, Turkey, 1996.
- [6] *Analiza linijskih sistema sa polukrutim vezama štapova u čvorovima*, D. Zlatkov, Magistarski rad, Građevinski fakultet u Nišu, Niš, 1998.
- [7] *Matrix Formulation of Design and Testing of structures with semi-rigid connections*, M. Milicevic, S. Zdravkovic, D. Zlatkov and B. Kostadinov, Proceedings of the first SEWC, San Francisco, California, 1998.
- [8] *Seismic analysis of plane linear systems with semi-rigid connections*, S. Zdravkovic, D. Zlatkov, B. Mladenović and M. Mijalković, Proceedings of VII World Conference ERES, Limasol, Cyprus, 2009.
- [9] *Pravilnik o tehničkim normativima za izgradnju objekata visokogradnje u seizmičkim područjima*, SL.list SFRJ br.31/81, Beograd, 1981.

\* Ovo istraživanje je sprovedeno u okviru programa istraživanja u oblasti tehnološkog razvoja za period 2008.-2010, u oblasti Urbanizam i građevinarstvo, projekat br. 16001, pod nazivom Eksperimentalna i teorijska istraživanja realnih veza armirano-betonskih i spregnutih konstrukcija pri statičkom i dinamičkom opterećenju.